構造保存型 ANCF シェル要素を用いたコンベックステープの曲げ変形の一考察

A Study on Bending Deformation of Convex Tape Using Structured Conservative ANCF Shell Element

指導教員　宮崎康行

M7017　菅野宏伸
Hironobu Sugano

A convex tape can be rolled-up easily, so that it can be stored into small volume. It exerts a self-extending force when stored cylindrically and has high specific rigidity after it has extended straightly. Thus, the convex tape has excellent property as deployable space structure, and in fact it is employed as a structural member of self-deployable structure. When designing a deployable structure using convex tape, the transition region where the sectional shape of the tape transits from the original to the flat one in bending deformation often becomes a problem. In this paper, prior to the future derivation of the analytical solution of the deformation in the transition region, the deformation characteristics in that region is clarified numerically by finite element static analysis combined with the dynamic relaxation procedure based on the structure-conserving dynamic analysis.

1. 序論

1.1. 展開宇宙構造物へのコンベックステープの利用

宇宙で大型構造物を構築する場合，一般にペイロードをロケットにより宇宙へ搬送することより，質量・容積の観点から，高収納効率で可展開性を有し，なおかつ軽量であることが望ましい．これらの要求を満たす構造部材の一つとして，コンベックステープ（巻き尺のような凸型断面部材）が注目されている．

コンベックステープは，円筒状に巻き付けて保持することで高収納効率を実現し，また，巻き付け時に蓄えられる歪エネルギにより自己伸展力を有するため，展開時にアクチュエータを必要とせず，シンプルな展開構造を実現することが出来る．これらの特徴から，コンベックステープを用いた自己伸展部材が研究されている[1,2]．また，バイコンベックスブームを用いた自己展開トラス構造が提案されており（Fig.1），回転自由なハブにコンベックステープを巻き付け，ガイドローラーを周囲に配置することで，テープが直線状に伸展する展開様式を採用している（Fig.2(left)）[3-5]．

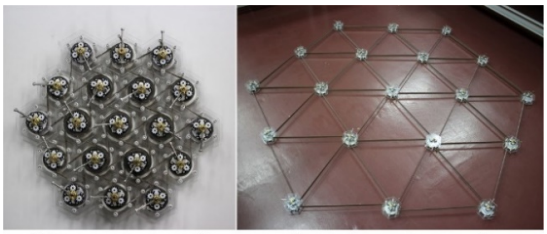


Fig.1 Self-deployable truss[3]

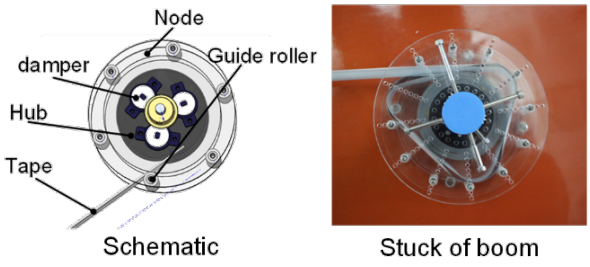


Fig.2 Storage mechanism[5]

上述の自己展開トラス構造の展開試験において，ブームが展開しきらずに，ノード内でスタックする現象が報告されている（Fig.2(right)）．その要因の一つとして，ハブの不適切な形状によるブームの剥離が挙げられており，ハブの曲率のみならず，ブーム取り付け部におけるハブの形状も重要となる[5]．なぜならば，一般にブーム取り付け部においては，Fig.3(left)に示すよう，コンベックステープの断面形状（断面曲率）が変化する遷移領域を伴うため，ハブの形状が遷移領域の形状と合っていない場合，Fig.3(right)に示すようなブームの剥離現象を生じるからである．

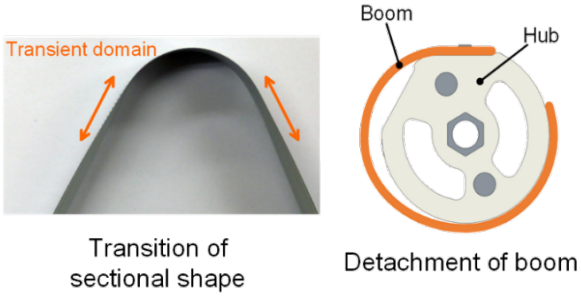


Fig.3 Influence of cross-sectional shape transition[5]

1.2. 研究の目的

上述の通り，再現性の高い自己展開トラス構造の設計には，コンベックステープの曲げ変形における遷移領域の形状が必要であり，その理論解の導出が望まれている．そこで本論では，理論解に先立ち，FEM を用いて遷移領域の変形要因を明らかにすることを目的とする．

FEM により静的平衡解を求める場合，弧長法を用いた静解析を要し[6]，パラメータの変更毎に計算を行うことから，変形後の形状のみが必要な場合には，より簡便な計算手法が望ましい．よって，Dynamic Relaxation（以下，DR）と通常の反復解法を用いた静解析を組み合わせた構造解析手法[7]を用いる．DR とは，動解析を用いて平衡解を求める手法であり，初期形状が平衡解から離れている場合や，解析が不安定になりやすい問題，例えば，座屈を含む解析においても定安して解を得ることが出来る．また，静解析と組み合わせることにより，通常の DR より速く平衡解を得ることができる．この手法により，例えば Fig.4 に示すようなパラメータから概算された初期形状に対しても，安定に解を得ることができ，パラメータからダイレクトに平衡解を求めることができる．

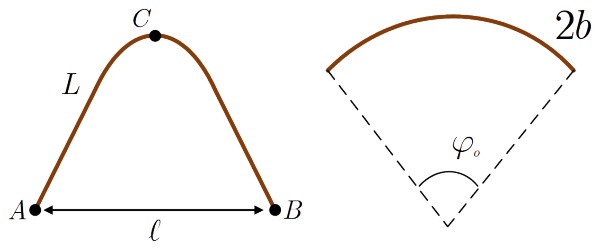
FEM に用いる要素は，絶対静止系から見た勾配ベクトルで有限回転を記述する ANCF(Absolute Nodal Coordinate Formulation)により定式化されたシェル要素[8]（以下，ANCF シェル要素）とする．ANCF シェル要素は，その定式化手法より，薄板のせん断ロッキングを生じない要素であり，板厚

$h = 0.13\,\mathrm{mm}$ のコンベックステープの計算に適していると考え採用する．

DR における数値積分手法としては，構造保存型解法の一つであり，エネルギ・運動量・角運動量が厳密に保存するように Lagrange 方程式を修正する EMM[9](Energy-Momentum Method)を用いる．これにより，数値誤差によるエネルギの増減が生じず，着実にエネルギを減らすことが出来る．

以上より，具体的な研究内容は以下の 3 つである．

- ANCF シェル要素の EMM による定式化及び数値計算による妥当性の検証を行う（要素の定式化）．
- DR と静解析を組み合わせた構造解析手法を用い，コンベックステープの曲げ変形解を求める（手法の適用）．
- FEM により，遷移領域における変形要因を明らかにする（遷移領域の解明）．



(a) Schematic　　(b) Cross sectioin

Fig.4　Schematic of bending deformation of convex

2. ANCFシェル要素へのEMMの適用

本章では，ANCF を用いた長方形シェル要素の静力学・動力学[8]及び Lagrange 方程式の EMM による離散化について述べる．それにあたり，記号を Table 1 のように定義する．

Table 1 Nomenclature

$\Delta\boldsymbol{a}$	各時間ステップ間の増分，$\Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t_n) - \boldsymbol{a}(t_{n-1})$
$\bar{\boldsymbol{a}}$	現在と前ステップの平均値 $\bar{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{a}(t_n) - \boldsymbol{a}(t_{n-1})]\,/\,2$
$\widetilde{\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}}$	離散微分，$\Delta\boldsymbol{a} = \widetilde{\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}} \cdot \Delta z$
$\hat{\boldsymbol{a}}$	外積を表す歪対称行列，$\hat{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{u}$

2.1. ANCFシェル要素における未知数ベクトル

ANCF シェル要素は，Fig.5 に示す通り 4 節点を有する要素であり，各節点に 4 種類の未知数ベクトルを設定する．つまり，未知数ベクトルが 16 個であり，中央面の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_o$ は，未知数ベクトル $\boldsymbol{z}^n (n = 1 \sim 16)$ を用いると，

$$\boldsymbol{x}_o = N_n \boldsymbol{z}^n, \quad N_n = N_n(\xi_1, \xi_2) \tag{1}$$

となる．ここで $N_n(\xi_1, \xi_2)$ は，$\boldsymbol{z}^n$ に対応する補間関数であり，埋め込み座標 (ξ_1, ξ_2)（$-1 \le \xi_\alpha \le 1$）の関数となる．また，シェル要素の一片の長さを L_α，物理座標を $x_\alpha = (L_\alpha / 2)\xi_\alpha$ とすると，中央面における勾配ベクトル $\boldsymbol{g}_\alpha$，2 階微分ベクトル $\boldsymbol{h}_{\alpha\beta}$ は，

$$\boldsymbol{g}_\alpha \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}_o}{\partial x_\alpha}, \quad \boldsymbol{h}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}_o}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1,2) \tag{2}$$

であり，以上を用いて，ANCF シェル要素における節点 k $(k = 1 \sim 4)$の未知数ベクトル $\boldsymbol{z}^n$ を以下とする．

$$\boldsymbol{z}^n = \begin{cases} \boldsymbol{x}_o^k & (n = 1 \sim 4,\ n = k) \\ \boldsymbol{g}_1^k & (n = 5 \sim 8,\ n = k+4) \\ \boldsymbol{g}_2^k & (n = 9 \sim 12,\ n = k+8) \\ \boldsymbol{h}_{12}^k & (n = 13 \sim 16,\ n = k+12) \end{cases} \tag{3}$$

次に，要素内の任意の点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，板厚を h，面外方向の埋め込み座標を ξ_3（$-1 \le \xi_3 \le 1$）とすると，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o + \frac{h}{2}\xi_3 \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} \equiv \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 \tag{4}$$

これが，いわゆる Kirchhoff-Love の仮説であり，この仮定により，前述の通りせん断ロッキングが生じない要素となる．

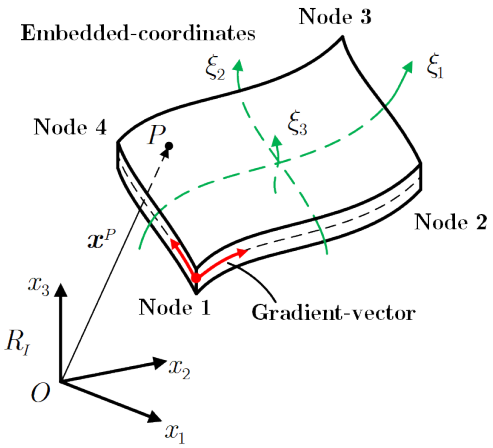


Fig.5　ANCF shell element

2.2. 運動エネルギ・運動量・角運動量

運動エネルギ T，運動量 $\boldsymbol{P}$，角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，密度を ρ とし，板厚 h に関する 2 次の微小量を無視すると（$h \ll 1$），

$$T = \frac{1}{2} M_{nm} \dot{\boldsymbol{z}}^n \cdot \dot{\boldsymbol{z}}^m, \quad \boldsymbol{P} = \sum_{n=1}^{4} M_{nm} \dot{\boldsymbol{z}}^m, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{z}^n \times M_{nm} \dot{\boldsymbol{z}}^m \tag{5}$$

ここで，質量マトリクス M_{nm} は，

$$M_{nm} \equiv \frac{\rho h L_1 L_2}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_n N_m d\xi_2 d\xi_1 \tag{6}$$

2.3. 歪エネルギの導出

歪として Green-Lagrange 歪を用い，変形前が長方形であると仮定する．中央面における Green-Lagrange 歪を $\varepsilon_{\alpha\beta}$，計量テンソルの共変成分を $g_{\alpha\beta}$，曲率を $\kappa_{\alpha\beta}$ とすると，

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\right), \quad \kappa_{\alpha\beta} = \boldsymbol{h}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{n} \tag{7}$$

ただし，$\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタとする．本定式化では，直交異方性材料の構成則を用い，平面応力問題における直交異方性材料の弾性定数マトリクスを $\tilde{\boldsymbol{C}}$ として，

$$\begin{gathered} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}\varepsilon, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}\kappa, \quad \boldsymbol{C} = h\tilde{\boldsymbol{C}}, \quad \boldsymbol{D} = \frac{h^2}{12}\boldsymbol{C} \\ \varepsilon \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^T, \quad \kappa \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{22} & 2\kappa_{12} \end{bmatrix}^T \end{gathered} \tag{8}$$

とすると，ANCF シェル要素の歪エネルギは以下となる．

$$U^{str} = \frac{L_1 L_2}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{N} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\boldsymbol{M} \cdot \kappa \right] d\xi_1 d\xi_2 \tag{9}$$

2.4. Lagrange方程式の導出

ラグランジアンを $L \equiv T - U^{str}$，外部仕事を W とすると，Hamilton の原理より，

$$-\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(L+W\Big)dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta \boldsymbol{z}^{nT}\Big(\boldsymbol{f}_{in}^{n}+\boldsymbol{f}_{el}^{n}-\boldsymbol{F}^{n}\Big)dt = 0 \tag{10}$$

となるので，Lagrange 方程式として，

$$\boldsymbol{f}^{n}-\boldsymbol{F}^{n}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{f}^{n}\equiv\boldsymbol{f}_{in}^{n}+\boldsymbol{f}_{el}^{n} \tag{11}$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{F}^{n}$ は一般化外力であり，

$$\boldsymbol{f}_{in}^{n}\equiv M_{nm}\ddot{\boldsymbol{z}}^{m},\quad \delta U^{str}=\boldsymbol{f}_{el}^{n}\cdot\delta\boldsymbol{z}^{n},\quad \delta W=\boldsymbol{F}^{n}\cdot\delta\boldsymbol{z}^{n} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{f}_{el}^{n}\equiv\frac{L_1L_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{z}^{n}}\right)^{T}\boldsymbol{N}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\kappa}}{\partial\boldsymbol{z}^{n}}\right)^{T}\boldsymbol{M}\right]d\xi_2 d\xi_1 \tag{13}$$

2.5. EMMによる離散運動方程式の導出

内部エネルギを $\Pi \equiv T + U^{str}$ とすると，EMM では離散化された仮想仕事の原理である，

$$\Delta\Pi=\Delta W \tag{14}$$

を用いて定式化を行う．すると，離散運動方程式として，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{n}-\tilde{\boldsymbol{F}}^{n}=\boldsymbol{0},\quad \tilde{\boldsymbol{f}}^{n}\equiv\tilde{\boldsymbol{f}}_{in}^{n}+\tilde{\boldsymbol{f}}_{el}^{n} \tag{15}$$

を得る．ここで，$\tilde{\boldsymbol{F}}^{n}$ は離散外力であり，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{in}^{n}\equiv M_{nm}\frac{\Delta\dot{\boldsymbol{z}}^{m}}{\Delta t},\quad \Delta U^{str}=\tilde{\boldsymbol{f}}_{el}^{n}\cdot\Delta\boldsymbol{z}^{n},\quad \Delta W=\tilde{\boldsymbol{F}}^{n}\cdot\Delta\boldsymbol{z}^{n} \tag{16}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{el}^{n}\equiv\frac{L_1L_2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\widetilde{\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{z}^{n}}}\right)^{T}\bar{\boldsymbol{N}}+\left(\widetilde{\frac{\partial\boldsymbol{\kappa}}{\partial\boldsymbol{z}^{n}}}\right)^{T}\bar{\boldsymbol{M}}\right]d\xi_2 d\xi_1 \tag{17}$$

また，時間積分則を以下とする．

$$\bar{\dot{\boldsymbol{z}}}^{n}=\frac{\Delta\boldsymbol{z}^{n}}{\Delta t} \tag{18}$$

2.6. 増分型の三原理

EMM による離散運動方程式においては，

$$\Delta\Pi=\Delta W,\quad \frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t}=\sum_{n=1}^{4}\tilde{\boldsymbol{F}}^{n},\quad \frac{\Delta\boldsymbol{L}}{\Delta t}=\bar{\boldsymbol{z}}^{n}\times\tilde{\boldsymbol{F}}^{n}-\boldsymbol{Q} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}&=\left(\widetilde{\frac{\partial U^{str}}{\partial\kappa_{\alpha\beta}}}\right)\left\{\widehat{\bar{\boldsymbol{g}}_1\times\bar{\boldsymbol{g}}_2}\tilde{\boldsymbol{A}}-\hat{\bar{\boldsymbol{n}}}\right\}\bar{\boldsymbol{h}}_{\alpha\beta}\\ \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})&\equiv\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\Big(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{n}}\tilde{\boldsymbol{n}}^{T}\Big),\quad \tilde{\boldsymbol{n}}=\frac{\bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{a}|}\end{aligned} \tag{20}$$

ただし，$\Delta t\to 0$ においては，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\widehat{\bar{\boldsymbol{g}}_1\times\bar{\boldsymbol{g}}_2}\tilde{\boldsymbol{A}}-\hat{\bar{\boldsymbol{n}}}\right)=\boldsymbol{0} \tag{21}$$

となる．増分型の角運動量原理は，$\boldsymbol{Q}$ の影響により理論的に保証できない．ただし，簡単なモデルの数値シミュレーションにより，$\boldsymbol{Q}$ の影響が問題ないことを確認した．

3. コンベックステープの曲げ変形

本章では，1.2 節で述べた構造解析手法を，コンベックステープの曲げ変形に適用した計算例を示す．そして，計算結果より，遷移領域の生じる要因を明らかにする．

埋め込み座標を Fig.6(left)のよう定義し（$-b \le x \le b$，$0 \le y \le L$），要素分割は x 軸方向に 8 分割，y 軸方向に 100 分割，計 800 要素，3636 節点とする．コンベックステープの諸元は Table 2 の通りでる．

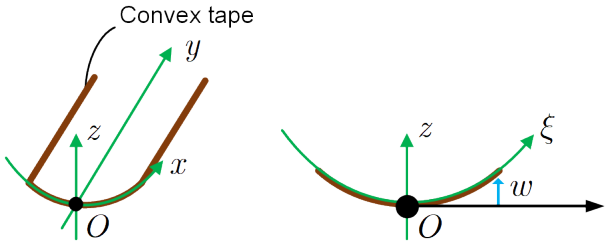


Fig.6　Embedded coordinate(left), Deflection(right)

Table 2 Material properties of convex tape

Item	Values
Young's modulus: E	206 GPa
Length: L	400 mm
Width: $2b$	16 mm
厚さ: h	0.13 mm
Poisson's ratio: ν	0.3

3.1. コンベックステープの曲げ変形のFEM解

FEM による，コンベックステープの曲げ変形の計算例を Fig.7 に示す．境界条件は，$(x, y) = (-b, 0)$，$(b, 0)$，$(-b, L)$，(b, L) の 4 節点をピン固定とし，Fig.4 における AB 間距離 ℓ，断面の中心角 φ_o を変更して計算を行う．

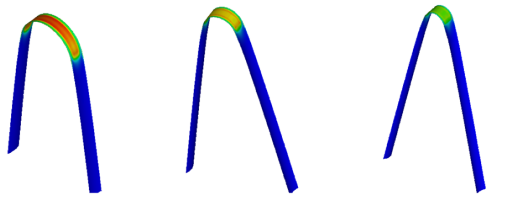


Fig.7　Examples of FEM result ($\ell = 0.1\,\mathrm{m}$)

3.2. 理論解とFEM解との比較

円筒ハブにコンベックステープを巻き付ける曲げ問題（Fig.8）に関しては，撓み $w(\xi)$（Fig.6(right)）が理論的に求められている[10]．ここで，$\xi = x/b$ とする．

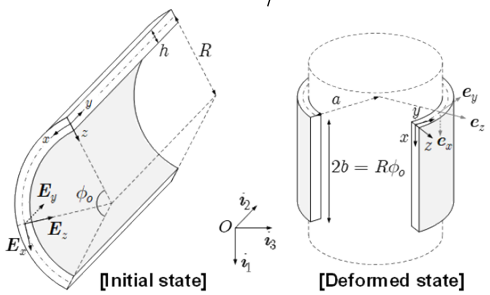


Fig.8　Convex tape under bending[10]

コンベックステープの純曲げ状態における撓み $w(\xi)$ の理論解と FEM 解との比較を Fig.9 に示す．簡単なモデルなため，FEM は通常の静解析のみで行い，ハブ曲率は $\kappa = 15.7\,\mathrm{rad/m}$ とする．図より，両者がよく一致していることがわかり，ANCF シェル要素による FEM 結果は，断面形状を正確に再

現できていることがわかる．

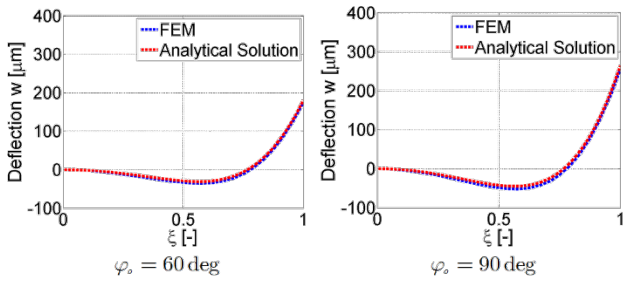


Fig.9　Comparison of analytical solution and FEM result

3.3. 遷移領域における変形

$\ell = 0.1\,\mathrm{m}$，$\varphi_o = 60\,\mathrm{deg}$ とした場合の単位面積あたりの歪エネルギ分布を Fig.10 に示す．

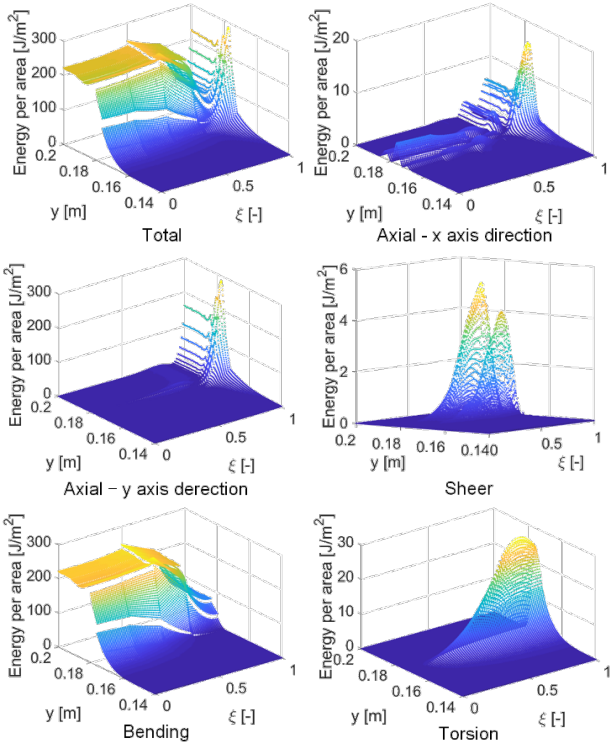


Fig.10　Strain energy per area($\varphi_o = 60\,\mathrm{deg}, \ell = 0.1\,\mathrm{m}$)

遷移領域の $\xi = 0$ 付近において，曲げ変形のエネルギが高いが，これは，x 軸方向（y 軸回り）の曲げがエッジに比べ中央部に強く作用することに対応している．また，遷移領域においてねじり変形を生じているが，これは，断面形状の変化に伴い部材が y 軸方向に捻じれていくことに対応しており，直観的な理解とよくあっている．

次に，遷移領域の $\xi = 1$ 付近において，x，y 軸方向の軸歪に関するエネルギ，特に，y 軸方向の軸歪に関するエネルギが高いとわかる．これは，エッジ部に y 軸方向の引張が作用することに対応するが（Fig.11(left)），遷移領域では，特に強い引張荷重が作用していることがわかる．最後に，曲げ問題の遷移領域では純曲げと異なり，せん断歪が生じており，図よりエネルギのピークが 2 回たっていることがわかる．実際に，せん断歪の分布を見てみると（Fig.11(right)），遷移領域において，せん断変形の方向が変化していることがわかり，z 軸方向から見た断面形状の変化では，遷移領域における反る方向の変化が見られる（Fig.12）．

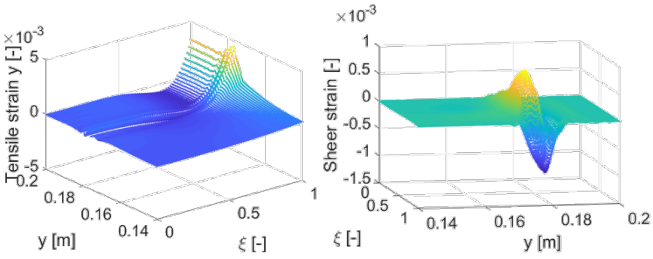


Fig.11　Strain($\varphi_o = 60\,\mathrm{deg}, \ell = 0.1\,\mathrm{m}$)

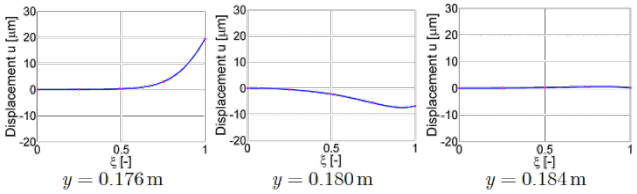


Fig.12　Deformation of cross section seen from z direction

4. 結論

本研究では，下記の結果を得た．

- ANCF シェル要素の EMM による定式化行い，数値計算によりその妥当性を示した（要素の定式化）．
- DR と静解析を組み合わせた構造解析手法をコンベックステープの曲げ変形に適用し，弧長法を用いることなく平衡解を求められることを示した（手法の適用）．
- 遷移領域を伴う変形は，せん断，捩じり変形及び軸力の増加を要因として生じることを，FEM により明らかにした（遷移領域の解明）．

参考文献

[1] 渡邊秋人他，組紐を被覆した伸展構造物の検討，第 56 回宇宙科学技術連合講演会，JSASS-2012-4496，2012 年．

[2] Thomas. W. Murphey, et al., TRAC™ Boom Structural Mechanics, 4th AIAA Spacecraft Structural Conference, AIAA 2017-0171, January, 2017.

[3] 田村明寛，バイコンベックスブームを用いた自己展開構造物の展開挙動，日本大学理工学研究科修士論文，2017.

[4] Yasuyuki Miyazaki, et al., Membrane Structure Supported by Self-Deployable Truss for Space Applications, AIAA Spacecraft Structures Conference, AIAA 2018-0451, pp.1-13, 2018.

[5] 福永桃子，宮崎康行，自己展開トラスの展開性向上，第 61 回宇宙科学技術連合講演会講演集，JSASS-2017-4701，2017.

[6] K.A.Seffen, S.Pellegrino, Deployment dynamics of tape spring, Proceeding of the Royal Society of London, series A, Vol.455, pp.1003-1048, March, 1999.

[7] 柏宗孝，小野田淳次，動的緩和法による膜構造物のしわ解析，膜構造研究論文集，2006.

[8] O.N.Dmitrochenko, D.Y.U.Pogorelov, Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation, Multibody System Dynamics, Vol.10(1), Issue.1, pp.17-43, August, 2003.

[9] Yasuyuki Miyazaki, Tsuyoshi Kodama, Formulation and interpretation of the equation of motion on the basis of the energy-momentum method, Journal of Multi-body Dynamics, Vol.218, Issue.1, pp.1-7, March, 2004.

[10] Yasuyuki Miyazaki, et al., Analytical solution of the bending of a bi-convex boom , Mechanical Engineering Journal, Vol.2, No.6, Paper No.15-00465, 2015.