

# 様々な梁モデルに対するオイラー座屈荷重の定式化

## Formulation of Euler Buckling Load for Various Beam Models

指導教授 宮崎康行

M0010 亀村裕之

### 1. はじめに

古くから梁の座屈に関する研究は数多く行われてきた。本研究では、従来、梁理論と二次元弾性論で考えられてきた様々な座屈解を整理した。また、新たに高次の梁理論ならびに三次元弾性論による座屈荷重の理論解を求めた。そして、従来の解との関係をまとめた。

### 2. 伸縮・せん断力を考慮した座屈荷重

Timoshenko<sup>[1]</sup>はせん断を考慮した 2 種類の座屈荷重を提案している。これらの違いは構成則を定義する軸力・せん断力の方向、ならびに、軸歪・せん断歪の定義にある。曲げ剛性  $EI$ 、長さ  $l$  の両端単純支持梁に軸圧縮荷重  $P$ 、軸歪を  $\varepsilon$ 、せん断歪を  $\gamma$ 、軸力を  $T$ 、せん断力を  $N$ 、ヤング率を  $E$ 、横弾性係数を  $G$ 、断面積を  $A$ 、せん断修正係数を  $k$ 、断面の傾斜角を  $\theta$ 、曲げモーメントを  $M$  とすれば、

$$T \equiv EA\varepsilon, \quad N \equiv kGA\gamma, \quad M \equiv EI\theta' \quad (1)$$

という構成則を用いるのは同じであるが、 $\varepsilon$ 、 $\gamma$ 、 $T$  の定義がそれぞれ異なる。そこで、以下では、歪エネルギーの存在性を仮定することで、 $T$  や  $N$  の定義に対応した座屈荷重を求める。

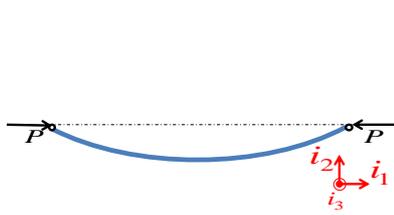
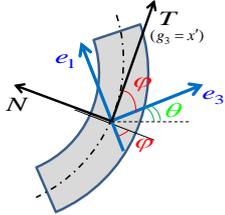


Fig. 1 梁のせん断変形

Fig. 2 梁と断面力

まず、Fig. 1 のように、せん断角度（中心線の接線方向、すなわち、 $\mathbf{x}'$  と断面の垂線との成す角度）を  $\varphi$  とし、局所基底は断面にそって定義する。すなわち、 $\mathbf{e}_3$  は断面に垂直で、 $\mathbf{e}_1$  は断面に沿った方向とする。

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

このとき、 $\mathbf{x}'$  は次のように書ける。

$$\mathbf{x}' = (1 + \varepsilon_t)(\cos\varphi\mathbf{e}_3 + \sin\varphi\mathbf{e}_1) \equiv (1 + \varepsilon_t)\mathbf{t} \quad (3)$$

ただし、 $\varepsilon_t$  は中心線の伸び歪である。断面力は Fig. 2 から、

$$\mathbf{P} = -P\mathbf{i}_1 \quad (4)$$

であるが、これを軸力とせん断力を方向別に場合分けし分解する。これによって、回転の釣り合い方程式

$$\mathbf{M}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = M\mathbf{i}_3 \quad (5)$$

の表現が異なったものとなる。例えば、

$$\mathbf{n} \equiv -\sin\varphi\mathbf{e}_3 + \cos\varphi\mathbf{e}_1 \quad (6)$$

として、 $\mathbf{P}$  を次の 3 通りに分解することが考えられる。

$$\text{Timoshenko の断面力: } \mathbf{P} = T\mathbf{t} + N\mathbf{n} \quad (7)$$

$$\text{Engesser の断面力: } \mathbf{P} = T\mathbf{t} + N\mathbf{e}_1 \quad (8)$$

$$\text{Haringx の断面力: } \mathbf{P} = T\mathbf{e}_3 + N\mathbf{e}_1 \quad (9)$$

ここで、仮想仕事を考えると、

$$-\int_0^l [\mathbf{P}' \cdot \delta\mathbf{x} + (\mathbf{M}' + \mathbf{x}' \times \mathbf{P}) \cdot \delta\theta\mathbf{i}_3] ds \\ = \int_0^l [\mathbf{P} \cdot (\delta\mathbf{x}' - \delta\theta\mathbf{i}_2 \times \mathbf{x}') + M\delta\theta'] ds \quad (10)$$

となるので、線形対角な構成則を仮定した場合、

$$\mathbf{P} \cdot (\delta\mathbf{x}' - \delta\theta\mathbf{i}_2 \times \mathbf{x}') + M\delta\theta' = T\delta\varepsilon + N\delta\gamma + M\delta\kappa \quad (11)$$

を満たす伸び歪  $\varepsilon$ 、せん断歪  $\gamma$ 、曲率  $\kappa$  を定義できれば、歪エネルギーの存在性を示すことができる。実際、この場合、歪エネルギーは

$$\pi = \frac{1}{2}T\varepsilon + \frac{1}{2}N\gamma + \frac{1}{2}M\kappa \quad (12)$$

と定義できる。上式により、まず、曲率は

$$\kappa = \theta' \quad (13)$$

と定義すればよいことがわかり、これは幾何学的にも妥当である。 $\varepsilon$  と  $\gamma$  については  $\mathbf{P}$  の分解方法(7)~(8)に応じて決定される。なお、詳細は省略するが、式(7)の場合には式(11)を満たす  $\varepsilon$  と  $\gamma$  は存在しないことがわかり、その代わりに、軸力を  $\mathbf{t}$  方向、せん断力を  $\mathbf{n}$  方向に分解するには以下の2.3節および2.4節の分解方法があることを証明できる。

以下にこれらの結果、ならびに、対応する座屈荷重を示す。ただし、従来のオイラー座屈荷重を

$$P_o^{cr} = EI\pi^2 / l^2 \quad (14)$$

とし、式(5)を線形化することで、

$$EI\theta'' + Pf(\theta)\theta = 0 \quad (15)$$

と表せたとすると、座屈荷重は

$$P^{cr} = \frac{P_o^{cr}}{f(0)} \quad (16)$$

と書けることを証明できる。

#### 2.1. Haringx の断面力: $\mathbf{P} = T\mathbf{e}_3 + N\mathbf{e}_1$ の場合

$$\mathbf{x}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{e}_3 + \gamma\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{P} = T\mathbf{e}_3 + N\mathbf{e}_1, \quad T = EA\varepsilon, \quad N = kGA\gamma \quad (17)$$

$$P^{cr} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{kGA} - \frac{1}{EA}\right)P_o^{cr}}} P_o^{cr} \quad (18)$$

#### 2.2. Engesser の断面力: $\mathbf{P} = T\mathbf{t} + N\mathbf{e}_1$ の場合

$$\varepsilon = |\mathbf{x}'| - 1, \quad \gamma = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{x}' = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \gamma^2}\mathbf{e}_3 + \gamma\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{P} = T\mathbf{t} + N\mathbf{e}_1, \quad T = EA\varepsilon, \quad N = kGA\gamma \quad (19)$$

座屈荷重は

$$P^{cr} = \frac{1 - P^{cr}/EA - P^{cr}/kGA}{1 - P^{cr}/EA} P_o^{cr} \quad (20)$$

を解くことで求められる。

### 2.3. Timoshenko の断面力(1) : $\mathbf{P} = T\mathbf{t} + \frac{N}{1+\varepsilon}\mathbf{n}$ の場合

$$\mathbf{x}' = (1+\varepsilon)\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\cos\gamma\mathbf{e}_3 + \sin\gamma\mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{P} = T\mathbf{t} + \frac{N}{1+\varepsilon}\mathbf{n}, \quad T = EA\varepsilon, \quad N = kGA\gamma \quad (21)$$

$$P^{cr} = \frac{2}{1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA}\right)\left(1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA} - \frac{4P_o^{cr}}{EA}\right)}} \quad (22)$$

### 2.4. Timoshenko の断面力(2) : $\mathbf{P} = T\mathbf{t} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{1+\varepsilon}N\mathbf{n}$ の場合

$$\mathbf{x}' = (1+\varepsilon)\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\sqrt{1-\gamma^2}\mathbf{e}_3 + \gamma\mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{P} = T\mathbf{t} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{1+\varepsilon}N\mathbf{n}, \quad T = EA\varepsilon, \quad N = kGA\gamma \quad (23)$$

$$P^{cr} = \frac{2}{1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA}\right)\left(1 + \frac{P_o^{cr}}{kGA} - \frac{4P_o^{cr}}{EA}\right)}} \quad (24)$$

### 3. 応力 - 歪関係から導いた梁の座屈荷重

梁理論は、断面は変形せず、かつ、断面内の剛性が無限大であると仮定して  $\sigma^{11}$  や  $\sigma^{22}$ 、 $\sigma^{12}$  といった断面内の応力は 0 であると仮定している。この場合、応力成分 ( $\sigma^{13}, \sigma^{33}$ ) と歪成分 ( $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{33}$ ) との構成則、つまり応力 - 歪関係は

$$\sigma^{13} = kG(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}), \quad \sigma^{33} = E\varepsilon_{33} \quad (25)$$

である。そこで、式(23)から断面力や曲げモーメントを断面内積分により求め、座屈荷重を求める。まず、梁の任意の点の位置ベクトル  $\tilde{\mathbf{x}}$  は次のように書ける。

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + Y^1\mathbf{e}_1 + Y^2\mathbf{i}_2 \quad (26)$$

また、

$$\mathbf{x}' = (1+\varepsilon_t)(\cos\varphi\mathbf{e}_3 + \sin\varphi\mathbf{e}_1) \equiv a\mathbf{e}_3 + b\mathbf{e}_1 \quad (27)$$

とおく。このとき、共変基底ベクトルは

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial Y^1} = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial Y^3} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial s} = \mathbf{x}' - \theta'Y^1\mathbf{e}_3 = (a - \theta'Y^1)\mathbf{e}_3 + b\mathbf{e}_1 \quad (28)$$

であるので、Green-Lagrange 歪成分は

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{1}{2}b$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 1) - a\theta'Y^1 + \theta'^2(Y^1)^2$$

$$\equiv \varepsilon - a\theta'Y^1 + \theta'^2(Y^1)^2 \quad (29)$$

また、Cauchy 応力テンソルは

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (30)$$

であるので、断面の応力ベクトルは

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3$$

$$= (\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{e}_3)(T^{13}\mathbf{g}_1 + T^{33}\mathbf{g}_3)$$

$$= (a - \theta'Y^1)(T^{13}\mathbf{g}_1 + T^{33}\mathbf{g}_3) \quad (31)$$

ここで、変形勾テンソルを  $\mathbf{F}$  とすれば、

$$\mathbf{t} = \det \mathbf{F}(T^{13}\mathbf{g}_1 + T^{33}\mathbf{g}_3) \quad (32)$$

これを、第二 Piola-Kirchhoff 応力成分  $S^{13}$ 、 $S^{33}$  で表すと、

$$\mathbf{t} = S^{13}\mathbf{g}_1 + S^{33}\mathbf{g}_3 \quad (33)$$

そこで、次の構成則を次のように仮定する。

$$S^{13} = kG(E_{13} + E_{31}), \quad S^{33} = EE_{33} \quad (34)$$

式(33)に(28)、(29)、(34)を代入すると、

$$\mathbf{t} = kG\mathbf{b}\mathbf{e}_1 + E(\varepsilon - a\theta'Y^1 + \theta'^2(Y^1)^2)[(a - \theta'Y^1)\mathbf{e}_3 + b\mathbf{e}_1]$$

$$= (kG + E\varepsilon)b\mathbf{e}_1 + E\varepsilon a\mathbf{e}_3 - Y^1E\varepsilon\theta'\mathbf{e}_3 - Y^1Ea^2\theta'\mathbf{e}_3$$

$$- Y^1Eab\theta'\mathbf{e}_1 + 2(Y^1)^2Ea\theta'^2\mathbf{e}_3$$

$$+ (Y^1)^2Eb\theta'^2\mathbf{e}_1 - (Y^1)^3E\theta'^3\mathbf{e}_3 \quad (35)$$

したがって、断面力は、

$$\mathbf{P} = \int_A \mathbf{t} dA$$

$$= (kGA + EA\varepsilon)b\mathbf{e}_1 + EA\varepsilon a\mathbf{e}_3 + 2EIA\theta'^2\mathbf{e}_3 + EIB\theta'^2\mathbf{e}_3 \quad (36)$$

したがって、

$$EA\varepsilon a + 2EIA\theta'^2 + EIB\theta'^2 = -P \cos \theta \quad (37)$$

$$(kGA + EA\varepsilon)b = P \sin \theta \quad (38)$$

また、曲げモーメントは、

$$\mathbf{M} = \int_A (Y^1\mathbf{e}_1 + Y^2\mathbf{e}_2) \times \mathbf{t} dA$$

$$= [EI(\varepsilon + a^2)\theta' + EIAb\theta' + EK\theta'^3]\mathbf{i}_2 \quad (39)$$

となる。ただし、

$$K = \int_A (Y^1)^4 dA \quad (40)$$

そして、

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{P} = (a\mathbf{e}_3 + b\mathbf{e}_1) \times \mathbf{P} = P(a \sin \theta + b \cos \theta)\mathbf{i}_2 \quad (41)$$

よって、モーメントの釣り合い式は

$$EI(\varepsilon + a^2)\theta'' + EIAb\theta'' + 3EK\theta'^2\theta''$$

$$+ P(a \sin \theta + b \cos \theta) = 0 \quad (42)$$

ここで、座屈点付近を考えると、

$$a \approx 1 + \varepsilon_t, \quad b \approx (1 + \varepsilon_t)\varphi, \quad \varepsilon \approx \varepsilon_t,$$

$$\varphi \approx 0, \quad \theta^2 \approx 0 \quad (43)$$

であり、式(37)、(38)より、

$$EA\varepsilon_t(1 + \varepsilon_t) \approx -P$$

$$(kGA + EA\varepsilon_t)(1 + \varepsilon_t)\varphi \approx P\theta \quad (44)$$

また、式(32)より、

$$EI(1 + 3\varepsilon_t)\theta'' + P(1 + \varepsilon_t)(\theta + \varphi) = 0 \quad (45)$$

これに式(44)を代入すると、

$$EI\theta'' + \frac{(1 + \varepsilon_t)^2}{(1 + 3\varepsilon_t)\left[1 + \varepsilon_t - \frac{P}{kGA}\right]}P\theta = 0 \quad (46)$$

よって、座屈荷重は、次式で求められる。

$$\varepsilon_t = -\frac{\beta x^2 - (1 + \alpha + 3\beta)x + 1}{1 - (1 + 3\alpha)x} \quad (47)$$

ただし、

$$\frac{P}{P_o^{cr}} \equiv x, \quad \frac{P_o^{cr}}{kGA} \equiv \alpha, \quad \frac{P_o^{cr}}{EA} \equiv \beta \quad (48)$$

$x$  は次の三次方程式の解であることがわかる。

また、 $\alpha \ll 1$ 、 $\beta \ll 1$  の際には、式(43)より、

$$P_o^{cr} \approx P_o^{cr} \left[ 1 - \frac{2P_o^{cr}}{EA} - \frac{P_o^{cr}}{kGA} \right] \quad (49)$$

これに対し、2節で求めた座屈荷重は全て、

$$P^{cr} \approx P_o^{cr} \left[ 1 + \frac{P_o^{cr}}{EA} - \frac{P_o^{cr}}{kGA} \right] \quad (50)$$

と近似できる。つまり、せん断剛性には同様の感度を持って

いるが、軸剛性については、この3節の方法と逆の感度を持つことがわかる。すなわち、梁理論では、梁が柔らかくなるほど座屈荷重は上がるのに対し、この章では座屈荷重は下がる。

#### 4. 二次元弾性論による解

この節では、厚みが  $h$  の矩形断面の座屈を二次元弾性論で求める。まず、

$$\begin{aligned} s_{11} &= \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \sigma_z + \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xz}, & s_{12} &= \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_z + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tau_{xz} \\ s_{21} &= \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tau_{xz} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x, & s_{22} &= \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_x \end{aligned} \quad (51)$$

として、平衡方程式は

$$\frac{\partial s_{11}}{\partial z} + \frac{\partial s_{21}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s_{12}}{\partial z} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x} = 0 \quad (52)$$

であり、変位-歪関係は

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (53)$$

構成則は、

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (54)$$

そして、境界条件は、

$$z = 0: \quad w = 0, \quad u = 0 \quad (55)$$

$$z = \ell: \quad s_{11} = -\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) p, \quad u = 0 \quad (56)$$

$$\begin{aligned} x = \pm \frac{h}{2}: \quad & \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tau_{xz} + \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \sigma_x = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

これらにより、

$$a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0 \quad (58)$$

ただし

$$f(x) = e^{\frac{n\pi}{\ell} \lambda x} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} a &= C_{11} C_{55} \\ b &= -C_{11} \left[ C_{33} - \frac{p}{(1+W)^2} \right] - C_{55} \left[ C_{55} - \frac{p}{(1+U)^2} \right] \\ &\quad + (C_{13} + C_{55})^2 \end{aligned} \quad (60)$$

$$c = \left[ C_{55} - \frac{p}{(1+U)^2} \right] \left[ C_{33} - \frac{p}{(1+W)^2} \right]$$

また、

$$\begin{aligned} & \left[ C_{13} + C_{11} \lambda_1^2 + \frac{p}{(1+U)^2} \right] c h_1 \\ & \times C_{11} C_{55} \lambda_2 + C_{13} \left[ C_{55} - \frac{p}{(1+U)^2} \right] \frac{1}{\lambda_2} s h_2 \\ & - \left[ C_{13} + C_{11} \lambda_2^2 + \frac{p}{(1+U)^2} \right] c h_2 \\ & \times C_{11} C_{55} \lambda_1 + C_{13} \left[ C_{55} - \frac{p}{(1+U)^2} \right] \frac{1}{\lambda_1} s h_1 = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

の2つの式が得られる。これら式(54)と(57)を連立させて圧

縮応力  $p$  を求めると、座屈荷重が次式で得られる。

$$P_{2D}^{cr} = (1+W)pA \quad (62)$$

ただし、

$$\begin{aligned} (1+U)^2 &= 1 + \frac{2C_{13}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} p \\ (1+W)^2 &= 1 - \frac{2C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} p \end{aligned} \quad (63)$$

オイラー座屈荷重は

$$P_o^{cr} = \frac{E}{3} \left( \frac{n\pi h}{2\ell} \right)^2 A \quad (64)$$

であるから、ポアソン比  $\nu = 0$ 、 $h/\ell \ll 1$  の場合に、

$$\eta \equiv \frac{n\pi h}{2\ell} \quad (65)$$

として、 $\eta$  の4次までの多項式で  $P_{2D}^{cr}$  を展開すると、

$$P_{2D}^{cr} \approx P_o^{cr} \left[ 1 - \frac{2P_o^{cr}}{EA} - \frac{6P_o^{cr}}{5GA} \right] \quad (66)$$

を得る。二次元弾性論では  $k = 5/6$  であるから、

$$P_{2D}^{cr} \approx P_o^{cr} \left[ 1 - \frac{2P_o^{cr}}{EA} - \frac{P_o^{cr}}{kGA} \right] \quad (67)$$

とおける。これは、3節で導いた式(45)と一致する。

なお、 $h/\ell \rightarrow 0$  の場合に、 $\eta$  の2次までで近似すると、

$$P_{2D}^{cr} \approx \frac{C_{33}}{3} \left( \frac{n\pi h}{2\ell} \right)^2 A \left( 1 - \frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{33}} \right) \quad (68)$$

となって、

$$P_{2D}^{cr} \approx P_o^{cr} \times \frac{C_{33}}{E} \left( 1 - \frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{33}} \right) \quad (69)$$

となる。つまり、せん断剛性  $C_{55}$  に何ら影響を受けない。そして、一般に、直交異方性板の場合、式(70)が成り立つ。つまり、Euler座屈荷重に一致する。

$$P_{2D}^{cr} \approx P_o^{cr} \quad (70)$$

#### 5. 三次元弾性論による解

円筒座標系を用いると、有限変形理論による平衡方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial r} + \frac{S_{11} - S_{22}}{r} + \frac{\partial S_{21}}{r \partial \theta} + \frac{\partial S_{31}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial r} + \frac{S_{12} + S_{21}}{r} + \frac{\partial S_{22}}{r \partial \theta} + \frac{\partial S_{32}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial S_{13}}{\partial r} + \frac{S_{13}}{r} + \frac{\partial S_{32}}{r \partial \theta} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} & 1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} & \frac{\partial w}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (72)$$

変位-歪関係は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (73)$$

応力-歪関係は

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (74)$$

境界条件は,

$$z = 0, \ell : u = v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (75)$$

$$r = R : \sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \quad (76)$$

である. 4節と同じように導出すると以下ようになる.

$$P_{3D}^{cr} = P_o^{cr} \frac{1 - (\alpha + \beta)C_{33} \frac{p^2 R^2}{4} \rho^*}{\left(1 - \alpha C_{33} \frac{p^2 R^2}{4} \rho^*\right)^2} \frac{C_{33}}{E} \rho^* \quad (77)$$

なお,  $R/\ell \rightarrow 0$  の際には,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow P_o^{cr} \times \frac{C_{33}}{E} \rho^*, \quad \rho^* = \frac{w_2}{w_1} \quad (78)$$

$$w_1 = \frac{2}{1 - \frac{C_{12}}{C_{11}}} - 1 + \left(\frac{C_{13}}{C_{55}}\right)^2$$

$$w_2 = \frac{2}{1 - \frac{C_{12}}{C_{11}}} \left[1 - \frac{C_{13}}{C_{33}} b + \frac{C_{13}^2}{C_{11} C_{33}}\right] - \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{55}}\right)$$

の以上が導出できる. この時, 直交異方性材料の場合,

$$C_{11} = \frac{E_o}{1 - \nu_o - 2\nu_o\nu} \frac{1 - \nu_o\nu}{1 + \nu_o}, \quad C_{55} = G \quad (79)$$

$$C_{12} = \frac{E_o}{1 - \nu_o - 2\nu_o\nu} \frac{\nu_o(1 + \nu)}{1 + \nu_o}$$

$$C_{13} = \frac{\nu E_o}{1 - \nu_o - 2\nu_o\nu}, \quad C_{33} = \frac{E(1 - \nu_o)}{1 - \nu_o - 2\nu_o\nu}$$

とおけるので, これを式(74)に代入すると,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow P_o^{cr} \frac{1 + \frac{\nu_o}{1 - \nu_o - 2\nu_o\nu} \frac{E}{G}}{1 + \frac{\nu_o^2}{(1 + \nu_o)(1 - \nu_o - 2\nu_o\nu)} \left(\frac{E}{G}\right)^2} \quad (80)$$

を得る. したがって, ポアソン比  $\nu_o = 0$  であれば,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow P_o^{cr} \quad (81)$$

となって, オイラー座屈荷重と一致する. また, そうでなくても, 断面のせん断剛性  $C_{55} = G$  が無限大なら,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow P_o^{cr} \quad (82)$$

となって, オイラー座屈荷重と一致するが, 逆に, せん断剛性が0に向かうと,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow 0 \quad (83)$$

等方性であれば,  $\nu_o = \nu$ ,  $G = E/2(1 + \nu)$  とおけるので,

$$P_{3D}^{cr} \rightarrow \frac{1}{1 - 2\nu(1 - 2\nu)} P_o^{cr} \quad (84)$$

一般に,  $\nu < 0.5$  であるから, 等方性の場合には, Euler 座屈荷重よりも大きくなるのがわかる.

また,  $R/\ell \rightarrow 0$  で  $\nu = \nu_o = 0$  の場合に, 座屈荷重は  $E_o$  に

は依存せず,

$$P_{3D}^{cr} / P_o^{cr} = 1 - 2 \frac{P_o^{cr}}{EA} - \frac{7P_o^{cr}}{6GA} \quad (85)$$

を得る. 三次元弾性論で得られるせん断修正係数は  $k = 6/7$  であるから,

$$\frac{P_{3D}^{cr}}{P_o^{cr}} \approx 1 - \frac{2P_o^{cr}}{EA} - \frac{P_o^{cr}}{kGA} \quad (86)$$

を得る. この結果は高次梁理論の式(45)と一致する.

## 6. 梁理論と二次元弾性論との座屈解の比較

$E_o/E = 1$ ,  $\nu = 0.3$  として, 二次元弾性論と高次梁理論とを比較したのが Fig. 3 である. 高次梁理論は矩形断面に対しては十分な精度を持っている.

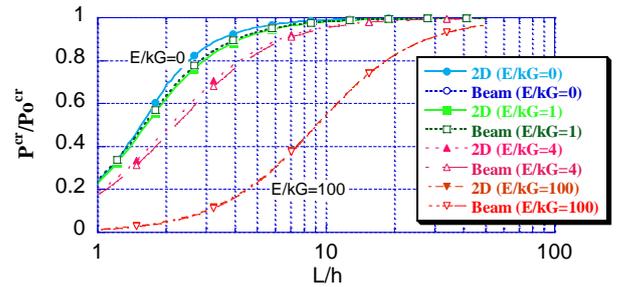


Fig. 3 二次元弾性論と高次梁理論との比較 (矩形断面)

## 7. 梁理論と三次元弾性論との座屈解の比較

$\nu = 0$ ,  $E_o/E = 1$  のとき三次元弾性論と高次梁理論とを比較したのが Fig. 4 である. この図から, 両者には若干の差異があることがわかる. 特に,  $E/kG$  が小さいうちは, 高次梁理論の方が座屈荷重は小さくなり,  $E/kG$  が大きくなると, 逆に, 三次元弾性論の方が座屈荷重は小さくなる.

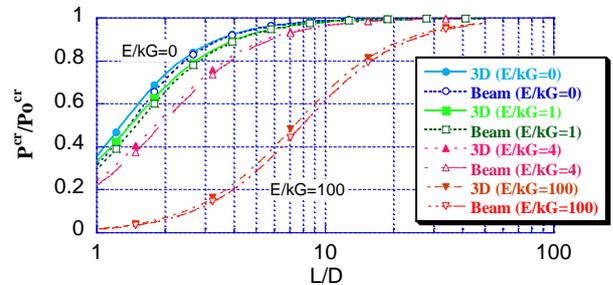


Fig. 4 三次元弾性論と高次梁理論との比較 (円断面)

## 8. おわりに

本研究では高次梁理論および三次元弾性論による座屈解を導いた. そして, 梁理論および二次元弾性論による解も合わせて, 軸剛性, せん断剛性, ポアソン比, 細長比などが座屈荷重に与える影響, ならびに, それぞれの解の特徴を明らかにした.

## 9. 参考文献

- [1] Stephen D. Timoshenko and James M. Gere [1961] Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill (2nd edition), 132-135, New York.
- [2] 近藤恭平 [2009] 伸張剪断エラスティカの座屈 (Timoshenkoの方法). 第51回構造強度に関する講演会講演集, 2A04, 118-120.
- [3] 小林繁夫, 近藤恭平 [1987] 弾性力学. 培風館. 280-282.