

薄膜構造物におけるしわ分布の予測手法

Prediction Methods of Wrinkling in Thin Membrane

指導教授 宮崎康行

M9005 井上祥子

1. 序論

1.1. 背景

膜面を用いた宇宙構造物（ゴッサマー構造物）の設計・開発が活発に議論されてきているが、膜面などの柔軟構造物は小さな圧縮応力で簡単に面外座屈を起こし、しわ・たるみが発生してしまう。しわ・たるみは、膜面宇宙構造物（サンシールド、大型アンテナ、ソーラーセイル、太陽発電衛星など）の性能に大きな影響を与える可能性があり、膜面のどの領域に、どの程度の大きさのしわ・たるみが発生するのかを予測することが重要となる。

従来、膜面に発生したしわの形状を知るためにはシェル要素を用いて分岐解析や疑似分岐解析を行い、座屈後の形状を求める方法が提案されてきた^{[1][2][3]}。しかし、シェル要素を用いるこの方法は計算コストが膨大な上に、メッシュ分割数を十分に細かくしないと精度のよい計算結果が得られないといった問題がある。さらに、計算コストの点からシェル要素を用いて動解析を行うことは非現実的である。

そこで、張力場理論に基づき曲げを無視し平面応力場を仮定した膜要素を用いて、変形・運動予測がよく行われている。しかし、この膜要素を用いた解析では、膜面にしわが発生した場合のその高さなどの詳細な形状を得ることはできない。さらに、張力場理論では、しわの発生する方向の剛性をゼロとするが、しわが発生している領域においても膜面には圧縮応力が発生しており、張力場の仮定が成り立たないことが指摘されている^[4]。

1.2. 過去の研究

この点を考慮し、膜要素で解析する際にしわの発生する方向の剛性をゼロではない小さな圧縮剛性を持たせることにより、しわの発生する領域・強さを表現できる手法が提案されてきた^{[5][6]}。また、動解析の例として膜面の展開シミュレーションを行い、圧縮剛性を持たせていない場合には過度に縮んでしまうが、例えば 1/10000 の圧縮剛性を持たせることで実際の展開の様子と同様に縮むことのない展開形状を得ることができる^[5]。

この圧縮剛性を考慮したモデルは、Stiffness Reduction Model(SRM)と呼んでおり、しわ方向の圧縮剛性を引張方向の剛性に対して α 倍したものを与えていた。この係数 α を圧縮剛性率と呼んでおり、この方法では一定で、その決め方も実際にいくつか計算し適切な値を探す、という方法でありこの決定方法が課題として挙げられていた^[6]。また、SRM では圧縮歪に比例して大きな圧縮応力

が発生するモデルであるためたるみ領域を正確に表現できなかった。この問題を解決するために、ある一定の圧縮応力以上には膜面は耐えられないという Maximum Compressive Stress Model (MCSM)が考案された。

しかしこのモデルでは適当な臨界圧縮歪の値を実際にいくつか計算して試し、良い値を探す必要があった。更に、たるみ部分の固定端近くに大きな圧縮応力が発生してしまっており、膜面中央部の圧縮応力の分布も広がりが少なかった。実際は、座屈後も歪が大きくなれば圧縮剛性は大きくなるはずだが、このモデルではどれだけの歪に対しても圧縮剛性係数が一定の値を取るという方法である為である。

2. 目的

本研究では「薄膜構造物に発生するしわ分布を表現可能な膜要素による数値解析手法を提案すること」を目的とし、過去の研究より得られた膜要素による解析の課題点を以下の様に改善する。

- 過去の研究で得られた実験結果とシェル要素による計算結果を比較して、膜要素と比較するためのシェル要素の計算結果の考察を行う。
- 膜要素による計算について、SRM や MCSM の課題点を解決する新たなモデル化手法を提案し、主応力の分布や大きさについてシェル要素を用いて得られる解析結果と比較して評価を行う。

3. 膜要素のモデル化理論

3.1. 膜要素

ここでは、膜要素のモデル化の理論について述べる。始めに、張力場理論を修正しゼロでない微小な圧縮剛性を持たせることでしわの分布を表現する SRM を紹介する。次に、SRM を修正してたるみ部分の圧縮応力を臨界の応力以上耐えることはできないとした、最大圧縮応力モデルについて記す。最後に、SRM に要素の軸歪も考慮したエラスティカモデルを適用した Mod-SRM を提案する。これを用いると、圧縮剛性率 α を歪 ε の関数として表わすことができる。図 1 に各計算モデルの違いを示す。

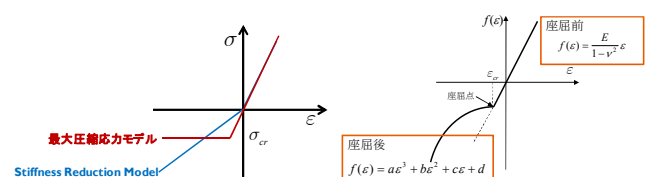


図 1 各計算モデルの違い

3.1.1. Stiffness Reduction Model (SRM)

このモデルは、従来の張力場を仮定したモデルとは異なり、しわが発生した場合にその方向の剛性をゼロではなく小さな正の値としている。引張方向の剛性に対して圧縮方向の剛性をどれくらい持たせるのかを決定する値が、圧縮剛性率 α である。要素の応力状態に応じて、次のように剛性マトリクスを修正する。

$$\text{taut: } \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{wrinkle: } \tilde{\mathbf{F}} = \frac{E}{1-\alpha_0\nu^2} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0\nu \\ \alpha_0\nu & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{slack: } \tilde{\mathbf{F}} = \frac{E}{1-\alpha_0\alpha_1\nu^2} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0\alpha_1\nu \\ \alpha_0\alpha_1\nu & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{F}}$:修正された剛性マトリクス、 E :ヤング率、 ν :ポアソン比、 $\alpha_{0,1}$:各主応力方向の圧縮剛性率である。

また、膜要素を用いた解析ではその変形形状を観察しているだけでは、しわの分布を知ることはできないので、Wrinkle Intensity λ という無次元量を導入する。式(4)において、 γ は主歪、 $\tilde{\pi}(\alpha_i)$ は修正された剛性マトリクスで計算した歪エネルギー、 $\pi(l)$ は得られた変形形状において圧縮剛性率を 1 とした時の歪エネルギー、 $\pi_{\max}$ は膜面全体における歪エネルギーの最大値を表している。つまり、 λ はしわの発生により解放された歪エネルギーを表しており、 λ が大きい値をとることは圧縮歪が大きく、しわが強く発生していることを示唆し、しわの高さが大きいということに対応すると考えることができる。

$$\lambda \equiv \frac{\pi(l) - \tilde{\pi}(\alpha_i)}{\pi_{\max}} = \frac{\frac{1}{2} \gamma \cdot (\mathbf{F}_0 - \tilde{\mathbf{F}}) \gamma}{\pi_{\max}} \quad (4)$$

3.1.2. Maximum Compressive Stress Model(MCSM)

このモデルは、ある一定の圧縮応力以上には膜面は耐えることができない、という計算モデルである。この最大圧縮応力モデルでは、ある最大圧縮歪 ε_{cr} を与え、主応力が

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_0 + \nu\gamma_1) < E\varepsilon_{cr} \quad (5)$$

を満たすなら、wrinkle 状態とし、それ以降は主応力を、

$$\begin{cases} \sigma_0 = E\varepsilon_{cr} \\ \sigma_1 = E(\gamma_1 + \nu\varepsilon_{cr}) \end{cases} \quad (6)$$

で一定とする。 σ_1 についても同様である。

3.1.3. Modified Stiffness Reduction Model (Mod-SRM)

このモデルが、本研究で提案する新しい計算モデルである。このモデルは SRM に伸びるエラスティカ問題を導入し、圧縮剛性率を歪の関数で表わし、膜面モデルの厚みと要素長を与えるだけで圧縮剛性率が一意に決定できるモデルである。

次のように平衡方程式を立てる。図 2 に各パラメータ及び ε を定義する。

$$EI\theta'' + \left(1 - \frac{P \cos \theta}{EA}\right) P \sin \theta = 0 \quad (7)$$

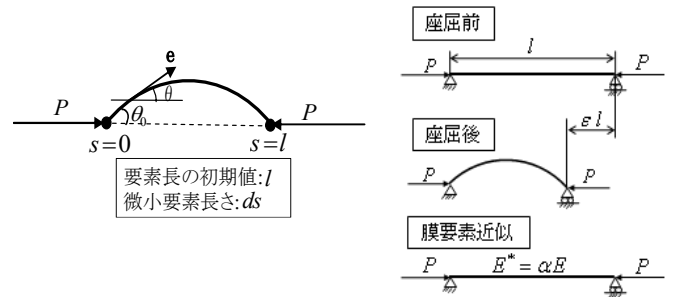


図 2 計算モデルのパラメータ (左), ε の定義 (右)

これを積分すると次の式が得られる。

$$(\theta')^2 = \frac{2P}{EI} (C_\theta - C_0) \left[1 - \frac{P}{EA} \frac{C_\theta + C_0}{2} \right] \quad (8)$$

但し、次の様な置換を行った。

$$\begin{aligned} C_0 &= \cos \theta_0 \\ C_\theta &= \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、次のようにパラメータを設定する。

$$\eta \equiv \frac{P}{\left(\frac{EI\pi^2}{l^2} \right)}, \quad \kappa \equiv \frac{EI\pi^2}{EAl^2} \quad (10)$$

これを用いて式(8)を解くことで以下の式が得られる。

$$\eta = \frac{2}{\pi^2} \left[\int_0^\pi g(t) dt \right]^2 \quad (11)$$

但し、以下のような変数変換を施している。

$$C_\theta = \frac{1+C_0}{2} + \frac{1-C_0}{2} C_t \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta : \theta_0 &\rightarrow 0 \\ t : \pi &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{(1+C_\theta) \left(1 - \kappa \eta \frac{C_\theta + C_0}{2} \right)}} \quad (14)$$

κ は伸び縮みを与えるパラメータである。伸び縮みを考えないなら、 $\kappa = 0$ である。これより以下のように ε を求めることができる。

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \left(1 - \frac{P \cos \theta}{EA}\right) \cos \theta \\ &= (1 - \kappa \eta C_\theta) C_\theta \\ \varepsilon &= 1 - \frac{\int_0^\pi (1 - \kappa \eta C_\theta) C_\theta g(t) dt}{\int_0^\pi g(t) dt}\end{aligned}\quad (15)$$

$\kappa \neq 0$ のとき、 η が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\kappa \eta^2 - \eta + 1 &= 0 \\ \therefore \eta &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\kappa}}{2\kappa} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\kappa}}\end{aligned}\quad (16)$$

これを式(14)に再代入する事で式(11)は θ_0 を未知数とする非線形方程式となる。これを解いて θ_0 を求めることで、式(15)から ε を得ることができる。

一方、座屈後荷重は次のように書くことができる。

$$P = \frac{EI\pi^2}{l^2} \eta = E^* A \varepsilon \quad (17)$$

$$\begin{aligned}P &= EA \kappa \eta \\ \Rightarrow E^* A \varepsilon &= EA \kappa \eta\end{aligned}\quad (18)$$

圧縮剛性率は以下のように書くことができる。

$$\alpha = \frac{E^*}{E} = \frac{\kappa \eta}{\varepsilon} \quad (19)$$

導出された ε から式(19)を解くことができ、 α を得られる。

wrinkle が発生していないときには、次の式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

但し、 ε は次のように定義している。

$$\varepsilon \equiv \gamma_1 + \nu \gamma_2 \quad (21)$$

これを用いると歪エネルギーは次のように書くことができる。

$$\pi = \pi_{taut} \equiv \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E \gamma_2^2 \quad (22)$$

これに対し、wrinkle が発生している時は次のように書く。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \alpha \nu^2} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \nu \\ \alpha \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

この式は以下のように書くことができる。

$$\sigma_1 = \frac{E\alpha}{1 - \alpha \nu^2} \varepsilon \equiv Ef(\varepsilon) \quad (24)$$

いま、上述のエラスティカ近似を用いて次のように $f(\varepsilon)$ を記す。

$$f(\varepsilon) \approx a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d \quad (25)$$

式(19)から求めた α を式(24)に代入して、 ε の値を与え、式(24)の中央辺の項を求めると $\varepsilon - f(\varepsilon)$ グラフが得られ、これに 3 次曲線をカーブフィットさせて式(25)の 4 つの係数 a, b, c, d を求める。

次に wrinkle が発生する時の η を求める。次の式を満たす時に wrinkle が発生する。

$$Ef(\varepsilon) = E[a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d] = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon \quad (26)$$

wrinkle が起っているときの歪エネルギー密度は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta \pi &= \sigma_1 \delta \gamma_1 + \sigma_2 \delta \gamma_2 \\ &= \frac{E\alpha}{1 - \alpha \nu^2} \zeta \delta (\zeta - \nu \gamma_2) + \frac{E}{1 - \alpha \nu^2} (\alpha \nu \gamma_1 + \gamma_2) \delta \gamma_2 \\ &= Ef(\varepsilon) \delta \varepsilon + E \gamma_2 \delta \gamma_2\end{aligned}\quad (27)$$

$$\pi = \pi_{\text{wrinkle}} = EF(\varepsilon) + \frac{1}{2} E \gamma_2^2 \quad (28)$$

$$F(\varepsilon) = E \left[\frac{a}{4} \varepsilon^4 + \frac{b}{3} \varepsilon^3 + \frac{c}{2} \varepsilon^2 + d \varepsilon - C_o \right]$$

となる。ただし、 C_o は積分定数で、 $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ のときに $\pi_{\text{taut}} = \pi_{\text{wrinkle}}$ となるように設定する。

4. 提案する膜面モデルの検証

3.1.3 節で提案した新しいモデルの検証のため、矩形膜に強制せん断を与えた場合の膜の変形について、数値計算および実験を行った。矩形せん断モデルを用いた。以下の図 3 及び表 1 に、膜面形状の外観と、物性値等のモデルパラメータを示す。図 3 に示す様な矩形膜に強制せん断変位を与え、しわ、たるみを発生させる。

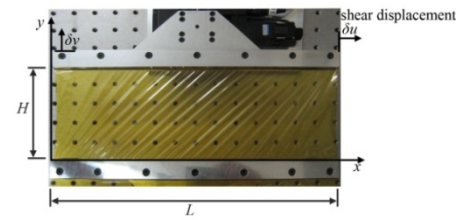


図 3 矩形せん断モデル
表 1 矩形せん断モデルパラメータ

膜幅	L	300 [mm]	変位量(せん断) δu	2 [mm]
膜高さ	H	100 [mm]	変位量(引張) δv	30 [μm]
膜厚	t	12.5 [μm]	ポアソン比 ν	0.3
ヤング率	E	3.0 [GPa]	密度 ρ	1420 [kg/m^3]

5. 数値計算結果

ここでは先ず、過去の研究によって得られた実験結果と、MITC シェル要素による計算結果及び ABAQUS による計算結果を比較し、シェル要素の計算結果を評価する。次にシェル要素の計算結果と膜要素の計算結果を比較し、本研究で提案する Mod-SRM の評価を行う。

5.1. 実験結果とシェル要素による計算結果の比較

図4に実験による計測結果、図5にMITCシェル要素による計算結果とABAQUSによる計算結果を示す。更に、これらの計測及び計算結果について、膜面の中央断面の形状を取りだして比較した結果を図6及び表2に示す。図6より、しわの発生方向や高さの変化において、定性的にはいずれの計算結果も実験と近い結果が得られた。表2より、定量的にはABAQUSでの解析の方が実験結果に近い値となっている。ABAQUSが用いているDKF要素の方がMITCシェル要素よりも薄膜の数値解析には適していると考えられる。

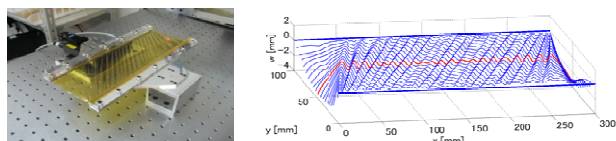


図4 実験による計測結果

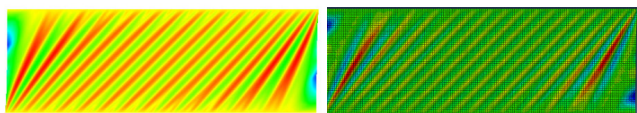


図5 計算結果 MITCシェル要素（左）、ABAQUS（右）

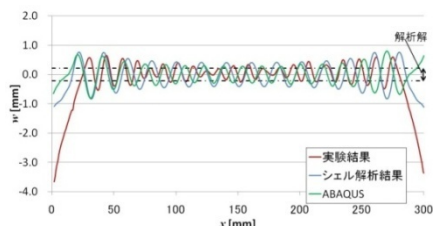


図6 中央断面形状比較

表2 中央断面形状比較

	実験結果	NEDA	ABAQUS
しわの数	21	14	18
しわの高さ(平均値)[mm]	0.3203	0.5327	0.3739
しわの波長(平均値)[mm]	6.1155	9.9535	8.3583

5.2. シェル要素と膜要素の計算結果の比較

計算した主応力分布について、シェル要素と各膜要素の計算結果を比較する。5.1節に示したとおり、シェル要素はABAQUSを用いた結果の方が実験結果と近い値を示したため、ここでは比較にABAQUSの結果を用いている。図7にABAQUSを用いた計算結果、図8にSRMを用いた計算結果、図9にMCSMを用いた計算結果、図10にMod-SRMを用いた計算結果を示す。

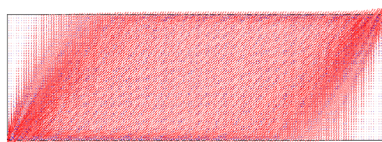


図7 主応力分布（シェル要素）

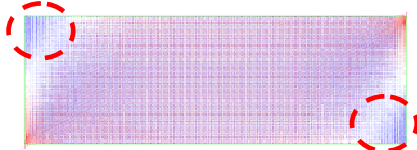


図8 主応力分布（SRM）

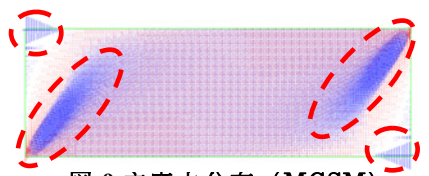


図9 主応力分布（MCSM）

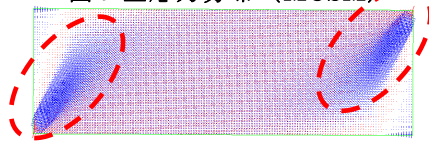


図10 主応力分布（Mod-SRM）

各要素において引張の主応力は赤色、圧縮の主応力は青色のベクトルで表示している。しわ波形は、しわ高さが自由端近傍で大きくなり、膜面中央部では小さくなる傾向がある。主応力分布については右上と左下の自由端端近傍で主応力が大きく、膜面中央に向かうに従って小さくなっていく事がこれに対応すると考えられ、主応力分布図においては色が濃い部分ほど主応力が大きく、淡くなるほど主応力が小さいと考察できる。ABAQUSの計算結果と比較してSRMでは左上と右下のたるみ部に圧縮応力が大きく出ており、MCSMでも同様の部分に圧縮応力が現れている。更に自由端近傍の主応力の大きさが膜面中央部の主応力と比べて大きく出過ぎている。今回提案するMod-SRMではこれらの問題が改善され、しわの領域や特徴がより正確に表現できた。

6. 結論

本研究の結論は以下の通りである。

- シェル要素での解析結果とMod-SRMの解析結果は主応力分布においてこれまでの膜要素モデルと比べてしわの領域・特徴がより正確に表現でき、計算パラメータが膜面モデル形状より一意に決定できるようになった。これにより、より理論的に妥当で精度の高い数値解析が可能となった。
- 本研究で提案したMod-SRMは構造解析に直接適用することが可能であり、今後の大型膜面宇宙構造物の設計・開発に役立てる事ができる。

参考文献

- [1] Wong, Y.W. and Pellegrino, S., "Wrinkled Membranes Part I: Experiments", *Journal of Mechanics and Materials and Structures*, January 2006.
- [2] Wong, Y.W. and Pellegrino, S., "Wrinkled Membranes Part III: Numerical Simulations", *Journal of Mechanics and Materials and Structures*, January 2006.
- [3] Wong, Y.W. and Pellegrino, S., "Computation of Wrinkle Amplitudes in Thin Membrane", *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 22-25 April 2002, Denver, CO, AIAA2002-1369.
- [4] Iwasa, T., Natori, M.C. and Higuchi, K., "Evaluation of Tension Field Theory for Wrinkling Analysis with Respect to the Post-Buckling Study", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.71, 2004, pp.532-540.
- [5] Miyazaki, Y., "Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.66, No.7, May 2006, pp.1179-1209.
- [6] Arita, K. and Miyazaki, Y., "Simplified Model of Membrane for Wrinkle Analysis of Gossamer Structure", *49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 7-10 April 2008, Schaumburg, IL, AIAA2008-2134.
- [7] Shoko, I., "Prediction Methods of Wrinkling in Thin-Membrane", *27th International Symposium on Space Technology and Science*, 5-12 July 2009, Tsukuba, 2009-c-20s