

局所ラグランジュ法によるモジュール構造の動力学

Dynamics of Modular Structure Based on Localized Lagrange Multipliers

宮崎・山崎研究室

Miyazaki-Yamazaki Laboratory

佐藤 陸

Riku Satou

In recent years, along with the enhancement of space missions, large, lightweight, and high precision space structures have been proposed. There are various problems to realize a large space structure. In order to solve the problems, it is effective to modularize the structure. It is important for the design the modular structure to investigate the interaction between the modules by estimating the joint load during the mission. In this study, the dynamic simulation of modular structures is performed based on the localized Lagrange multiplier method that is suitable for the analysis of the interaction between the modules. The dynamics is solved by the Energy-Momentum Method to evaluate the exchange of the momentum and the energy between the modules.

1. 序論

1.1. 研究背景

近年、大型望遠鏡や大型通信アンテナのような超高精度構造の他、Starshadeのような50m級のものから数km級の宇宙太陽光発電衛星(SSPS)まで、大型、あるいは超大型で、比較的高い精度が要求される宇宙構造物の検討がなされている。



Fig. 1 The SSPS concept [1]

このような大型宇宙構造物の実現のためには、地上での製造や試験・評価も考慮すると、構造をいくつかの要素(モジュール)に分割することが有効と考えられる。以下に、大型かつ高精度な宇宙構造物の開発から廃棄までの段階で想定される課題と、モジュール化を適用した場合の影響を整理する。

(1) 開発

・地上実験

大型宇宙構造物の展開実験や組立は従来の設備では行えないものが多い。そこで、モジュール化をすることで、本来大型のものが小型のものとして扱えることが出来るので、小規模組織(中小企業や研究室等)でも開発ができると考えられる。

・精度維持

大型宇宙アンテナやSSPS, Starshadeは平面度や形状の維持が重要な課題となっている。平面度の悪化は、アンテナやSSPSの場合は受信利得の悪化や受信アンテナの位置変更が必要になり、Starshadeの場合は、性能の悪化に繋がる[2]。1つ1つのモジュールは精度良く作り、構造全体の精度は各モジュールの結合部で調整する必要がある。

(2) 打ち上げ

・構造様式

大型宇宙構造物は、ロケットの要求から、国際宇宙ステーション(ISS)のような剛な構造ではなく、支持部材と膜を組み合わせた、ゴッサマー構造を採用すると思われる。このような構造は、外力による影響を受けやすいが、小さく折りたたむため、軽量であるという利点がある。これにモジュール化を適応させた

際は、モジュールの結合部で発生する力により変形が起こるため、構造にかかる力に耐えられる必要最低限の強度が求められる。

(3) 組み立て

・軌道上組み立て

現在検討されている主な組立方法は、Fig. 2に示すようなロボットアームを用いたものである。

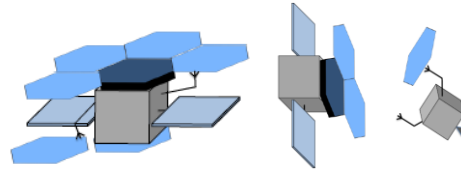


Fig. 2 Conceptual illustration of a self-assembly mission for telescope[3]

この方法には、現在、最大の宇宙構造物であるISSを組み上げた実績がある。しかし、ISSの建設には約10年の歳月がかかっている。そのため、ISSよりはるかに大きい、SSPSのような超大型宇宙構造物の建設方法としては、現実的でない。超大型宇宙構造物の建設方法としては、ロボットアームやマニピュレータを必要とせず、自律的に組立を行う方法になると考える。1つのモジュールについて実験や解析を行うことで構造全体の挙動が予測できるため、今後の大型宇宙構造物は、自立組立型のモジュール構造を採用していくと考えられる。また、平面度を保つため、結合部に形状調整用のアクチュエータが必要である。結合部にかかる力を正しく解析することで、必要最低限のアクチュエータが選定出来るため、構造の軽量化や単純化が見込める。

(4) 運用

・軌道上外乱に対する安定性

大型宇宙構造物の姿勢制御は、能動的な制御を省くため、重力安定傾斜安定方式を採用すると考えられる。一例として、重力傾斜安定型SSPSの外乱に対する安定性は、参考文献[4],[5]で研究がなされている。一般に、大型宇宙構造物の固有振動数は、構造の大きさが大きくなるほど、小さくなっていくと予想できる。また、モジュールに軽量化が求められていることを考慮すると、強度も低くなるので、軌道上の外乱に耐えられる最小限の強度が求められる。そのため、外乱を正しく見積もるための

理論式が確立される必要がある。しかし、モジュールが受ける力は、軌道上外乱だけでなく、モジュールの結合による拘束力を考慮しなければならない。したがって、外乱と拘束力を考慮した計算を行う必要があると考えられる。

(5) 廃棄

・破損したモジュールの廃棄

モジュールが寿命を迎えたときに、そのモジュールのみ主構造から取り外し可能にすることで、全体の長寿命化が見込めると考えられる。全体の構造に対する、モジュール分離時の影響を解析する際は、モジュールの結合部に節点を設置し、その点に複数の要素が結合しているという定式化をすると解析が容易に行える。この定式化は、結合時の解析にも有効である。本研究では、節点と要素間の拘束力にラグランジュの未定乗数を適用した、局所ラグランジュ法(LLM)[6]に着目し、解析を行う。

1.2. 研究目的

本研究では、モジュールの結合部にかかる拘束力に着目し、モジュール間の相互作用を、Energy-Momentum Method (EMM) と、EMM に局所ラグランジュ法(LLM)を用いて考察する。

EMM は構造保存型解法の一つであり、エネルギー原理、運動量原理、角運動量原理を満たすように運動方程式を修正するもので、宇宙空間のような外力が微小な場での運動を評価するのに適している。

また、一般に、ジョイント結合のような、Holonomic 拘束条件の場合、拘束を階層化できれば (拘束自由度と被拘束自由度とが循環しないように順列化できれば)、ラグランジュ乗数を用いずとも、行列操作のみで拘束を考慮することができる。しかし、モジュール結合が多様化すると、自由度の階層化が困難となることも考えられ、この場合には、ラグランジュ乗数を導入せざるを得ない。

ラグランジュ乗数を導入すると、変数が増加し、計算負荷が増加するが、モジュール間の相互作用を直接評価できるので、本研究に適している。また、通常のラグランジュ乗数法ではなく、LLM で定式化すると、変数はさらに増加するものの、分離・結合の解析コードへの組み込みや並列計算が容易になるなどの利点があるため、本研究では LLM を用いる。

本研究は、結合部に作用する拘束力を EMM と、LLM を適用した EMM でそれぞれ計算し、それぞれの計算方法において、長所や短所を示すことで、モジュール構造の結合部の定式化に適した計算方法を確立することを目的とする。

2. 理論

2章で用いる記号を、Table 1 に示す。

Table 1 Nomenclature

T	運動エネルギー
P	運動量
L	角運動量
$\square_0$	1 ステップ前の値
N	慣性座標系から見た軸性ベクトル
R	姿勢マトリクス
ω	物体座標系から見た剛体の角速度ベクトル

Ω	慣性座標系から見た剛体の角速度ベクトル
J	剛体の慣性テンソル
α	慣性座標系から見た修正 Rodriguez ベクトル
$\tilde{f}_0$	$\square$ に対応する一般化内力
$\tilde{F}_0$	$\square$ に対応する一般化外力
$\hat{\square}$	外積演算子

2.1. EMM[7]

ラグランジュの運動方程式は、3 原理(エネルギー原理、運動量原理、角運動量原理)を満たす。しかし、数値計算をする際は、時間積分測を設定するため、誤差が生じてしまう。その結果、計算結果は 3 原理を厳密には満たさない。そこで、運動方程式が離散化されても 3 原理を厳密に満たすように運動方程式を修正(離散化)する必要がある、というのが EMM の考え方である。EMM では、運動方程式を式変形するときは、増分と平均値の関係を示している式が簡潔に記述できるので都合が良い。任意の位置ベクトルを x とすると、時間積分測を式(1)の様に仮定する。

$$\frac{\dot{x} + \dot{x}_0}{2} = \frac{x - x_0}{\Delta t} \quad (1)$$

式(1)は、1 ステップ前の傾きと今の傾きの平均が、Fig. 3 の直線の傾きに近似できるという考え方である。1 ステップ前の値は既知なので、未知数が 1 つに減るという利点がある。また、離散化された運動方程式は、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたとき、ラグランジュの運動方程式と一致するという性質がある。EMM により離散化された運動方程式は、式(2)の離散化された 3 原理を満たすような運動方程式に修正する必要がある。

$$\Delta T = \tilde{F}_\alpha \cdot \Delta x_\alpha, \quad \frac{\Delta P}{\Delta t} = \tilde{F}_\alpha, \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = \bar{x}_\alpha \times \tilde{F}_\alpha \quad (2)$$

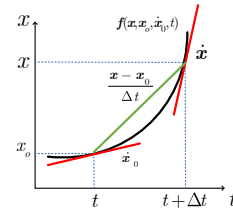


Fig. 3 Graphic representation of slope

ただし、

$$\bar{\square} \equiv \frac{\square(t + \Delta t) + \square(t)}{2}, \quad \Delta \square \equiv \square(t + \Delta t) - \square(t) \quad (3)$$

である。次項では、EMM を適用した剛体の運動方程式を示す。

2.2. EMMを適用した剛体の運動方程式

時刻 t から $t + \Delta t$ の間の回転を表す、慣性座標系から見た修正 Rodriguez ベクトルを α とすれば、姿勢マトリクス R は、式(4)の様に表すことが出来る。

$$R = S R_0, \quad S = I + \frac{4}{4 + |\alpha|^2} \hat{\alpha} + \frac{4}{4 + |\alpha|^2} \hat{\alpha}^2 \quad (4)$$

物体座標系から見た角速度ベクトルを ω とすると、エネルギー増分 ΔT 、角運動量増分 ΔH は、それぞれ式(5)、式(6)の様に表すことが出来る。

$$\Delta T = \Delta \left(\frac{1}{2} \omega^T J \omega \right) = \bar{\omega}^T J \Delta \omega \quad (5)$$

$$\Delta H = \Delta R J \omega = \alpha \bar{R} J \bar{\omega} + \bar{R} J \Delta \omega \quad (6)$$

ここで、

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \bar{R}^T \alpha \quad (7)$$

という時間積分測を仮定とすると、 ΔT は、式(8)の様に書き表せる。

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{\Delta t} \bar{R}^T \alpha^T J \Delta \omega = \alpha^T \frac{\Delta H - \alpha \bar{R} J \bar{\omega}}{\Delta t} \\ &= \alpha^T \frac{\Delta H}{\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

従って、仕事の増分 ΔW が、

$$\Delta W = \alpha^T \hat{M}^{ex} \quad (9)$$

となるようなトルクベクトル $\hat{M}^{ex}$ を定義し、運動方程式を

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = \hat{M}^{ex} \quad (10)$$

とすれば、式(10)は「角運動量の平均的な時間変化率がトルクに等しい」ということを意味している。また、 $\Delta W = \Delta T$ となるので、「運動エネルギーの増分が外部仕事に等しい」ことがわかる。よって、エネルギー原理と角運動量原理が成り立つ。さらに、 $\omega = R^T \Omega$ であるので、時間積分測は、式(11)の様に表すことが出来る。

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \alpha - S \Omega_0 \quad (11)$$

そして、各一般化座標における一般化内力を $\tilde{f}_i$ とすると、離散化された仮想仕事の原理より、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \Pi &= \Delta z^T \tilde{f}_z + \Delta \alpha^T \tilde{f}_\alpha + \Delta x^T \tilde{f}_x + \Delta q^T \tilde{f}_q \\ &= \Delta z^T \tilde{F}_z + \Delta \alpha^T \tilde{F}_\alpha + \Delta x^T \tilde{F}_x + \Delta q^T \tilde{F}_q \end{aligned} \quad (12)$$

より、式(13)の様に書き直すことが出来る。

$$\tilde{f}_z - \tilde{F}_z = 0, \tilde{f}_\alpha - \tilde{F}_\alpha = 0, \tilde{f}_x - \tilde{F}_x = 0, \tilde{f}_q - \tilde{F}_q = 0 \quad (13)$$

2.3. 剛体点拘束

Fig. 4に示すように、剛体が複数個結合しているとき、その質量中心から見た拘束点までの距離を y とすると、慣性座標系の原点から拘束点までの距離の増分 Δx は、式(14)で表せる。

$$\Delta x = \Delta z + \Delta R y \quad (14)$$

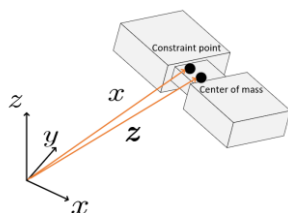


Fig. 4 Constraint point

拘束条件を計算に組み込む際は、式(14)を式(13)に代入すればよい。つまり、

$$\tilde{f}_z = \tilde{f}_z + \tilde{f}_x, \quad \tilde{f}_\alpha = \tilde{f}_\alpha + \bar{R} y \tilde{f}_x \quad (15)$$

とすればよい。増えた項は、位置を拘束するために必要な力であるので、拘束力はそれぞれ、 $\tilde{f}_x, \bar{R} y \tilde{f}_x$ となる。

2.4. 局所ラグランジュ法を用いた剛体点拘束

局所ラグランジュ法では、ラグランジュの未定乗数 λ を Fig. 5の様に定義する。

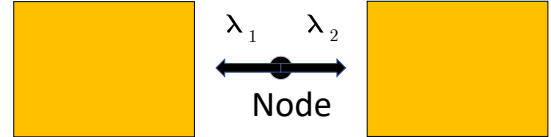


Fig. 5 A localized version of the method of Lagrange multipliers

また、ラグランジュの未定乗数を適応した場合の図を Fig. 6に示す。

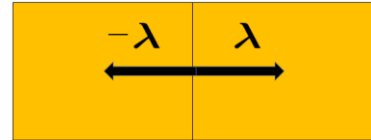


Fig. 6 The method of Lagrange multipliers

局所ラグランジュ法では、結合部に節点を置き、節点と要素間に働く拘束力を λ としている。このように設定することで、1点に3つ以上の要素が拘束されているようなモデルでも、各要素に働く拘束力を求められるという利点がある。また、拘束ごとに独立に計算できるため、並列計算に適しているという利点がある。エネルギー増分を $\Delta \Pi^*$ とすると、次式の様に表せる。式(16)によって、一般化内力に、拘束に対応する項が追加される。

$$\Pi^* = \Pi + \lambda(x - z - R y) \quad (16)$$

3. 計算結果

今回は、モジュールのサイズは、現在 JAXA で提案されている 30m 級大型フェーズドアレイアンテナ[8]のパネル一枚のサイズと同じものに設定した。Table 2に、緒言を示す。

Table 2 Module Specifications

Module Size (Vertical, Horizontal, Height)	3[m] × 3[m] × 0.026[m]
Weight(module)	25[kg]
Angular velocity ω	[0;0.1;0]
Joint Size (Vertical, Horizontal, Height)	0.4[m] × 0.4[m] × 0.026[m]
Weight(joint)	1[kg]
Radius of convergence	10^{-12} [m]

本論では、パネルが2つ、ジョイントに拘束されているモデルの解析を行う。本解析では、このモデルがジョイントの質量中心を原点にして、角速度 ω で回転している。その時、拘束点に

作用する力を求める。Fig. 7にEMMで解析を行ったときの節点番号と要素タイプを示す。

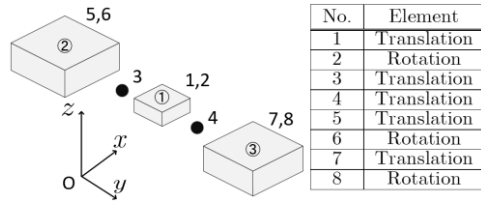


Fig. 7 Node number (EMM)

次に、LLMを適応した時の節点番号と要素タイプをFig. 8に示す。

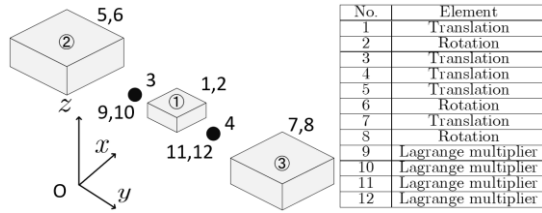


Fig. 8 Node number (LLM)

次に、各節点の位置ベクトルを $\mathbf{x}_i$ とおくと、拘束条件は式(17)のように表すことができる。また、右下の番号は節点番号を表している。計算コードを書く際は、式(17)の上から条件を与えていかないと、拘束条件の階層化ができず、解が得られないので、注意が必要である。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_5 &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{R}_6 \mathbf{y}_1 \\
 \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_2 \mathbf{y}_2 \\
 \mathbf{x}_7 &= \mathbf{x}_4 - \mathbf{R}_8 \mathbf{y}_4 \\
 \mathbf{x}_4 &= \mathbf{x}_3 + \mathbf{R}_2 \mathbf{y}_3
 \end{aligned} \quad (17)$$

次に、解析結果を示す。本論文は、解析結果を2つ並べて表示する。Fig. 9～Fig. 12の左がEMMの計算結果で、右がLLMを適用したEMMの計算結果である。Fig. 9に、エネルギーを示す。

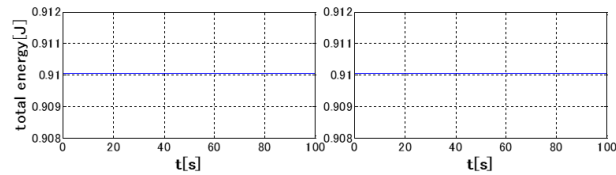


Fig. 9 Total energy

Fig. 9より、両手法において、エネルギーが保存されていることが分かる。次に、Fig. 10に両手法で計算した角運動量を示す。

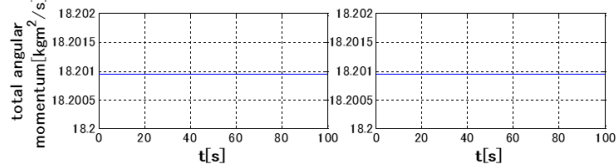


Fig. 10 Total angular momentum

Fig. 10より、角運動量が保存されていることが分かる。次に、Fig. 11に節点1と節点3に働く拘束力と、LLMの節点9の x 方向成分を、Fig. 12に節点1と節点4に働く拘束力と、LLMの節点11の x 方向成分を示す。Fig. 11, Fig. 12より、両手法で拘

束力の計算結果が一致していることが分かる。全体は回転しているが、各要素は自転していないため、節点3と節点4の x 方向成分は、上下対称となっている。

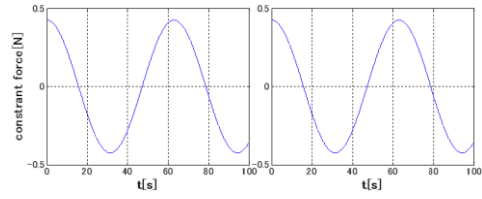


Fig. 11 Constraint force interacting on Node 3

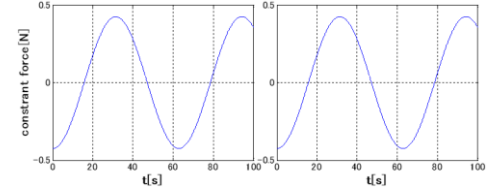


Fig. 12 Constraint force interacting on Node 4

4. 結論

本研究では、以下のような結論を得た。

- ・慣性座標系から見た剛体の運動方程式を、EMMを用いて導いた。
- ・2種類の拘束処理方法を用意し、計算結果を比較した結果、同じ計算結果を得た。

今後は、要素を複数個組み合わせ、例えば円形を成しているような、EMMでは拘束条件の階層化が出来ないモデルに対して、LLMを適用し、モジュール構造の結合部の定式化にLLMを適用することの優位性を証明していく。

参考文献

- [1] John C. Mankins, "SPS-ALPHA: The First Practical Solar Power Satellite via Arbitrarily Large Phased Array", NASA Innovative Advanced Concepts Program, September, 2012
- [2] 設樂翔一他, "自己展開膜面トラスを用いたスターシェードの形状", 第62回宇宙科学技術連合講演会講演集, P74, JSASS-2018-4962
- [3] S. Eckersleya, C. Saundersa, D. Goodinga, M. Sweetinga, C. Whitinga, M. Ferrisa, J. Frienda, L. Forwarda G. Agliettib, A. Nanjangudb, P. Blackerb, C. Underwoodb, C. Bridgesb P. Biancoc, "In-Orbit Assembly of Large Spacecraft Using Small Spacecraft and Innovative Technologies", October, 2018, IAC-18,B4.6A,1,x43225
- [4] 石村康生, 高井伸明, 佐々木進 "重力傾斜安定型太陽発電衛星の外乱環境下での組立手順の検討", 宇宙技術 Vol.4, pp.15-20, 2005
- [5] 石村康生, 泉田啓, 佐々木進, 樋口健, "マルチテザー型SSPSの安定性解析", 第11回SPSシンポジウム, 慶応大学, 9月, 2008年
- [6] K.C.Park, C.A.Filippa, U.A.Gumaste, "A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications", Computational Mechanics 24(2000), 476-490, 2000
- [7] Yasuyuki Miyazaki, "A Formulation of Geometrical Constraint in Energy Momentum Method", 52nd Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics, 2003
- [8] 上土井大助, 倉富剛, 渡辺和樹, "30m級大型フェーズドアレイアンテナの展開・組立方法の検討", 日本航空宇宙学会, 第60回宇宙科学技術連合講演会, 4D02, JSASS-2016-4581, 2016年9月