

スターシェードシステムにおける最適なアポダイゼーション関数の導出

Derivation of Optimal Apodization Function in Starshade System.

宮崎・山崎研究室

Miyazaki-Yamazaki Laboratory

和久田 恵那

Ena Wakuda

The starshade system is a direct observation system of exoplanets surrounding a star, which consists of a space telescope and a shield called occulter that has tens of meters in diameter. The occulter is placed between the space telescope and the star to block the light of the star. The starshade system has been researched by NASA. In order to suppress the diffraction of the stellar light, the light transmittance of the occulter must be varied in radial direction if the occulter has circular shape. Such an occulter is called apodized mask, and the transmittance is a function of the radius, which is called apodization function. A small starshade system that demonstrates the technology of starshade in space has been already proposed in our previous study. However, the optimal value of each design parameter which determines the apodization function in this small starshade has not been determined yet. In this paper, the optimal parameters are derived by comparing the contrast when the constraints in the optimization of the apodization function are changed in the small starshade.

1. 序論

1.1. 研究背景

系外惑星観測はこれまでそのほとんどが間接法で行われてきた。しかし、惑星の特徴づけに必要な惑星の表層や大気などの情報を取得するには、惑星を直接観測する必要がある^[1]。系外惑星を直接観測する際に一番の課題となるのは、恒星-惑星間の光の強度比が大きすぎるために惑星の光をとらえることができない点であり、これを解決するシステムがFig. 1に示すスターシェードシステムである^[2]。

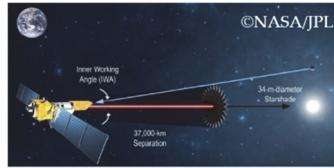


Fig. 1 Starshade system

スターシェードシステムとはオカルタと呼ばれる遮蔽物を恒星と宇宙望遠鏡の間に配置し、これが恒星の光を遮断することで、惑星の直接観測を可能にするシステムである。スターシェードシステムの実現に向け、高い形状精度を有する数十m級のオカルタの構造やその展開手法、望遠鏡とオカルタとの高精度なフォーメーションフライ特などの研究がNASA/JPL等で進められている。

1.2. 小型スターシェード

これまで、スターシェードシステムを用いた系外惑星観測の手法はいくつか提案されている^{[2][3][4]}が、いずれも大規模で厳しい要件のため、高コストでリスクが大きい。よって、デモンストレーションとして小型オカルタで予想通りの性能が発揮されることを実証できれば、大型のスターシェードによる系外惑星観測につながることから、近年研究が進められている。筆者らは、可視光による系外惑星の直接観測を可能にする、直径50m級のオカルタを用いたスターシェードシステムの実現に向け、太陽系外のデブリ円盤を観測する直径10m級の小型オカルタを用いた技術実証を検討している^[5]。

1.3. 研究目的

筆者らの最終目標は、直径50m級のオカルタを用いたスタ

ーシェードシステムを開発し、系外惑星の直接観測を行うことである。その前段階にあたる、小型オカルタでのデモンストレーション実験に向け、小型スターシェードシステムを構成する物理的なパラメータの最適な設定を行う必要がある。本論文では、パラメータである内部作用角 IWA 、観測波長 λ 、オカルタ半径 R 、暗領域半径 ρ_{dark} を基準値から変化させた際の、評価関数であるコントラストの傾向を確認し、最適パラメータから、後述するアポダイゼーション関数の導出を行う。

2. 理論

2.1. コントラスト計算

本研究では各パラメータを変化させた場合の評価関数としてコントラストを用いる。コントラストとは望遠鏡の位置における恒星光と回折光の強度比である。この値が 10^7 以下であれば、デブリ円盤の直接観測が可能であることが先行研究からわかっている^[2]。本研究では、可視光範囲の波長ごとにコントラストを導出するが、もっとも性能が悪い最大コントラストでも目標コントラストを達成するようなパラメータを設定するため、最大コントラストを導出する。光の強度は電場の2乗で表され、光源と観測者の間に遮蔽物がないときの光(恒星光)の電場 E_{null} と、遮蔽物があるときの光(回折光)の電場 E_{occ} からコントラストは(1)式のように表せる。ただし、幾何学的関係はFig.2に示す通りであり、 λ は観測波長、 E_0 はオカルタへの入射波を平面波としたときの振幅である。

$$\text{Contrast}[-] = \frac{|E_{occ}|^2}{|E_{null}|^2} = \left| \frac{E_{occ}}{E_0 e^{2\pi i z / \lambda}} \right|^2 = \left| 1 - \frac{1}{i \lambda z} \iint_S e^{\frac{i\pi}{\lambda z}(r^2 + \rho^2)} e^{-\frac{2\pi i r p \cos(\theta - \phi)}{\lambda z}} r dr d\theta \right|^2 \quad (1)$$

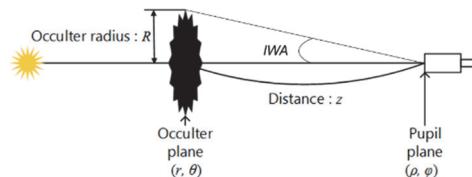


Fig. 2 Schematic of starshade

2.2. アポダイゼーション関数の導出

オカルタ形状が円である場合、光の回折により望遠鏡瞳面で十分なコントラストは得られない。そこで、オカルタ膜の光の透過率を円の中心から縁にかけて減少させる、アポダイズドマスク(Fig.-a)が提案されている^[9]。アポダイズドマスクによる回折光の電場 $E_{o,apod}$ は次式で表される。

$$E_{o,apod}(\rho) = E_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z} \left(1 - \frac{2\pi}{i\lambda z} \int_0^R e^{\frac{\pi i}{\lambda z}(r^2 + \rho^2)} J_0\left(\frac{2\pi r\rho}{\lambda z}\right) A(r) r dr \right) \quad (2)$$

ただし、 R はオカルタの最大半径、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。式(2)において $A(r)$ はアポダイゼーション関数(Fig.-b)と呼ばれ、オカルタ膜の光の透過率を表す($A(r) = 0$ の時は完全透過、 $A(r) = 1$ の時は完全非透過)。望遠鏡瞳面で十分なコントラストを得るために以下の最適化問題^[10]を解くことで、最適な $A(r)$ を求める。

$$\begin{aligned} \min : \gamma \\ \text{sub. to : } & \begin{cases} -\gamma \leq \operatorname{Re}[E_{o,apod}(\rho) / E_0 e^{2\pi iz/\lambda}] \leq \gamma \\ -\gamma \leq \operatorname{Im}[E_{o,apod}(\rho) / E_0 e^{2\pi iz/\lambda}] \leq \gamma \\ \text{for } \rho \in [0, \rho_{dark}], \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \\ A(r) = 1 \quad \text{for } r \in [0, r_{os}] \\ A'(r) \leq 0 \quad \text{for } r \in [0, R] \\ -d \leq A''(r) \leq d \quad \text{for } r \in [0, R] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$E_{o,apod}(\rho) / E_0 e^{2\pi iz/\lambda}$ の絶対値の 2 乗であるコントラストを最小にすることを考え、 $E_{o,apod}(\rho) / E_0 e^{2\pi iz/\lambda}$ の実部と虚部について、抑制レベル γ による制約を設ける。 λ_{\min} , λ_{\max} はそれぞれ最適化の対象とする観測波長の下限、上限であり、 ρ_{dark} は暗領域の半径である。暗領域とは十分なコントラストを達成したい領域であり、暗領域で 10^7 以下のコントラストを得ることを目標とする場合、 $2\gamma^2 \leq 10^7$ であることが望ましい。また、 r_{os} はオカルタ中央の非透過部の遮蔽円の半径、 d は平滑条件の閾値である。

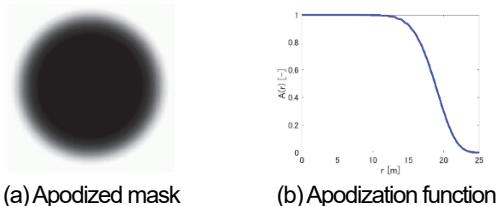


Fig. 3 Apodization

2.3. 各パラメータの範囲設定

スターシェードシステムにおける各パラメータの理論的な範囲の設定を行う。最適化の際には、内部作用角 IWA 、観測波長 λ 、オカルタの最大半径 R 、宇宙機間距離 z 、暗領域半径 ρ_{dark} の値を設定する必要がある。スターシェードシステムの性能は内部作用角 IWA とコントラストに依存し、これはフレネル数 F に依存することが知られている。各パラメータの関係は次式で表される。

$$IWA = \frac{R}{z} \quad F = \frac{R^2}{z\lambda} = IWA \frac{R}{\lambda} \quad (4)$$

先行研究^[11]から、デブリ円盤観測を行う際、十分なコントラス

トを達成するために必要な F はおよそ 10 であることがわかつておる、本研究ではこれに基づき各パラメータの範囲を設定する。まず、内部作用角 IWA の範囲は、(4)式より 100~1000[mas] となる。また、理学的成果を考慮し、観測波長 λ は可視光とする。(4)式から明らかのように、 F は IWA とオカルタ半径 R に比例し、 λ に反比例する。よって、 $\lambda = 850[\text{nm}]$ において $F = 10$ を達成する R は 0.54~5.4[m] 程度となる。そこで、オカルタ半径 R を 1~6[m] の範囲に設定すると、 IWA の範囲が 100~1000[mas] のとき、宇宙機間距離 z はおよそ 200[km]~12000[km] となる。さらに、暗領域半径 ρ_{dark} は、望遠鏡半径とフォーメーションフライトの精度から定められるマージンの合計より大きい必要があるため、望遠鏡半径を 0.05[m]、マージンを 0.10[m] と仮定した 0.15[m] を下限として、0.15~0.55[m] まで変化させることとする。

3. 最適パラメータの導出

3.1. 各パラメータの基準値

最適化を行うパラメータの基準値を Table. 1 のように設定する。これは、ケンタウルス座 α 星のハビタブルゾーンの下限値 700[mas] を参考にしたものである。ケンタウルス座 α 星は太陽から最も近い恒星系で、ハビタブルゾーンの直接撮像が期待されている。最適化の対象とする波長範囲(以下、最適化波長範囲と呼ぶ)は可視光を包括するものであり、刻み幅は最適化波長範囲における波長刻みのことである。

Table. 1 Reference parameters

Separation distance, z	1475 km
Occulter maximum radius, R	5 m
Lower wavelength, λ_{\min}	300 nm
Upper wavelength, λ_{\max}	1100 nm
Dark region radius, ρ_{dark}	0.25 m

3.2. 各パラメータの変化

3.2.1. 内部作用角変化

内部作用角 IWA を 100~1000[mas] まで 100[mas] 刻みで変化させた際のコントラスト変化を確認するため、オカルタ半径 $R = 5[m]$ について、望遠鏡の瞳面における最大コントラストを、観測波長 $\lambda = 400 \sim 850[\text{nm}]$ まで 50[nm] 刻みで算出する。各波長の最大コントラストをプロットしたグラフを Fig. 4 に示す。

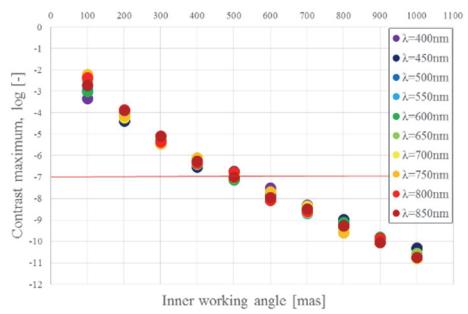


Fig. 4 Contrast maximum for each wavelength

Fig. 4 から、内部作用角が大きくなるにつれてコントラストは改善することがわかる。

3.2.2. 波長変化

観測波長 λ について、最適化波長範囲と刻み幅を変化させた際のコントラスト変化を確認するため、内部作用角 $IWA = 700[\text{mas}]$ 、オカルタ半径 $R = 5[\text{m}]$ について、最適化波長範囲を(1) 300~1100[nm], (2) 400~1000[nm], (3) 400~900[nm], (4) 400~850[nm]とし、刻み幅 $\Delta\lambda$ を(a) 100[nm], (b) 10[nm]に変化させた際の、望遠鏡の瞳面における周方向のコントラストを算出する。各最適化波長範囲について、代表値として観測波長 $\lambda = 400[\text{nm}]$ のときの瞳面 ($\rho_{\text{dark}} = 0.25[\text{m}]$) でのコントラストの図を Fig. 5~Fig. 8 に示す。

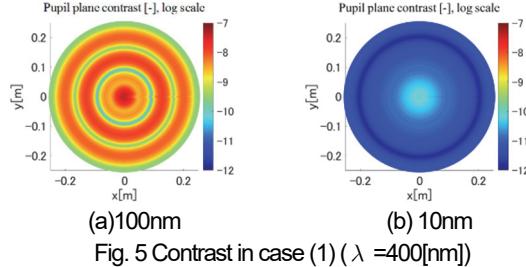


Fig. 5 Contrast in case (1) ($\lambda = 400[\text{nm}]$)

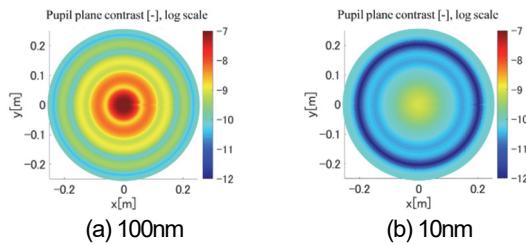


Fig. 6 Contrast in case (2) ($\lambda = 400[\text{nm}]$)

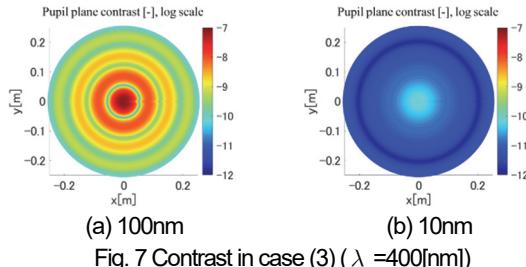


Fig. 7 Contrast in case (3) ($\lambda = 400[\text{nm}]$)

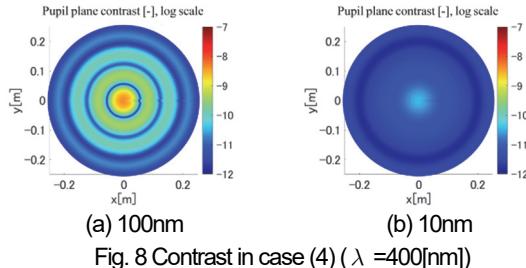


Fig. 8 Contrast in case (4) ($\lambda = 400[\text{nm}]$)

また、各最適化波長範囲について、瞳面での最大コントラストを観測波長 $\lambda = 400\sim 850 [\text{nm}]$ まで 50 [nm] 刻みで算出し、Table. 2 に示す。ただし、コントラストは 10 の累乗数で表す。

Table. 2 Contrast maximum in each wavelength

波長範囲	刻み幅	400 [nm]	450 [nm]	500 [nm]	550 [nm]
300-1100 [nm]	100 [nm]	-7.413	-8.727	-7.377	-8.702
	10 [nm]	-10.12	-10.24	-10.11	-10.67
400-1000 [nm]	100 [nm]	-6.889	-9.454	-7.591	-9.542
	10 [nm]	-9.058	-9.058	-9.056	-9.535

波長範囲	刻み幅	100 [nm]	10 [nm]	100 [nm]	10 [nm]
400-900 [nm]	100 [nm]	-7.072	-10.39	-8.670	-10.47
	10 [nm]	-10.12	-10.24	-10.11	-10.67
400-850 [nm]	100 [nm]	-8.377	-11.86	-10.14	-11.87
	10 [nm]	-10.48	-10.62	-10.54	-10.77

波長範囲	刻み幅	600 [nm]	650 [nm]	700 [nm]	750 [nm]
300-1100 [nm]	100 [nm]	-7.334	-8.682	-8.665	-8.698
	10 [nm]	-10.16	-10.41	-10.35	-10.32
400-1000 [nm]	100 [nm]	-9.388	-9.688	-9.072	-9.523
	10 [nm]	-9.353	-9.211	-9.246	-9.442
400-900 [nm]	100 [nm]	-9.737	-10.46	-10.15	-10.51
	10 [nm]	-10.16	-10.41	-10.35	-10.32
400-850 [nm]	100 [nm]	-10.74	-11.90	-11.96	-11.09
	10 [nm]	-10.66	-10.91	-10.93	-10.83

波長範囲	刻み幅	800 [nm]	850 [nm]
300-1100 [nm]	100 [nm]	-8.274	-8.703
	10 [nm]	-10.05	-9.798
400-1000 [nm]	100 [nm]	-9.622	-9.524
	10 [nm]	-9.448	-9.478
400-900 [nm]	100 [nm]	-10.11	-10.01
	10 [nm]	-10.05	-9.798
400-850 [nm]	100 [nm]	-7.821	-6.556
	10 [nm]	-10.11	-7.899

さらに、各最適化波長範囲について、観測波長 $\lambda = 400\sim 850 [\text{nm}]$ (50 [nm] 刻み) における瞳面での最大コントラストの標準偏差を Table. 3 に示す。

Table. 3 Standard deviation of maximum contrast

Wavelength range	Step width	Standard deviation
300-1100nm	100nm	0.591
	10nm	0.225
400-1000nm	100nm	0.922
	10nm	0.178
400-900nm	100nm	1.035
	10nm	0.225
400-850nm	100nm	1.868
	10nm	0.856

Fig. 5~Fig. 8 から、刻み幅 10[nm] は刻み幅 100[nm] に比べ、瞳面におけるコントラストが改善していることがわかる。これは、刻み幅 100[nm] では極小値(ローカル・ミニマム)に入り込み、最小値を算出できていないためであると考える。また、Table. 2 から、最適化波長範囲を狭めるについてコントラストは改善しているが、最適化波長範囲 400~850[nm]において、観測波長 $\lambda = 850[\text{nm}]$ でコントラストが著しく悪化している。よって、可視光において目標コントラストを達成するためには、最適化波長範囲の上限は $\lambda = 850[\text{nm}]$ より大きい値を設定しなければならないことがわかる。さらに、Table. 3 から、刻み幅 10[nm] は刻み幅 100[nm] に比べ、観測波長における最大コントラストの標準偏差が小さく、ばらつきが少ないことがわかる。

3.2.3. オカルタ半径変化

オカルタ半径 R を 1~5[m] まで 1[m] 刻みで変化させた際のコントラスト変化を確認するため、内部作用角 $IWA = 700[\text{mas}]$ について、望遠鏡の瞳面における最大コントラストを、観測波長 $\lambda = 400 \sim 850 [\text{nm}]$ まで 50 [nm] 刻みで算出する。各波長

の最大コントラストをプロットしたグラフを Fig. 9 に示す。

Fig. 9 から、オカルタ半径が大きくなるにつれてコントラストは改善することがわかる。

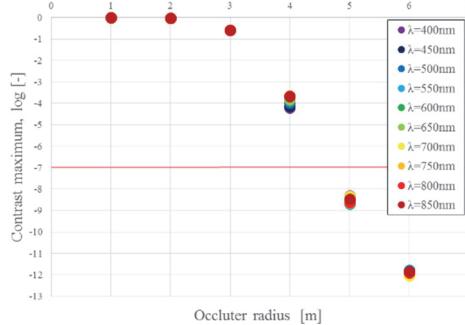


Fig. 9 Contrast maximum in each wavelength

3.2.4. 暗領域変化

暗領域半径 ρ_{dark} を $0.15\sim0.55[\text{m}]$ まで $0.10[\text{m}]$ 刻みで変化させた際のコントラスト変化を確認するため、内部作用角 $IWA = 700[\text{mas}]$ 、 $R = 5[\text{m}]$ について、望遠鏡の瞳面における最大コントラストを、観測波長 $\lambda = 400\sim850[\text{nm}]$ まで $50[\text{nm}]$ 刻みで算出する。各波長の最大コントラストをプロットしたグラフを Fig. 10 に示す。

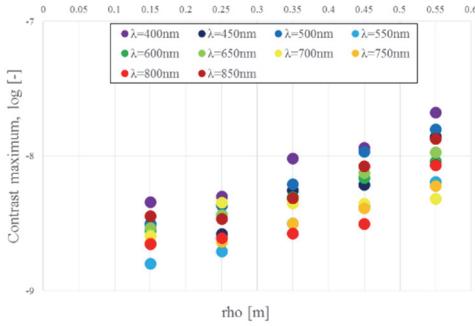


Fig. 10 Contrast maximum in each wavelength

Fig. 10 から、暗領域半径が小さくなるにつれてコントラストは改善することがわかる。

3.3. 最適パラメータの導出

目標をケンタウルス座 α 星 ($IWA = 700[\text{mas}]$, $R = 5[\text{m}]$) と仮定すると、本研究においてもっともコントラストが改善した最適化波長範囲と暗領域の組み合わせを Table. 4 に示す。また、その際のアポダイゼーション関数を Fig. 11 に、基準値との比較として、各観測波長における最大コントラストを Table. 5 に示す。ただし、コントラストは 10 の累乗数で表す。

Table. 4 Optimal parameters

Separation distance , z	1475 km
Occulter maximum radius , R	5 m
Lower wavelength , λ_{\min}	400 nm
Upper wavelength , λ_{\max} (Step:10)	900 nm
Dark region radius , ρ_{dark}	0.15 m

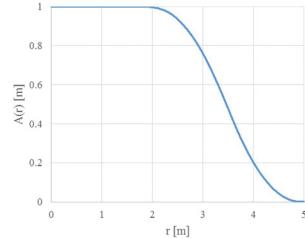


Fig. 11 Optimal Apodization function

Table. 5 Contrast maximum in each wavelength

	400 [nm]	450 [nm]	500 [nm]	550 [nm]	600 [nm]
基準値	-7.413	-8.727	-7.377	-8.702	-7.340
最適値	-10.67	-10.56	-10.56	-11.06	-10.63
	650 [nm]	700 [nm]	750 [nm]	800 [nm]	850 [nm]
基準値	-8.682	-8.665	-8.698	-8.274	-8.703
最適値	-10.80	-10.90	-10.79	-10.83	-10.26

4. 結論

本研究では以下の結論を得た。

- 内部作用角 IWA は大きいほどコントラストは改善する。
- 波長 λ について、刻み幅を小さくするほど瞳面におけるコントラストが改善し、観測波長ごとのコントラストのばらつきが減少する。また、最適化波長範囲を狭めるほどコントラストは改善するが、観測波長 $\lambda = 850[\text{nm}]$ においてコントラスト値が悪化するため、上限は $\lambda = 850[\text{nm}]$ より大きい値を設定する必要がある。
- オカルタ半径 R は大きいほどコントラストは改善する。
- 暗領域半径 ρ_{dark} は小さいほどコントラストは改善するが、今後、フォーメーションフライトの要求から具体的な値を見積もある必要がある。
- 今回導出した最適パラメータとアポダイゼーション関数は、Table. 4, Fig. 11 であり、基準値と比ベコントラストが約 10^2 改善した。

謝辞

本研究は文科省・科研費 17H01349 の補助を受けて行われました。

参考文献

- C. M.A. Deccia, E. Villalba, J. S. Parker, G. H. Born, W. Cash, and R. Nooman, "Surfing The L2 Gradient with The Starshade in Search of Extraterrestrial Life, AIAA-2016-5666, Proc. AIAA SPACE Forum, San Diego, USA, 2016, 4 – 8 January.
- The Probe Scale Science and Technology Definition Teams of NASA's Astrophysics Division: Exo-S: Starshade Probe-Class Exoplanet Direct Imaging Mission Concept, Final Report. 2015.
- NASA/JPL: HabEx Final Report. 2019.
- Webster Cash, New Worlds Team : The New Worlds Observer: The Astrophysics Strategic Mission Concept Study, Proc. the SPIE, Vol. 7436, pp. 743606-743606-14, 2009.
- Koenig, A. W., D'Amico, S., and Macintosh, B., "A Pareto-Optimal Characterization of Small-Scale Distributed Occulter/Telescope Systems", pp.1-2, 2015.
- Robert J. Vanderbei : Eliminating Poisson's Spot with Linear Programming, Operations Research and Cyber-Infrastructure. Springer, Vol. 47, pp.455-468, 2009.
- Koenig, A. W., D'Amico, S., and Macintosh, B., "Formation Design of Distributed Telescopes in Earth Orbit for Astrophysics Applications", June 16, pp.4, 2019.