

圧縮剛性低減型異方性膜の構造保存型解法

Structure Conserving Dynamics of Anisotropic Membrane with Reduced Compressive Stiffness

指導教授 宮崎康行

M7003 小野弘幸
Hiroyuki Ono

The research of dynamics of membrane have been done in a lot of academic and practical fields. In the engineering field, membrane is used as main structural element of gossamer structure. The simulation of dynamic behavior of gossamer structure in space by ground experiment is restricted because the dynamics of such a structure is affected by the gravity and atmosphere. Therefore, it is indispensable to estimate the dynamics by numerical simulation. However, the equation of motion of the gossamer structure is highly nonlinear and highly stiff, so that numerical instability easily occurs. As for the mathematical model of thin membrane, the Stiffness Reduction Model (SRM) was proposed in the past research. In that research, SRM and Energy Momentum Method (EMM) that ensures the numerical stability was applied to the dynamics of isotropic membrane. As for the anisotropic membrane, SRM was proposed but EMM has not been applied for the dynamic analysis. In this paper, EMM for dynamics of stiffness reduced anisotropic membrane is formulated, and the proposed formulation is evaluated by numerical result.

Nomenclature

$\Delta \mathbf{a}$	$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ 時間ステップ間の $\mathbf{a}$ の増分.
$\bar{\mathbf{a}}$	$\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) / 2$ 時間ステップ間の $\mathbf{a}$ の平均.
$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}}$	f の $\mathbf{a}$ による離散微分. $\Delta f(\mathbf{a}) = \widetilde{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}} \Delta \mathbf{a}$ を満たす.
$\mathbf{i}_i$	直交基底ベクトル. $\mathbf{i}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i3}, \delta_{i3})$
$\mathbf{R}^p$	回転節点 p の基底マトリクス
$\boldsymbol{\theta}^p$	回転節点 p の局所座標系での仮想変位ベクトル.
$\boldsymbol{\Theta}^p$	回転節点 p の慣性座標系での仮想変位ベクトル. $\Delta \boldsymbol{\Theta}^p = \bar{\mathbf{R}}^p \Delta \boldsymbol{\theta}^p$
$\mathbf{G}^i$	変形前の反変基底ベクトル
$\mathbf{g}_i$	変形後の共変基底ベクトル
$\mathcal{B}$	物体および要素
V	物体および要素の体積
Π	歪エネルギー

1. 序論

膜構造はこれまでに様々な分野で研究されてきており、宇宙構造分野においては、ゴッサマー構造の主構造に用いられている。ゴッサマー構造とは、膜やケーブルといった極めて柔軟で、圧縮により容易に座屈する部材で構成された構造のことであり、収納性、軽量性に優れ、小さな体積から大きな構造を形成することが可能である。そのため、超軽量大型構造、高比剛性構造といった将来の大型宇宙構造物を形成するための構造様式として期待されている。しかし、その柔軟性ゆえに、地上での実験にて宇宙空間の挙動を予測することは非常に困難となる。そのため、数値計算による挙動の予測が不可欠になる。とはいえ、大変形をきたす運動の数値計算においては、運動方程式は、非線形性が高く、非常に硬い方程式となるため、安定的に解を得ることが非常に困難となる。

膜構造に関する過去の研究は要素モデルの研究から、ダイナミクスまで様々な研究がなされている。Roddeeman の膜モデルはその代表である^[1]。しかし、それまでに提案されていた膜モデルでは、しわ発生時(wrinkle)の圧縮応力が 0 にとしていることから、実際の膜の挙動を精度よく模擬できていなかった。そこで、圧縮剛性を低減する Stiffness Reduction Model(SRM)が提案されている²。ダイナミクスについては、Newmark-beta 法等による時間スキームが従来の手法であったが、より安定的な解析が可能になる Energy Momentum

Method(EMM)^[3]による数値計算法が提案されている^[2]。実際、2010 年に JAXA が打上げたソーラー電力セイル IKAROS の運動解析では、EMM を用いた解析がなされている。

IKAROS の成功を受け、大変形問題解析を行う際の計算手法として EMM が非常に有効であることが示された。しかし、EMM を用いた膜の解析に着目してみると、等方性膜のみしか EMM の適用がされておらず、材料異方性を取り扱うことができない。そこで、本論ではこれまでに提案されている圧縮剛性低減型異方性膜モデルに対して、EMM を適用し、定式化を行うことを目的とする。

2. 理論

2.1. 非線形有限要素法

運動エネルギー T 、運動量 $\mathbf{P}$ 、角運動量 $\mathbf{L}$ を、節点 m の位置ベクトル $\mathbf{x}^m$ 、および回転節点 p の局所直交基底ベクトル $\mathbf{e}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{i}_i$ 、角速度 $\boldsymbol{\omega}^p$ を用いて次式で表す^{[4][5]}。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_{mn} \dot{\mathbf{x}}^m \cdot \dot{\mathbf{x}}^n + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^p \cdot \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^q \\ \mathbf{P} &= M_{mn} \dot{\mathbf{x}}^n \quad \mathbf{L} = \mathbf{x}^m \times M_{mn} \dot{\mathbf{x}}^n + \mathbf{R}^p \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^p \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 M_{mn} および $\mathbf{J}_{pq}$ は質量マトリクスと慣性テンソルである。また、一般化内力の結果を示すと次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m^x &= M_{mn} \frac{d\dot{\mathbf{x}}^n}{dt} + \left(\frac{\partial U^m}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T \\ \mathbf{f}_p^\Theta &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}^p \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^q \right) + \mathbf{e}_k^p \times \left(\frac{\partial U^m}{\partial \mathbf{e}_k^p} \right)^T \end{aligned} \quad (2)$$

外力を $\mathbf{F}_m^x, \mathbf{F}_p^\Theta$ とすれば、運動方程式は次式となる。

$$\mathbf{f}_m^x - \mathbf{F}_m^x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_p^\Theta - \mathbf{F}_p^\Theta = \mathbf{0} \quad (3)$$

また、系全体のエネルギーを U_{total} とすれば、次式が成り立つ。

$$\dot{U}_{total} = \varpi, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_m^x, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{x}^m \times \mathbf{F}_m^x + \mathbf{F}_p^\Theta \quad (4)$$

ここで、 ϖ は外部仕事の仕事率である。

2.2. EMM による定式化

エネルギーモーメント法(Energy Momentum Method : EMM)とはエネルギー原理、運動量原理、角運動量原理を満たすように時間積分則と修正された運動方程式を与えることで、数値計算における安定性を保証するものである^{[3][4][5]}。以下よ

り, EMM による運動方程式の定式化を行う. 系の力学的エネルギーの増分は以下のように表すことができる^{[4][5][6]}.

$$\Delta U_{total} = \tilde{\mathbf{f}}_m^x \cdot \Delta \mathbf{x}^m + \tilde{\mathbf{f}}_p^\Theta \cdot \Delta \Theta^p \quad (5)$$

ここで, $\tilde{\mathbf{f}}_m^x, \tilde{\mathbf{f}}_p^\Theta$ は修正された一般化内力であり,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_m^x &\equiv M_{mm} \frac{\Delta \mathbf{x}^m}{\Delta t} + \left(\frac{\partial U^m}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T \\ \tilde{\mathbf{f}}_p^\Theta &\equiv \frac{\Delta (\mathbf{R}^p \mathbf{J}_{pq} \omega^q)}{\Delta t} + \bar{\mathbf{e}}_k^p \times \left(\frac{\partial U^m}{\partial \mathbf{e}_k^p} \right)^T \end{aligned} \quad (6)$$

となる. また, 修正された一般化外力を $\tilde{\mathbf{F}}_m^x$ および $\tilde{\mathbf{F}}_m^\Theta$ とし, 次式で定義する.

$$\Delta W_{total} \approx \tilde{\mathbf{F}}_m^x \cdot \Delta \mathbf{x}^m + \tilde{\mathbf{F}}_p^\Theta \cdot \Delta \Theta^p \quad (7)$$

以上より, 修正された運動方程式は次式で与えられる.

$$\tilde{\mathbf{f}}_m^x - \tilde{\mathbf{F}}_m^x = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_p^\Theta - \tilde{\mathbf{F}}_p^\Theta = \mathbf{0} \quad (8)$$

また, 時間積分則は次式で与えられる.

$$\bar{\mathbf{x}}^m = \frac{\Delta \mathbf{x}^m}{\Delta t}, \quad \bar{\omega}^p = \frac{\Delta \Theta^p}{\Delta t} \quad (9)$$

また, エネルギー, 運動量, 角運動量に関して次式が成立つ.

$$\begin{aligned} \Delta U_{total} &= \Delta W \\ \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} &= \tilde{\mathbf{F}}_m^x, \quad \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{x}^m \times \tilde{\mathbf{F}}_m^x + \tilde{\mathbf{F}}_p^\Theta \end{aligned} \quad (10)$$

上式より, 外力が働いていない場合, エネルギー, 運動量, 角運動量が保存されることがわかる.

2.3. 膜要素の構成則

膜要素の構成則は次式で表すことができる.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (11)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E^{11} \\ E^{22} \\ 2E^{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1112} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2212} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1221} \end{bmatrix}$$

ここで, $\mathbf{S}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ第 2Piola-Kirchhoff 応力, Green-Lagrange 歪および弾性マトリクスであり, ヤング率, ポアソン比を E_x, E_y, ν_x, ν_y とすれば, 直交座標系の場合, $\mathbf{C}$ は次式で書ける.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad G = \frac{E_x E_y}{E_x + E_y + 2\nu_y E_x} \quad (12)$$

2.4. Wrinkle 座標系

膜要素において, 圧縮剛性を低減する方向は, しわが寄っている方向, wrinkle 方向に一致するものとしている. そのため, wrinkle 方向を求めるための座標系を定義する必要がある. そこで, 変形勾配ベクトル $\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$ を用いて以下の条件を満たすベクトルを定義する^{[1][2]}.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_o &= \mathbf{F}^T \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{w}} & \mathbf{n}_o &= \mathbf{F}^T \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{n}} \\ \begin{cases} w_1 = w \cos \theta \\ w_2 = w \sin \theta \end{cases} & \begin{cases} n_1 = -n \sin \theta \\ n_2 = n \cos \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, $\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{n}}$ はそれぞれ修正された変形勾配テンソル, wrinkle 後のベクトル $\mathbf{w}, \mathbf{n}$ である. この 2 つの独立なベクトル $(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ によって規定される座標系を wrinkle 座標系 (wrinkle coordinate) と呼んでいる. また, wrinkle 時において, 一軸問題を次のように表現する^{[1][2]}.

$$\mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{n} = 0 \quad (14)$$

上式において, $\tilde{\mathbf{S}}$ は修正された応力を表す. さらに, しわより座標系において, 応力と歪は

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}_\sigma^T \mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}_\varepsilon^T \mathbf{E} \quad (15)$$

と書ける. ここで, $\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_\varepsilon$ は座標変換マトリクスであり,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\sigma &= \begin{bmatrix} U^1 & U^2 & U^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_w & \sin^2 \theta_w & -\sin \theta_w \cos \theta_w \\ \sin^2 \theta_w & \cos^2 \theta_w & \sin \theta_w \cos \theta_w \\ 2\sin \theta_w \cos \theta_w & -2\sin \theta_w \cos \theta_w & \cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\varepsilon &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_w & \sin^2 \theta_w & -2\sin \theta_w \cos \theta_w \\ \sin^2 \theta_w & \cos^2 \theta_w & 2\sin \theta_w \cos \theta_w \\ \sin \theta_w \cos \theta_w & -\sin \theta_w \cos \theta_w & \cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

であり, θ_w はしわより方向 wrinkle angle である. また, 式 (13) および (14) より, 次式が求まる.

$$U^1 \cdot \tilde{\mathbf{S}} = 0, \quad U^3 \cdot \tilde{\mathbf{S}} = 0 \quad (18)$$

2.5. Roddeman モデル

Roddeman のモデルは, 膜が伸びる方向としわの方向が一致すると仮定している. wrinkle 時の変形勾配ベクトルを次のように修正する^{[1][2]}.

$$\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbf{I} + \beta \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \mathbf{F} \quad (19)$$

ここで, β は伸びの量を表す. また, 修正された Green-Lagrange 歪および構成則は次式となる.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \mu \mathbf{U}^1, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{E}}, \quad \mu = -\frac{\mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{C} \mathbf{U}^1} \quad (20)$$

式 (18) と (20) を用いれば, 次式が導かれる.

$$\mathbf{S} \cdot [(\mathbf{C} \mathbf{U}^1) \times \mathbf{U}_2] = 0, \quad \mathbf{E} \cdot [\mathbf{U}^1 \times (\mathbf{D} \mathbf{U}_2)] = 0 \quad (21)$$

ここで, $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ である. 上式より, wrinkle 方向の角度 (wrinkle angle) θ_w を求めることができる. 次に, 歪エネルギー密度を考えると,

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{C} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{C} \mathbf{U}^1} (\mathbf{C} \mathbf{U}^1) \otimes (\mathbf{C} \mathbf{U}^1) \end{aligned} \quad (22)$$

となり, 上式のように剛性を修正することで wrinkle を表現できる.

2.6. 圧縮剛性低減型異方性膜モデル

Roddeeman モデルでは圧縮応力を 0 としていたが、現実を考えれば圧縮応力は 0 ではない。そこで、圧縮剛性低減型膜モデルでは、剛性低減係数を用いて圧縮剛性を小さくする。つまり、一軸問題を以下のように規定する^[2]。

$$\mathbf{U}^1 \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \eta_h \mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{U}^3 \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \eta_h \mathbf{U}^3 \cdot \mathbf{S} \quad (23)$$

ここで、 η_h は応力低減係数である。上式のように規定することで、修正された弾性マトリクスは次式となる

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \frac{1 - \eta_h^2}{\mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{C} \mathbf{U}^1} (\mathbf{C} \mathbf{U}^1) \otimes (\mathbf{C} \mathbf{U}^1) \quad (24)$$

膜の状態判断は主応力の値を考えることで行う。膜の主応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \frac{P - Q}{2}, \quad \tau^2 = \frac{P + Q}{2} \\ P &= S^{11} G_{11} + S^{22} G_{22} + 2 S^{12} G_{12}, \quad Q = \sqrt{P^2 - SG} \\ S &= S^{11} S^{22} - S^{12} S^{12}, \quad G = G_{11} G_{22} - G_{12} G_{12} \end{aligned} \quad (25)$$

膜の状態が taut(引張)となるのは、以下の条件である。

$$\tau^1 > 0 \quad (26)$$

この条件が満たされない場合、膜の状態は wrinkle(しわより)となり、剛性を式(24)のように修正する。さらに、修正された主応力において次式が満たされる場合、膜の状態は slack(たるみ)となる。

$$\tilde{\tau}^2 < 0 \quad (27)$$

膜の状態が slack の時は、式(21)を用いて、slack angle θ_s を求め、 θ_s 方向の剛性を修正する。

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1 - \eta_b^2}{\mathbf{V}^1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V}^1} (\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V}^1) \otimes (\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V}^1), \quad \mathbf{V}^1 = \mathbf{U}^1(\theta_s) \quad (28)$$

以上をまとめると、圧縮剛性低減型異方性膜要素において、構成則および歪エネルギー密度 π は次式で表せる^{[2][6]}。

$$\begin{cases} \text{taut} & \mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} & \pi = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \mathbf{E} \\ \text{wrinkle} & \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E} & \tilde{\pi} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{E} \\ \text{slack} & \tilde{\mathbf{S}}_s = \tilde{\mathbf{C}}_s \mathbf{E} & \tilde{\pi}_s = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_s \mathbf{E} \end{cases} \quad (29)$$

2.7. 圧縮剛性低減型異方性膜要素の等価節点力

歪エネルギー密度を未知数で微分することで、等価節点力を求めることができる。ここでは、EMM を適用し等価節点力を導く。歪エネルギー密度の増分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \mathbf{S}^{*T} \Delta \mathbf{E} + \Phi \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (3\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}_o) \mathbf{E} + \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{C}} + 3\tilde{\mathbf{C}}_o) \mathbf{E}_o \right]^T \Delta \mathbf{E} \\ &\quad + \frac{\Delta \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{E}}}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

よって、等価節点力は次式で求まる。

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T = \int_B \left[\mathbf{S}^{*T} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^m} + \frac{\Phi}{\Delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}^m} \right]^T dV \quad (31)$$

ここで、 ψ は膜の状態によって以下のように定める。

case1:(taut-taut)

$$\Phi = 0$$

case2:(taut-wrinkle), (taut-slack), (wrinkle-wrinkle)

$$\psi_1 = \tau^1 \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{\partial \tau^1}{\partial \mathbf{x}^m} \quad (32)$$

case3:(wrinkle-slack) or (slack-slack)

$$\psi_2 = \tilde{\tau}^2 \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{\partial \tilde{\tau}^2}{\partial \mathbf{x}^m}$$

また、主応力の離散微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}^m} - \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}^m} \right], \quad \frac{\partial \tilde{\tau}^2}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \mathbf{x}^m} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \mathbf{x}^m} \right] \quad (33)$$

また、主応力の各項の離散微分は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}^m} &= G_{11} \frac{\partial S^{11}}{\partial \mathbf{x}^m} + G_{22} \frac{\partial S^{22}}{\partial \mathbf{x}^m} + 2G_{12} \frac{\partial S^{12}}{\partial \mathbf{x}^m} \\ \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}^m} &= \frac{\tilde{P}}{Q} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}^m} - \frac{2G}{Q} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}^m} \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}^m} &= \tilde{S}^{22} \frac{\partial S^{11}}{\partial \mathbf{x}^m} + \tilde{S}^{11} \frac{\partial S^{22}}{\partial \mathbf{x}^m} - 2\tilde{S}^{12} \frac{\partial S^{12}}{\partial \mathbf{x}^m} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、修正された応力を離散する場合、次式となる。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{x}^m} = \tilde{\mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^m} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{x}^m} \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^m} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}}{\partial \theta_w} \frac{\partial \theta_w}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^m} \mathbf{E} \quad (35)$$

上式の離散微分において、 θ_w を $\mathbf{E}$ で離散微分する項が表れているが、この項は、式(21)の増分を考えることで求まる。

3. 数値計算

本章では、節で示した要素モデルをもとに数値計算例を示す。今回計算する膜のモデルを Figure 1 に示す。

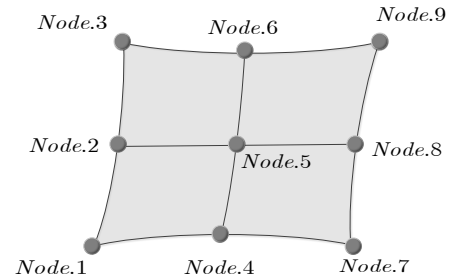


Figure 1 Calculation model

Figure 1 を見ての通り、計算モデルは 9 節点 4 要素の正方形膜であり簡易的なモデルとなっている。また、計算を行う際の時間ステップ幅、物性値などを以下の Table 1 に示す。

Table 1 Analysis condition

時間ステップ幅 Δt	1.0×10^{-5}	[s]
角速度 ω (Node.5)	2π	[rad/s]
ヤング率 E_x	6.0×10^9	[Pa]
ヤング率 E_y	3.0×10^9	[Pa]
ポアソン比 ν_x	0.6	[-]
ポアソン比 ν_y	0.3	[-]
密度 ρ	1.25×10^3	[kg/m ³]
厚さ h	1.25×10^{-5}	[m]
要素 1 辺の長さ	1	[m]

ただし、ポアソン比は、異方性の影響を見るために、あえて大きな値を取っている。さらに、位置の初期条件として、すべての節点の位置ベクトルの値を 1.0001 倍し変位を与え、Node5 を中心とした回転運動と伸縮による並進運動の計算を行う。また、異方性膜の計算結果が妥当かどうかを判断するために、等方性膜モデルと計算結果を比較する。等方性膜の物性値はヤング率を 3GPa、ポアソン比を 0.3 としている。まず、全エネルギーと運動エネルギーについて比較する。

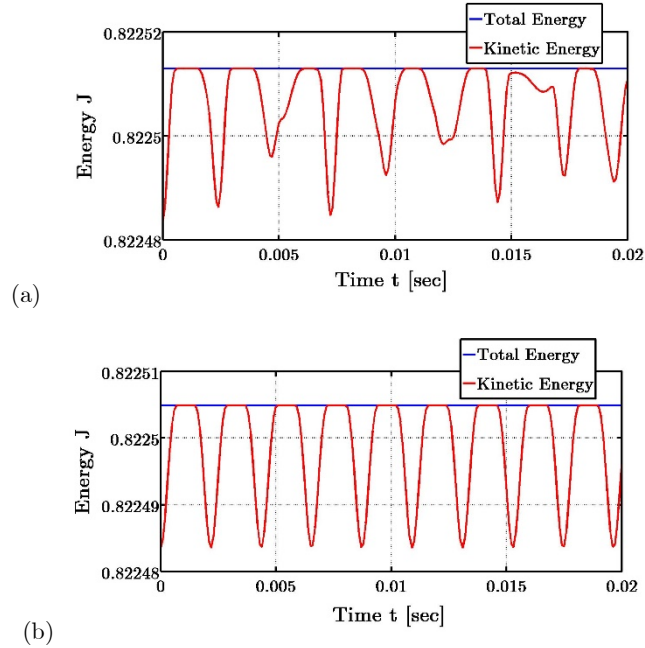


Figure 2 Total Energy and Kinetic Energy
(a: anisotropic membrane, b: isotropic membrane)

次に歪エネルギーを比較する。

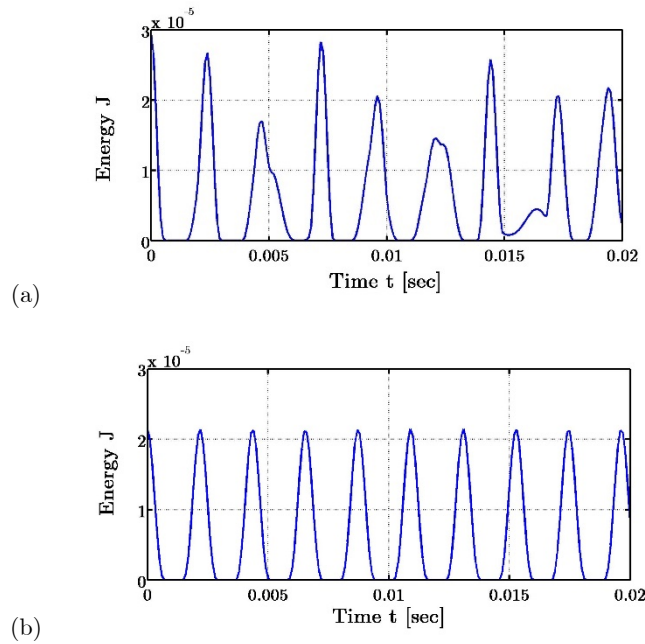


Figure 3 Strain Energy
(a: anisotropic membrane, b: isotropic membrane)

異方性膜と等方性膜で運動エネルギーおよび歪エネルギー変化の様子が異なる結果となった。エネルギー変化を考えれば、異方性膜の方が複雑な運動となっていると考えられる。

考察

Figure 2 を見ると、異方性膜の運動エネルギーは等方性膜の運動エネルギーと比べて値の変化が複雑であり、等方性膜のような規則性がない。また、Figure 3 に示した歪エネルギーの変化にも同様のことが言える。異方性膜の場合、ヤング率が x 方向に 6GPa、y 方向に 3GPa であるため、膜を x 方向、y 方向に均等に引っ張ったとしても弾性力は x 方向と y 方向とで大きく異なり、伸縮のタイミングが x 方向 y 方向で一致しない。そのため、異方性膜は wrinkle 状態になりやすいと考えられ、0.02sec までの計算で、taut, wrinkle, slack すべての状態が表れたのだと考えられる。一方、等方性膜の場合、膜を x 方向 y 方向ともに均等に引っ張ると、x 方向と y 方向の力は一致する。そのため、taut, slack を繰り返す結果になったと考えられる。

また、Figure 2 を見ると、膜の状態変化が相似する際も全エネルギーが保存されている。EMM による等価節点力の定式化を行う際、状態変化を考慮するために ψ を適当に選定する必要があったが、Figure 2 の計算結果より、式(32)の選定方法が適切であったと言える。以上より、EMM による、圧縮剛性低減型異方性膜の等価節点力の定式化が正しく行われたことが示された。

4. 結論

本研究の結論を以下にまとめる。

- ・圧縮剛性低減型異方性膜に EMM を適用した。
- ・異方性膜の場合は、異方性の影響により、等方性膜に比べ wrinkle 状態になりやすい。
- ・状態変化の際もエネルギーが保存されることが確認でき、 ψ の値には主応力を選定することが適切であることが分かった。
- ・圧縮剛性低減型異方性膜の計算例を示すことで、非線形性が高い運動の計算に EMM が有効であることを再度提案することができた。

参考文献

- [1] Roddeman DG, Drukker J, Oomens CWJ, Janssen JD. The wrinkling of thin membranes Part 1: theory. Journal of Applied Mechanics 1987; 54(4), 884-887.
- [2] Miyazaki Y. Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane, International Journal for Numerical Methods in Engineering 2006; 66:1179-1209
- [3] J. Simo, N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Springer Verlag, 1992, 43 (5), pp.757-792.
- [4] Miyazaki Y, A Formulation of Geometrical Constraint in Energy Momentum Method, Theoretical and Applied Mechanics Japan 52 2003; 211-221
- [5] Miyazaki Y, Kodama Y, Formulation and interpretation of the Equation of Motion on the Basis of Energy Momentum Method, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K Journal of Multi-body Dynamics 2004; 218(1):1-7
- [6] 宮崎康行, ゴッサマーマルチボディダイナミクスの基礎