振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第1回　　序論

宮崎　康行

miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第1回の学修目標

★ 振動工学がどういうものであるかについて説明できる。

★ 本講義の狙いと構成について説明できる。

★ 本講義の内容を修得することで何をできるようになるのかを説明できる。

第1回の全体構成

第1章　自己紹介

第2章　振動工学とは（本講義で扱う振動問題）

第3章　本講義の狙いと構成

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月14日(月)2限

第1回　序論

第1章　自己紹介

第1章の学修目標

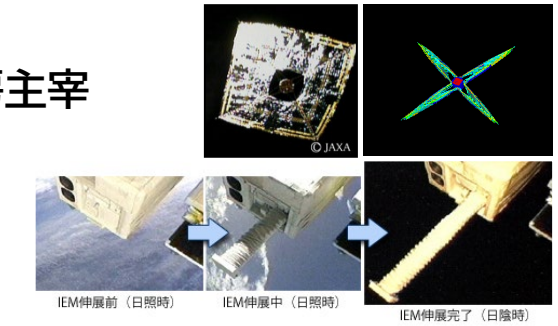
★ この講義の担当教員について知る。

自己紹介

★自分たちのTechnologyで自分たちのScienceを行う

【過去(2020年9月以前)】

- 航空宇宙工学科教授。衛星工房主宰



【現職(2020年10月以降)】

- JAXA宇宙科学研究所 宇宙飛翔工学系 教授
- 総合研究大学院大学 先端学術院 宇宙科学コース 教授
- 日本大学理工学部 特任教授(小宮研究室の卒研テーマの1つとして学生を受け入れています)
- 研究室には総研大生・日大生・東工大生・早大生(大学院生および大学院進学予定の学部4年生)
- 研究室はJAXA相模原キャンパスにあります。宇宙工学の様々な研究室、宇宙物理学や太陽系科学等、理学の研究室が同じ建物にあって、一緒に宇宙機の開発を行っています。

【専門】

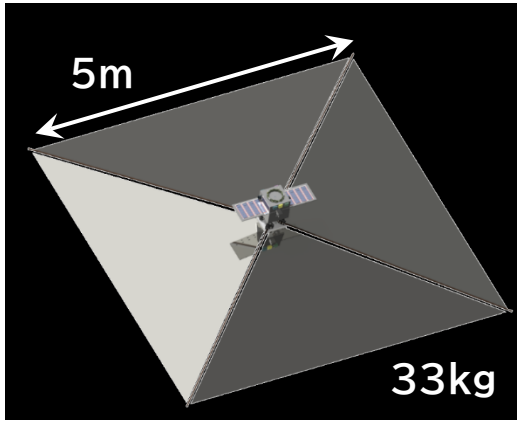
- 宇宙構造物工学(特に, 超軽量展開宇宙構造物)
  - ✓ 高精度ゴッサマー構造(膜やケーブルから成る構造)
  - ✓ 軌道上でのランデブ・ドッキングによる大型構造物構築
  - ✓ 超軽量超大型宇宙構造物
- 柔軟マルチボディダイナミクス, 幾何力学
  - ✓ 解析力学の理論を微分幾何学を用いて表現し、離散化により動力学を数値的に解く
- 宇宙構造物を利用した宇宙科学・探査
  - ✓ 自分や自分の研究室の学生の研究成果を宇宙科学・探査ミッションで使ってもらう

https://stage.tksc.jaxa.jp/taurus/

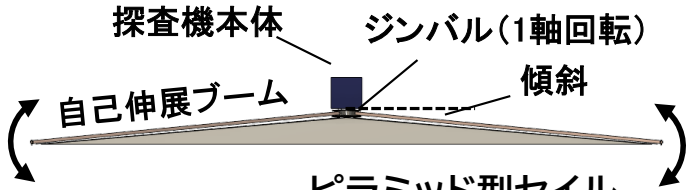
自己紹介

★自分たちのTechnologyで自分たちのScienceを行う

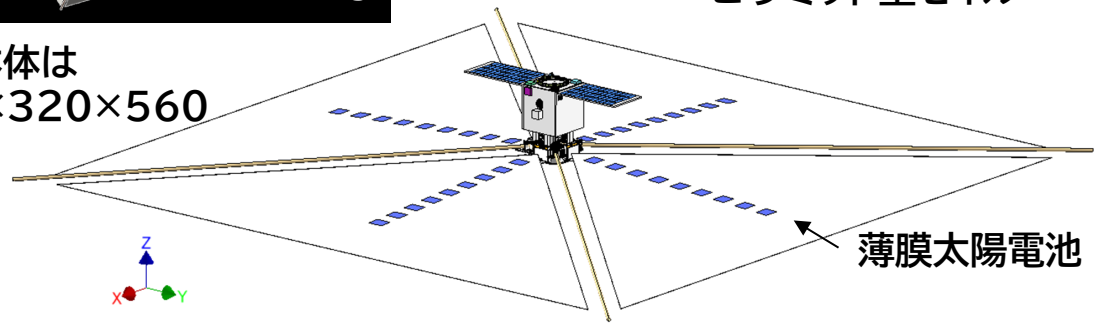
【研究例1】超小型ソーラーセイル PIERIS



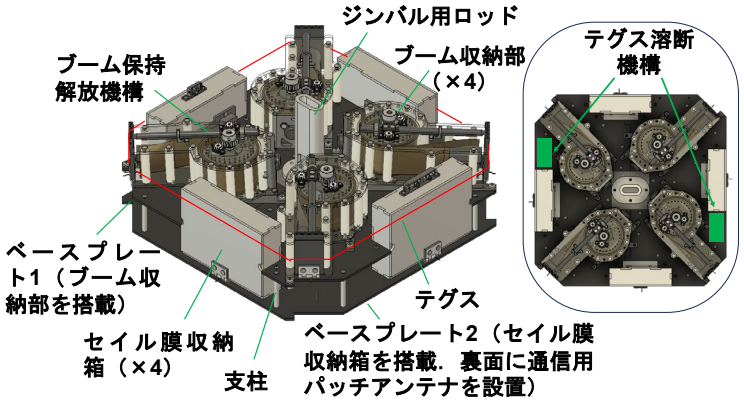
ソーラーセイルによる高精度な姿勢・軌道統合制御。将来に向けて電気推進も実証予定

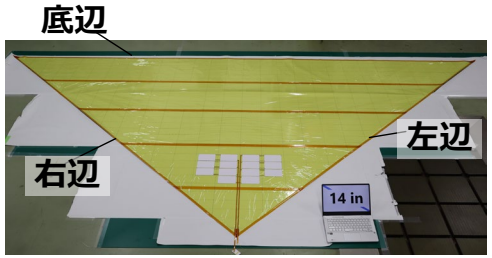


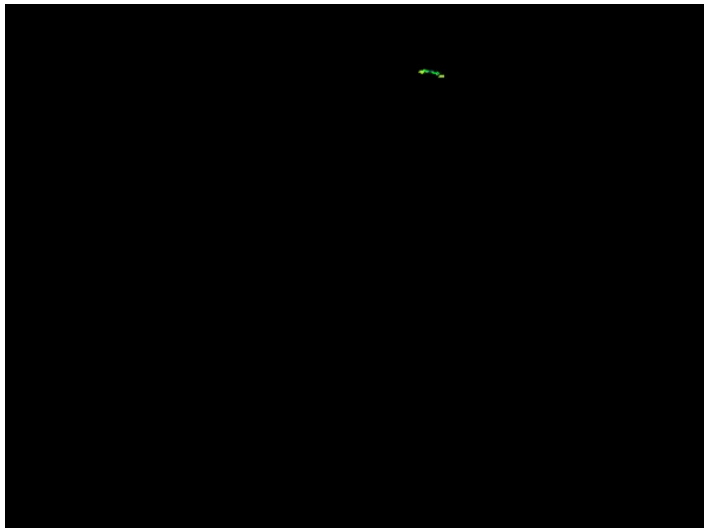
衛星本体は
400×320×560

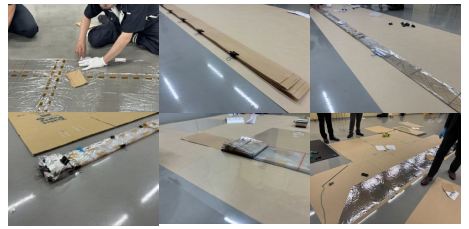


- 東工大中条研究室と共同開発。2027年度に打ち上げ予定
- セイル構造系を、研究室の卒業生と博士後期課程学生が立ち上げたスタートアップと研究室学生が開発中
- 世界一高性能で自在に宇宙を探査するソーラーセイルを実現したい。








膜の製作

収納・伸展機構

ダンパ

ラッチ部

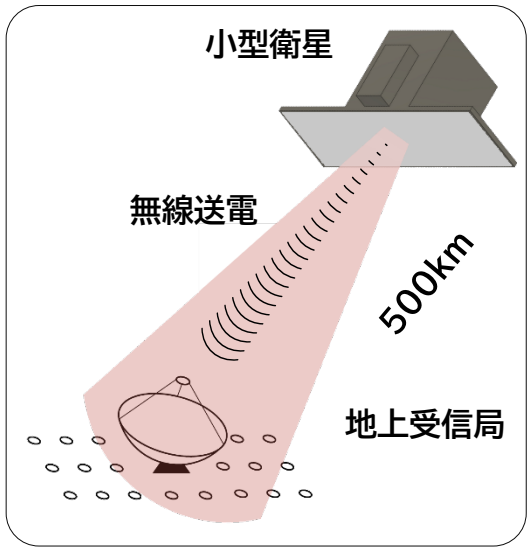
伸展・ラッチ確認試験

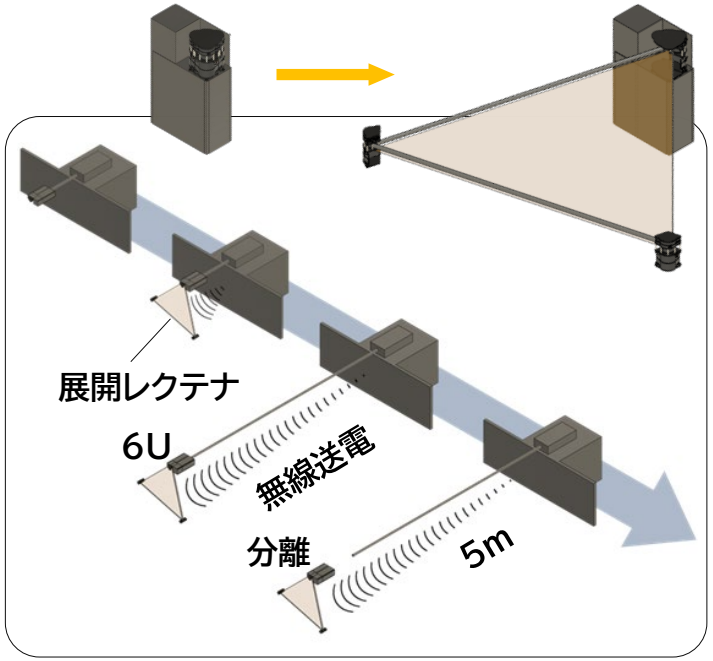
自己紹介

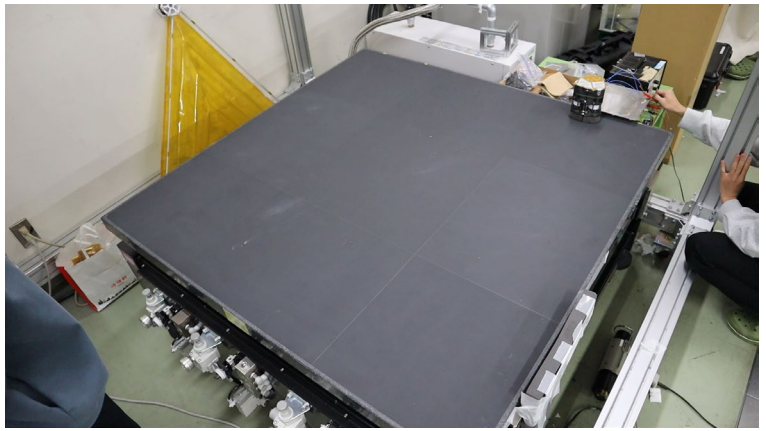
★自分たちのTechnologyで自分たちのScienceを行う

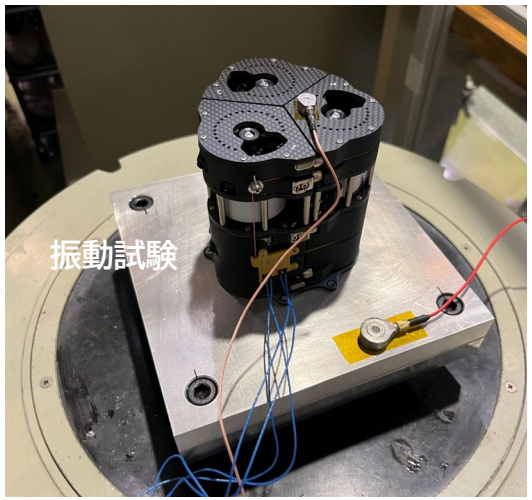
【研究例2】 無線送電技術実証 OHISAMA

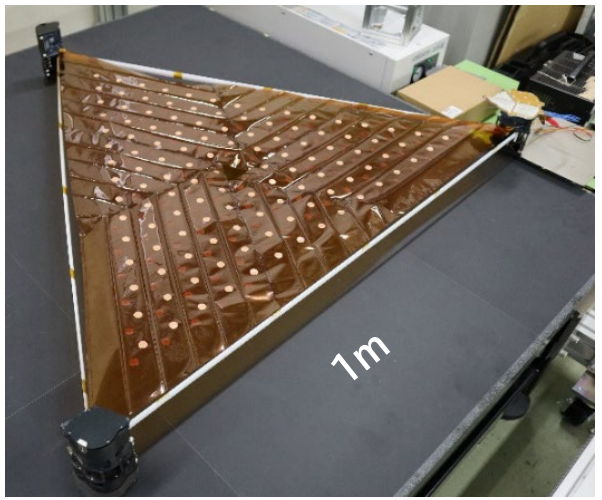
- 宇宙太陽光発電システムの実現に向けた第一歩
- 2026年に打ち上げ予定
- 6U搭載用の1m級展開レクテナを博士後期課程学生が開発中
- 世界初の軌道上無線電力伝送









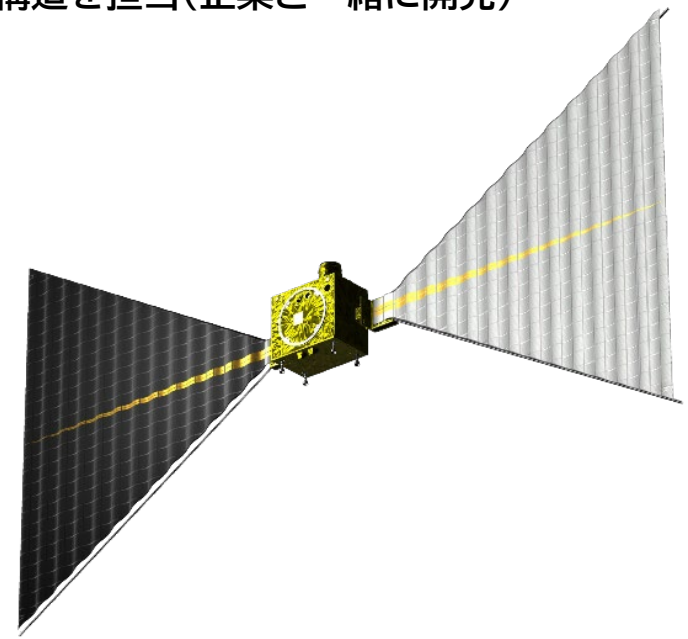


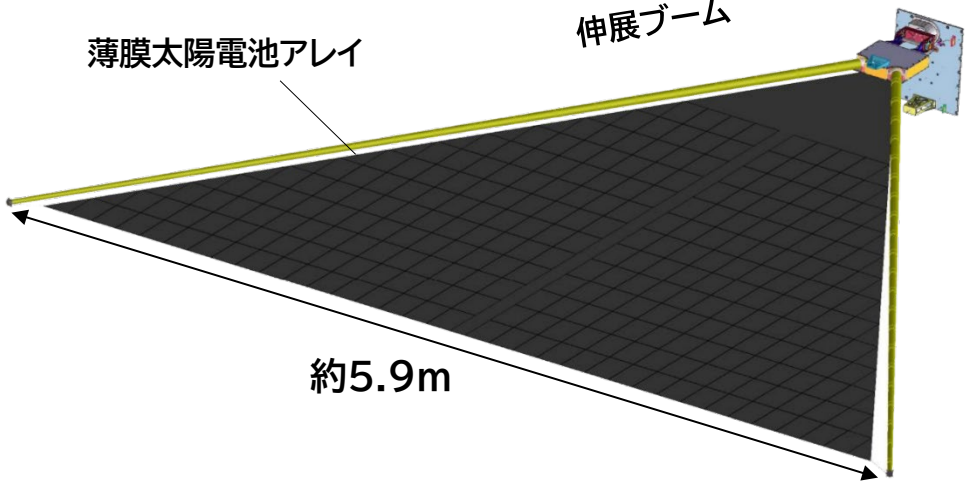
自己紹介

★自分たちのTechnologyで自分たちのScienceを行う

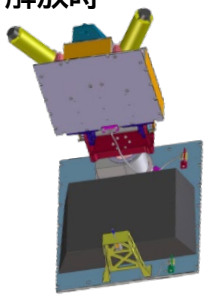
【研究例3】 超小型深宇宙探査機OPENS-0

- 土星フライバイ探査。土星付近で解像度の高い画像を取得するだけでも大きな成果（今はカッシーニが撮影した低解像度画像しかない）
- 2028年打ち上げ予定
- 200W/kgの世界最軽量SAPを目指す（現在は150W/kg程度が世界最高）
- 探査機構造を担当（企業と一緒に開発）

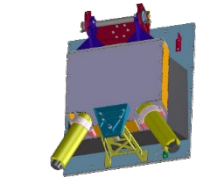


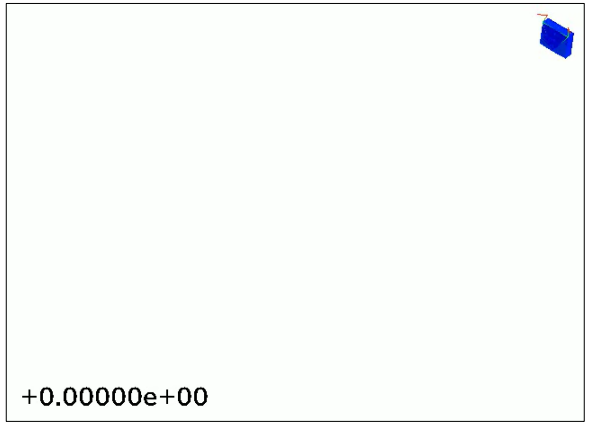


ローンチロック解放時



収納時



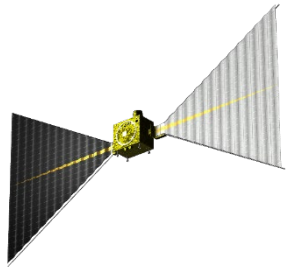


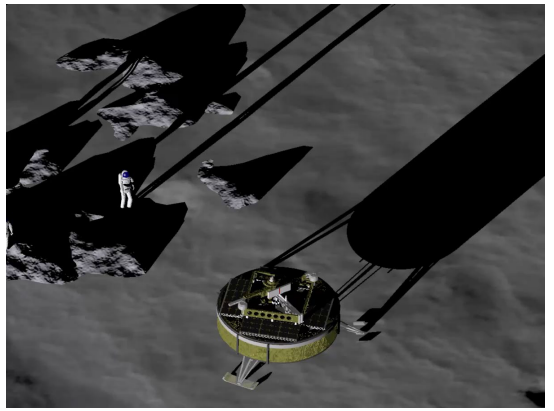
自己紹介

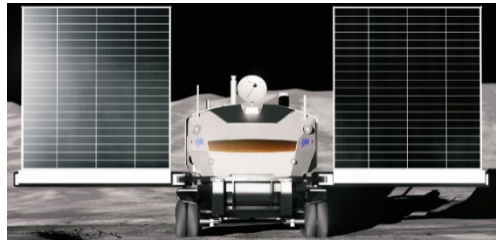
★自分たちのTechnologyで自分たちのScienceを行う

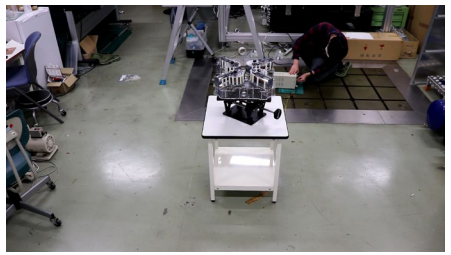
【研究例4】 軽量伸展ブーム

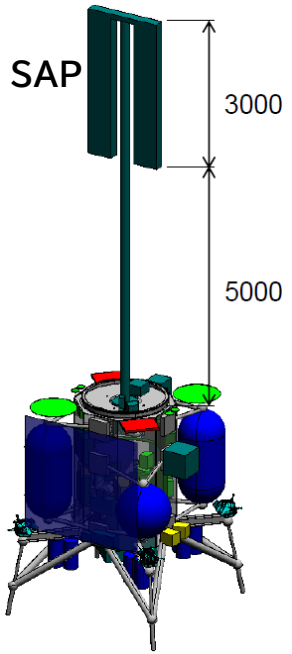
- ソーラー電力セイルPIERIS用ブーム(2027年)
- OPENS-0搭載SAP用ブーム(2028)
- 月面ランダー搭載アンテナ、アンテナ支持支柱、および、月面ランダー搭載太陽電池パネル(SAP)展開用ブーム(2028年度？)
- 彗星探査機Comet Interceptor磁力計搭載用ブーム(2029年？)
- 月面多目的太陽電池タワー用ブーム(2030年代前半)
- 月面与圧ローバー搭載SAP用ブーム(2030年代前半)

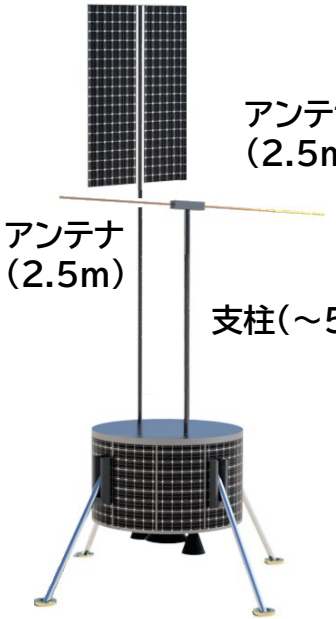


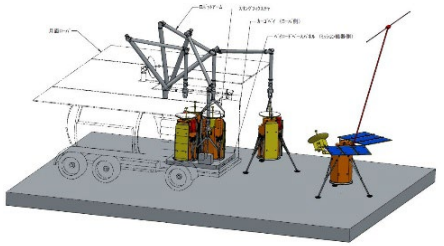


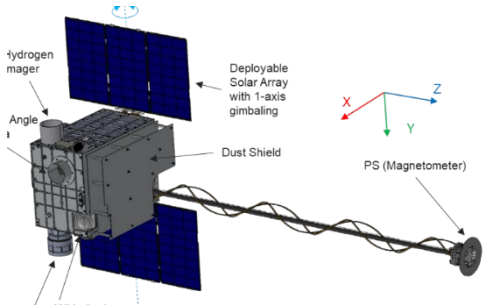


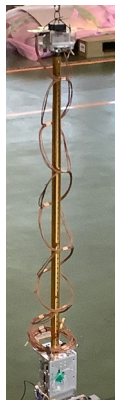












第1章のまとめ

- これからの民間衛星（大学衛星を含む）は「質」で勝負。
- 「今まで誰もやったことがない」＆「成功するとすごいことになる」ことを航空・宇宙の分野でやってみませんか？
- 大学の外にどんどん出ていって、いろんな研究者や技術者と一緒に研究開発をしてみては？

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月14日(月)2限

第1回　　序論

第2章　振動工学とは(本講義で扱う振動問題)

第2章の学修目標

★ 振動工学とはどのようなものか、実例を観ながら確認する。

振動工学とは？

★ChatGPTによれば

You
振動工学とは？

ChatGPT
振動工学（Vibration Engineering）は、物体や構造体の振動に関する科学や技術の分野です。これは、機械工学、構造工学、電気工学、物理学などの様々な分野にまたがっています。

振動工学では、物体が振動する原因やメカニズム、振動の特性、振動の測定・解析方法、振動の制御技術などについて研究されます。具体的な応用としては、建築物や橋の振動特性の解析、航空機や自動車の振動制御、機械の振動問題の診断と解決、振動を利用したセンサーや発電システムの開発などがあります。

You
宇宙工学分野で振動工学が使われる事例は？

ChatGPT
宇宙工学分野では、振動工学がさまざまな重要な役割を果たしています。以下に、そのいくつかの具体的な事例を挙げます：

1. **ロケットや宇宙船の振動解析:** ロケットや宇宙船が発射されるときや宇宙空間で運用される際、振動は重要な要素となります。振動の制御や振動環境の予測によって、機器や人員の安全性を確保するための振動解析が行われます。
2. **打ち上げ時の振動抑制:** ロケットの打ち上げ時には、非常に強力な振動が発生します。これらの振動がロケットや搭載貨物に悪影響を与える可能性があるため、振動工学を用いて打ち上げ時の振動を制御し、機器や貨物を保護します。
3. **宇宙機器の耐振動性の確保:** 宇宙機器は、宇宙船の打ち上げ時や宇宙空間での運用中にさまざまな振動環境にさらされます。振動工学を使用して、宇宙機器がこれらの振動に耐えられるように設計されます。
4. **宇宙望遠鏡の振動制御:** 宇宙望遠鏡は、極めて高い解像度で宇宙の観測を行うため、極めて微小な振動にも敏感です。振動工学を使用して、宇宙望遠鏡が地球や宇宙船からの振動などの外部要因によって影響を受けることを最小限に抑えます。

これらの事例は、宇宙工学分野における振動工学の重要性を示しています。振動工学の知識と技術は、宇宙探査や宇宙機器の設計・運用において不可欠です。

振動工学とは？

★航空宇宙工学における振動問題

航空機のフラッタ（flutter）

丸善出版

航空宇宙工学テキストシリーズ

空力弾性学

著者名	一般社団法人 日本航空宇宙学会 編 中道　二郎 著 玉山　雅人 著 児玉　智 著
発行元	丸善出版
発行年月日	2019年01月
判型	A5　210×148
ページ数	244ページ
ISBN	978-4-621-30363-4
Cコード	3353
NDCコード	538
ジャンル	機械・金属・材料 > 航空・宇宙工学

https://www.youtube.com/watch?v=egDWh7jnNic

振動工学とは？

★航空宇宙工学における振動問題

ロケットの打ち上げ振動

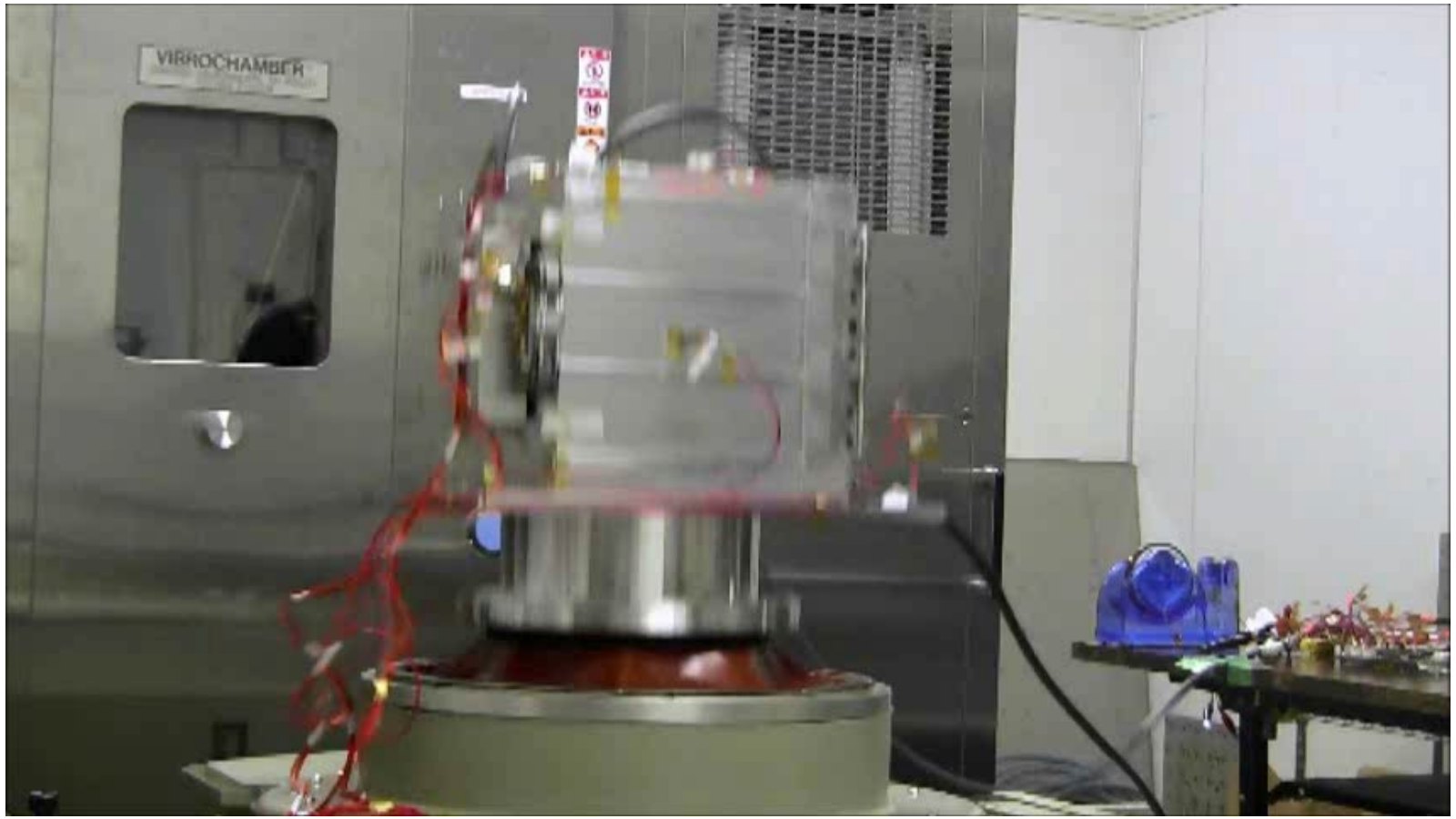
- どうすれば振動しても壊れないのか？
- どうすれば振動しないようにできるのか？

http://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=af7664b58f8a5e3b9e0fc347797b60e5

振動工学とは？

★航空宇宙工学における振動問題

人工衛星の打ち上げ時の振動を模擬した試験（実験）



- どうすれば振動しても壊れないのか？
- どうすれば振動しないようにできるのか？

第2章のまとめ

- ChatGPTによれば、「振動工学では、物体が振動する原因やメカニズム、振動の特性、振動の測定・解析方法、振動の制御技術などについて研究されます」とのことである。
- また、「具体的な応用としては、 建築物や橋の振動特性の解析、航空機や自動車の振動制御、機械の振動問題の診断と解決、振動を利用したセンサーや発電システムの開発などがあります」とのことである。
- 本講義では、宇宙機の振動問題を例題として、振動工学を学ぶ。

第3章　本講義の狙いと構成

第3章の学修目標

★ 本講義の狙いを説明できる。

★ 本講義の進め方や評価方法について説明できる。

本講義の目標

★将来、航空機／宇宙機の設計・開発に携わり、開発に必要な「振動解析」および「振動試験」を行うことを想定して、振動工学について学ぶ。具体的には、

1. 1自由度線形振動の基礎理論について学ぶ。
2. 2自由度線形振動の基礎理論について学ぶ。
3. それら学んだことを応用し、振動絶縁および動吸振器の基礎について学ぶ。
4. 次に、多自由度線形振動の基礎理論、特に、モード法について学ぶ。
5. また、それらの理論を基礎として、人工衛星を例に、振動試験法、衝撃試験法、および試験結果の評価法について学ぶ。

この講義は、主に、「振動工学」を（超小型）人工衛星の構造設計に応用することを想定した内容になっていますが、「振動工学」は制御分野や空力分野など、他分野にも直結する分野ですので、構造設計だけでなく、そういった分野に興味がある学生さんにもプラスになる内容だと思います。

本講義の目標

★ちなみに、自由度とは？

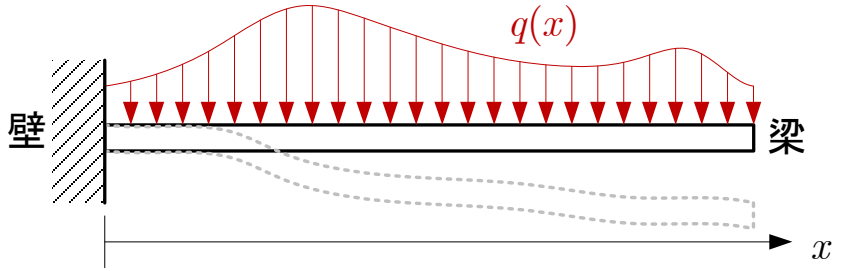
一般に、物体は「質点」または「連続体」でモデル化することが多い。 連続体は「流体」と「固体」に分類ささ れ、固体は「剛体」や「弾性体」、「弾塑性体」等に分類される。本講義では、**質点、剛体、弾性体**の振動を取り扱う。

質点は並進運動のみを考慮するモデルであり、 2次元運動であれば2自由度、3次元運動であれば3自由度の運動となる。

剛体は回転運動も考慮するモデルで、同様に、それぞれ3自由度および6自由度の運動となる。

これに対し、弾性体は載荷される（荷重が作用する）ことで変形し、除荷されることで変形前の状態に戻ると仮定したモデルであり、2次元、3次元に関わらず、自由度は無限大となる。

例えば、下図のような片持ち梁に分布荷重$q = q(x)$が作用する場合、 $q(x)$の与え方によって、梁のたわみ$w = w(x)$は任意の値を取り得る。つまり，任意のxに対する $w(x)$、すなわち，無限個の$w(x)$ が未知数となる。**自由度とは未知数の数**のことであるので、**梁の自由度は無限大**ということになる。



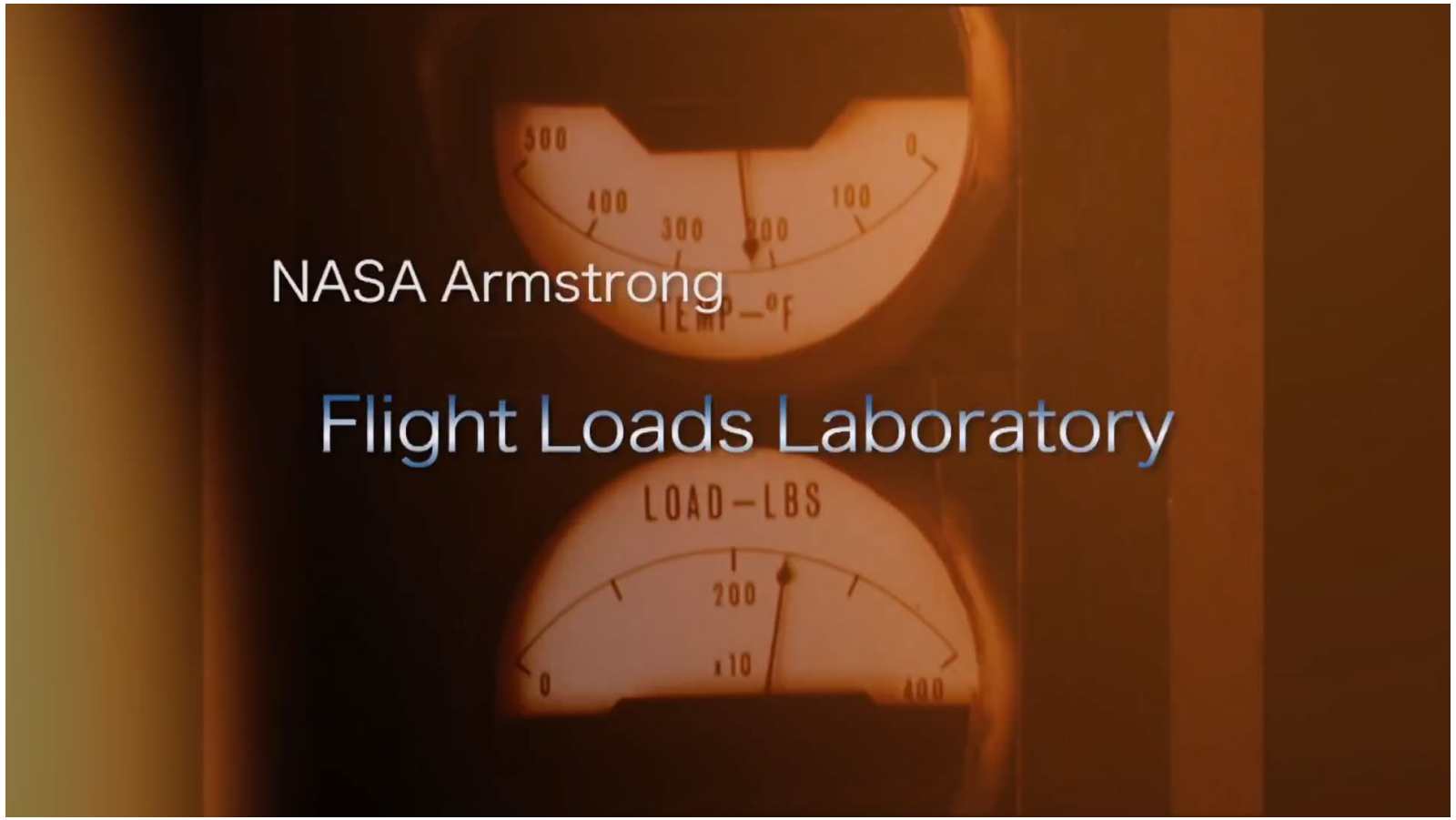
本講義を学ぶことで得られるものは？

★航空機／宇宙機の評価（設計および製造の妥当性の評価）を、その裏付けとなる理論に基づいて行うことができるようになる（行うための基礎を身に付けることができる）。

https://www.youtube.com/watch?v=bQGHtXXUGQA

本講義を学ぶことで得られるものは？

★航空機／宇宙機の評価（設計および製造の妥当性の評価）を、その裏付けとなる理論に基づいて行うことができるようになる（行うための基礎を身に付けることができる）。



https://www.youtube.com/watch?v=qwylNMeJHp4

本講義の構成

1自由度線形運動の復習

- 第1回 序論
- 第2回 1自由度線形振動
- 第3回 任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移
- 第4回 宇宙機の設計・開発における振動解析

強制振動と共振

- 第5回 1自由度線形振動系の強制振動と共振
- 第6回 減衰のない2自由度線形振動系の自由振動
- 第7回 2自由度線形振動系の強制振動
- 第8回 振動絶縁と動吸振器

多自由度系の振動

- 第9回 モード法の基礎
- 第10回 刺激係数と有効質量
- 第11回 パワースペクトル密度
- 第12回 ランダム振動

試験による評価

- 第13回 ランダム加振される物体に作用する荷重
- 第14回 振動に対する耐性の評価法
- 第15回 衝撃に対する耐性の評価法

講義日程

回	日にち	内容
2	4月21日	第2回　「1自由度線形振動」
3	4月28日	第3回　「任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移」
4	5月　5日	第4回　「宇宙機の設計・開発における振動解析」
5	5月12日	第5回　「1自由度線形振動系の強制振動と共振」
6	5月19日	第6回　「減衰のない2自由度線形振動系の自由振動」
7	5月26日	第7回　「2自由度線形振動系の強制振動」
8	6月　2日	第8回　「振動絶縁と動吸振器」
9	6月　9日	第9回　「モード法の基礎」
10	6月16日	第10回　「刺激係数と有効質量」
11	6月23日	第11回　「パワースペクトル密度」
12	6月30日	第12回　「ランダム振動」
13	7月　7日	第13回　「ランダム加振される物体に作用する荷重」
14	7月14日	第14回　「振動に対する耐性の評価法」
15	7月21日	第15回　「衝撃に対する耐性の評価法」

本講義を履修することで目指してほしいこと

★ 振動する物体(弾性体)を見たときに，その振動の特徴について、線形振動の理論を用いて説明できるようになる。(“線形”とは何か、説明できますか？)

★ 航空機や宇宙機を設計・開発する際、振動の観点でどういったことに注意すべきかを説明できるようになる。

★ 振動試験や衝撃試験でどういったことに注意し、何をどう評価すればよいのかを説明できるようになる。

- 振動理論を詳しく知らなくても、Fusion360やSolidWorksといったCADソフトやNASTRAN、ANSYSといった構造解析ソフトを使えば、今の時代なら高校生でも簡単に振動解析はできます。
- しかし、理論的な背景、特に、「なぜ？」の部分(理由)を知らないと、意味のない、あるいは間違った解析や実験をしてしまうこともあります。
- ですので、この授業では、「know how」、「know what」ではなく、「know why」を重視しています。
- つまり、皆さんが「やり方を習得する」だけではなく、「なぜですか？」という問いに答えられるようになってもらえるような講義をすることが私の目標です。

授業資料および課題

★授業資料および課題はすべてClassroomにアップし、課題の提出もClassroomで受け付けます。質問もClassroomからお願いします。

評価方法

★感想(15点)、第1回～第15回の通常課題(計75点)、最終課題(25点)

- 毎回、授業開始時に、Classroomに「感想」をアップロードします。
- その中には、Google Formが入っています。
- Google Formは**受講確認を目的**としているので、毎回(第1回～第15回)、**13:00**までに提出してください。配点は毎回**1点**で、合計15点です。
- 感想、提案、要望、質問等、何を書いてもらっても結構です。
- ただし、“問題なし”、“おもしろかった／難しかった”など、受講したかどうかの判断がつかないような「感想」の場合は**0点**にします。
- 遅れて提出されたものは受け付けません(自動で受け付け終了となります)。

評価方法

★感想(15点)、第1回～第15回の通常課題(計75点)、最終課題(25点)

- 通常課題は第1回～第15回までの毎回、出題します。毎回の授業の終わりに、次回の授業の資料と課題をClassroomにアップします。
- 課題の締め切りは、次の回の授業の前日(日曜日)の18時です。つまり、課題を解く時間は13日間あります。解答例は必要に応じて締め切り日の18時30分にClassroom上にアップします。
- 遅れて提出されたものは受け付けません。
- 配点は5点ずつで、合計75点です。
- レポートは、数式も含めて、WORDまたはTeX等で作成して、PDFファイルにして、Classroom上で提出してください。
- 論理的に書いていないものは減点します。まともな説明を書いていないものは0点にします。
- 問題文・学生番号・氏名・参考文献リストは必ず書いてください。1つでも書かれていない場合、0点にします(参考文献リストがない場合,「なし」と書いてください)。レポートの書き方については、この資料の最後の「付録」を参考にしてください。

評価方法

★感想(15点)、第1回～第15回の通常課題(計75点)、最終課題(25点)

- 課題を友達と一緒に解いた場合、参考文献に、

  [1] 1039 鈴木一郎、「2024年度振動工学第3回課題レポート」、2024。

  といったように、何番の誰と一緒に解いたかがわかるように書いてください。参考文献リストに書いてください。また、先輩のレポートを参考にした場合も、

  [1] 0102 山田花子、「2023年度振動工学第3回課題レポート」、2024。

  といったように、誰の何年度のレポートを参考にしたのかがわかるように書いてください。

- 参考文献リストに上記のような記述がない場合で、似たようなレポートを見つけた場合、全員、0点にします。写した学生だけでなく、写させた学生も0点になりますので、自分のレポートを安易に友達に見せたり、lineやslack等で出回らせるのは避けた方がいいと思います。
- 過去レポと同じようなレポートを見つけた場合も0点にします。
- このような理由で2回、0点になった場合、それ以降のレポートは全て0点になります。
- 参考文献リストは、友達や先輩に対するリスペクトを表す場でもある、と考えてください(参考にしておいて知らん顔、というのは、よくない態度だと思います)。

評価方法

★感想（15点）、第1回～第15回の通常課題（計75点）、最終課題（25点）

- 今年度は課題内容を昨年度までとは少し変えますので、過去レポはそれほど参考にはならないかもしれません（全く参考にならないとは言いませんが）。
- 最終課題は7月7日（月）に出題し、締め切りを7月31日（木）とし、25点満点で採点します。過去レポは全く参考にならないと思います。

評価方法

★感想（15点）、第1回～第15回の通常課題（計75点）、最終課題（25点）

- 感想・通常課題・最終課題の合計点がそのまま成績となります。
- 感想・通常課題・最終課題は合計で115点満点ですので、合計点が100点を超える場合もあります。その場合には，成績は100点となります。
- 昨年度は、履修登録者が100名で、そのうち、Sが18名、Aが17名、Bが23名、Cが19名、Dが23名。
- 正直言って、この科目はタイパのいい科目ではありません。むしろ、毎回、課題が出て、それが成績に直結するので、手を抜きにくく、その割にSやAを確実に取れるというわけでもなく、また、課題の締め切りも確定していて、実験レポートや他の科目の課題との両立がなかなか難しい科目かなと思います。
- しかも、授業のスピードはそれなりに速いので、予習をしていないと、授業のペースに追いつけないかもしれません。
- ただ、「日大の航空宇宙の学生さんなら、これくらいはやれるだろう」、「航空宇宙分野における振動工学の基礎を修得するにはこれくらいのレベルは必要だろう」と考えて、昨年度までやってきており、今年度も同じやり方で進めるつもりです。

第3章のまとめ

- 振動は航空機や宇宙機に必ず起こる現象であり、その中にはフラッターなど、非常に危険な現象も含まれる。 したがって、航空機や宇宙機の設計・開発には振動の知識が必須となる。
- そこで、本講義では、将来、航空機／宇宙機の設計・開発に携わり、開発に必要な「振動解析」、 および、「振動試験」、「衝撃試験」を行うための基礎知識を身に付け付けることを目標とする。
- 特に、「なぜ？」という問いに答えられるようになることを目標とする。
- 具体的には以下の内容を学ぶ。
    1. 1自由度、2自由度、および多自由度の線形振動の基礎理論
    2. それらの応用である、振動絶縁および動吸振器の基礎、ならびに、モード解析
    3. 振動試験法、衝撃試験法、および、試験結果の評価法

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月14日(月)2限

第1回　序論

付録　課題レポートの例

2024 年度振動工学第 1 回課題レポート

航空宇宙工学科
071524 宮崎　康行

【課題】

[1] 自由振動するバネ・マス・ダンパー系

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

がある。ただし、

$$m = 1\,, \quad c = 1\,, \quad k = 4 \tag{2}$$

である。また、初期値（時刻 $t = 0$ のときの x および $\dot{x}$ の値）は

$$x = 1\,, \quad \dot{x} = 2 \tag{3}$$

である。時刻 $t = 3$ のときの x の値を求めなさい。

【解答】

このバネ・マス・ダンパ系の固有角振動数 ω_o および粘性減衰比 ζ は、文献[1]より、

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \quad , \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{1}{2\sqrt{1\times 4}} = \frac{1}{4} \tag{r.1}$$

である。ζ が $0 < \zeta < 1$ を満たすので、この運動方程式の解は減衰振動となる。この場合、初期値が

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{r.2}$$

のときの解は、文献[2]より、

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left[\frac{v_0 + \zeta\omega_o x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right) + x_0\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right)\right] \tag{r.3}$$

となる。いま、問題文より、

$$x_0 = 1 \quad , \quad v_0 = 2 \tag{r.4}$$

であるので、$t = 3$、ならびに、式(r.1)と(r.4)を式(r.3)に代入すると、$t = 3$ のときの x の値は、

$$x = 0.067149 \tag{r.5}$$

となる。

《参考文献》

[1] 井口英雄、佐甲徳栄、相馬亘、中原明生、「改訂版 理工系のための力学」、112-113 ページ、東京図書 2019 年 第 1 版。

[2] 2024 年度振動工学第 1 回授業資料、41-42 ページ、2024。

[3] 1039 鈴木一郎、「2024 年度振動工学第 3 回課題レポート」、2024。

以上

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月14日(月)2限

第1回　　序論

課題

2025年4月20日(日)18時00分締切

[1] バネ定数$10\mathrm{N/m}$のバネの一端を天井に固定し、先端に質量$100\mathrm{g}$の質点を取り付けて、静かに垂れ下げた。そして、そこから、バネを$10\mathrm{cm}$だけ伸ばして、静かに手を離した。このバネ・マス系の減衰係数は$0.02\mathrm{N\cdot sec/m}$である。重力加速度を$9.8\mathrm{m/s^2}$として、次の問いに答えなさい。

（1）垂れ下げた状態でのバネの伸びは何cmか？（1点）

（2）手を離してから10秒後のバネの伸びは何cmか？（4点）

※計算結果だけではなく，問題文，計算に用いた式，文章での説明も必ず書くこと．

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第1回　　この講義の概要

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第2回　1自由度線形振動

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第2回の学修目標

★ 1自由度線形振動とその特徴について説明できる。

★ 1自由度線形振動の重要性について説明できる。

★ 固有振動数がどのようなものであるかを説明できる。

★ 「状態量」および「状態遷移」という考え方について説明できる。

★ 1自由度の自由減衰振動における状態遷移関係を求めることができる。

今回は物理の復習です

第2回の全体構成

第1章　1自由度線形振動の固有振動数

第2章　粘性減衰比が一定の場合の減衰振動

第3章　1自由度線形振動の重要性

第4章　自由減衰振動における状態遷移関係

感想、課題

第3章までは復習ですが、第4章は今後の授業で使うことになる内容が含まれているので、しっかり理解してください。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月21日(月)2限

第2回　1自由度線形振動

第1章　1自由度線形振動の固有振動数

第1章の学修目標

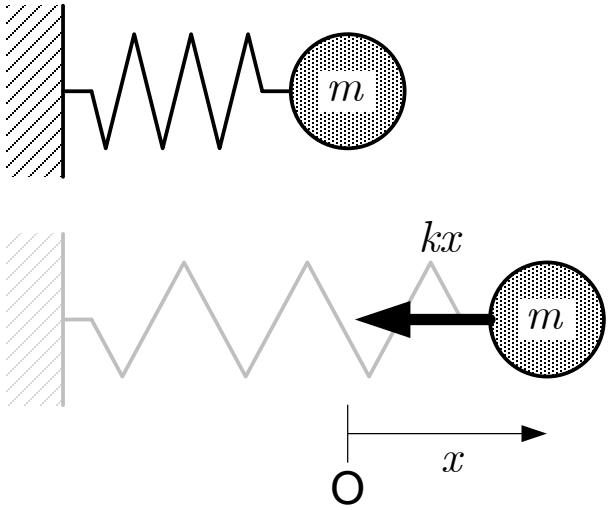
★ 固有振動数がどのようなものであるかを説明できる。

★ 固有振動数と自由振動との関係について説明できる。

★ 固有振動数の特徴や使い道について説明できる。

バネ・マス系の振動（復習しましょう）

★運動方程式とその解



運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.1.1}$$

一般解を

$$x = \exp(\lambda t) = e^{\lambda t} \tag{2.1.2}$$

とおいて、式(2.1.1)に代入すると、

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} \tag{2.1.3}$$

したがって、

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \tag{2.1.4}$$

つまり、

$$\lambda = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad -i\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1.5}$$

したがって、運動方程式の一般解は、

$$x = D_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{2.1.6}$$

ここで、一般に、

$$\begin{cases} \exp(iz) &= \cos z + i\sin z \\ \exp(-iz) &= \cos z - i\sin z \end{cases} \tag{2.1.7}$$

であるので、

$$\begin{aligned} x = {} & D_1\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \\ & + D_2\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

バネ・マス系の振動（復習しましょう）

★運動方程式とその解

$$x = D_1\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] + D_2\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \tag{2.1.8}$$

整理すると、

$$x = i(D_1 - D_2)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + (D_1 + D_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{2.1.9}$$

つまり、次のように掛ける。

$$x = C_1\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{2.1.10}$$

ただし、積分定数C_1、C_2は初期条件で決まる。 つまり、角振動数が

$$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1.11}$$

の単振動（角振動数が1つだけの振動）となる。そして、

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1.12}$$

を固有振動数と呼ぶ。

つまり、減衰がなく、外力が作用していない場合の運動方程式を解くことで 自動的に出てきた振動解、つまり、自由振動解の振動数が固有振動数。

固有振動数の物理的意味

★そもそも、固有振動とは

1. 物体を自由に振動させる（最初に力を加えるなり，変形をさせておいて、その後は手を放して放置する）と、ある特定の振動数で振動する。この振動数を固有振動数と呼ぶ。
2. その振動数は、一般には1つだけでなく、複数ある。
3. 固有振動数の数は、「自由度」の数と一致。
4. いわゆる、連続体（ふつうの棒とか板とか金属等の塊とか）の場合には、その振動数は無限個ある。しかし、それでも、特定の振動数だけ。
5. 例えば、5Hz、12Hz、20Hz、100Hz、・・・といったように、飛び飛びの値となる。
6. その場合、どう頑張っても（最初に加える力とか、変形させる形とかをどんなに工夫しても）、10Hzとか17Hzとか50Hzとかの自由振動を起こすことはできない。

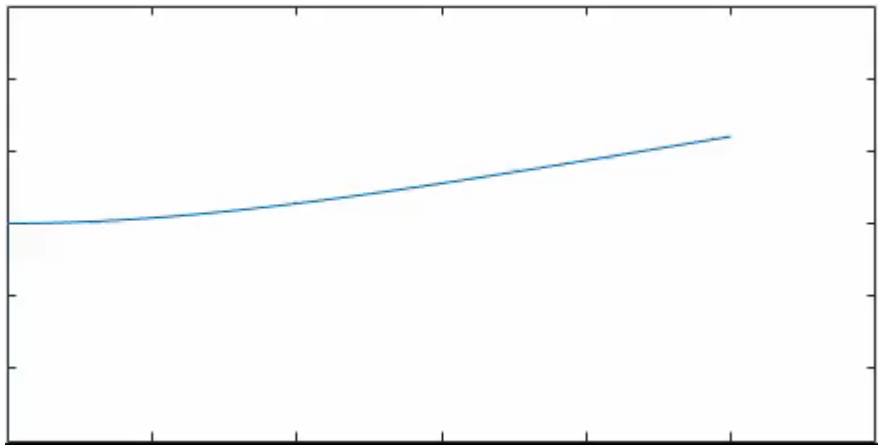
※ 以上についての理由（数学的な説明）は第6回や第9回の講義の際に学ぶことになります。

固有振動数の物理的意味

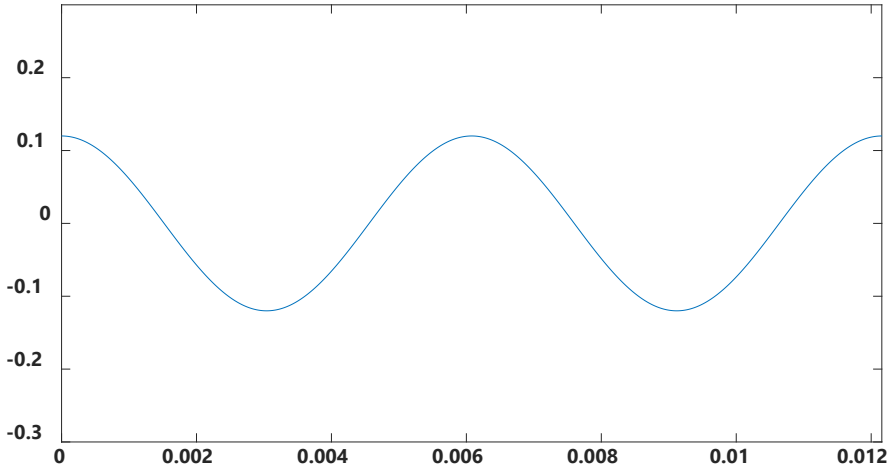
★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

- 最初に梁をある形に変形させておいて、静かに手を離した場合、最初の形によっては、梁は一定の振動数で繰り返し振動する。
- そのときの振動数が固有振動数であり、この振動を固有振動と呼ぶ。固有振動は、振動数が小さい順に「1次」,「2次」と呼ぶ。



梁の振動（1次）



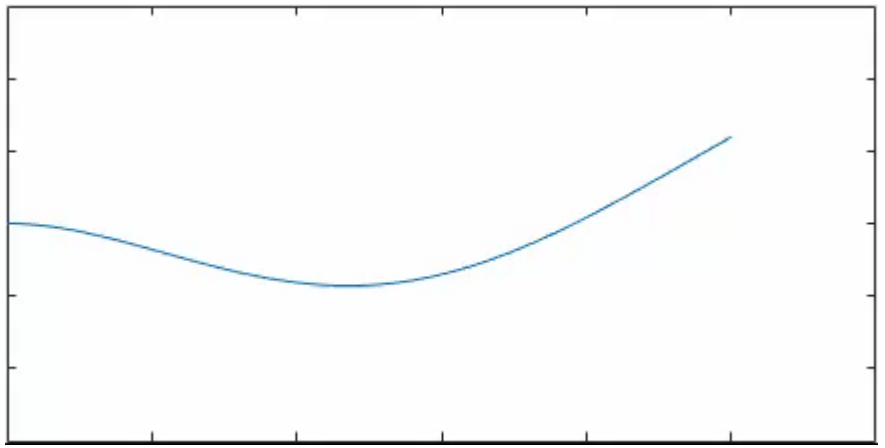
梁の先端のたわみの時間変化

固有振動数の物理的意味

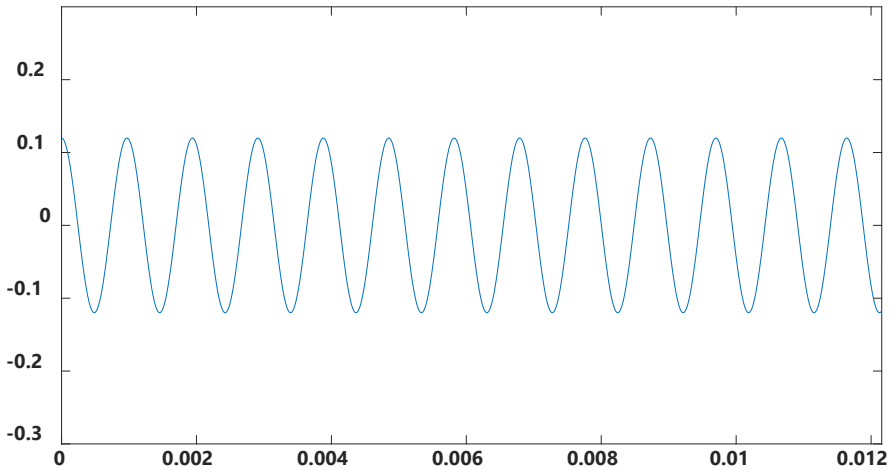
★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

- 最初に梁をある形に変形させておいて、静かに手を離した場合、最初の形によっては、梁は一定の振動数で繰り返し振動する。
- そのときの振動数が固有振動数であり、この振動を固有振動と呼ぶ。固有振動は、振動数が小さい順に「1次」,「2次」と呼ぶ。



梁の振動（2次）



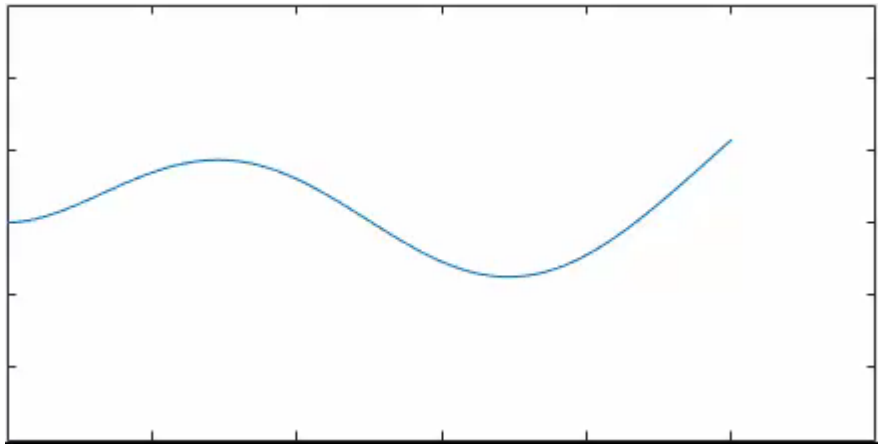
梁の先端のたわみの時間変化

固有振動数の物理的意味

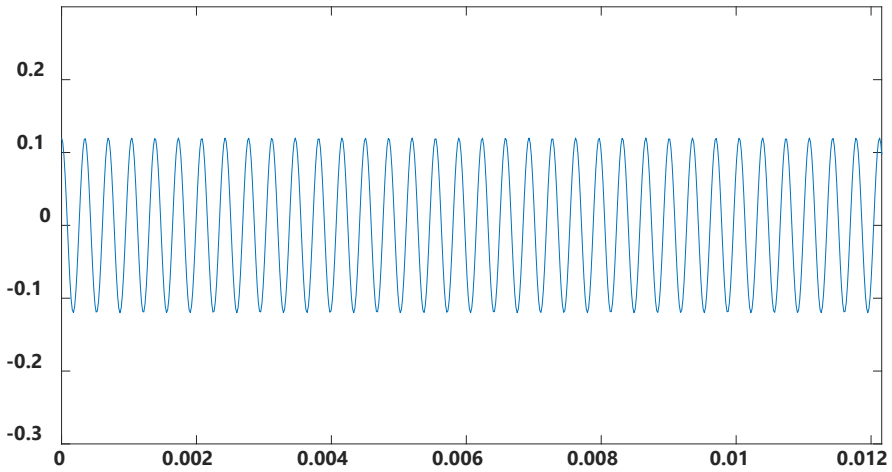
★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

- 最初に梁をある形に変形させておいて、静かに手を離した場合、最初の形によっては、梁は一定の振動数で繰り返し振動する。
- そのときの振動数が固有振動数であり、この振動を固有振動と呼ぶ。固有振動は、振動数が小さい順に「1次」,「2次」と呼ぶ。



梁の振動（3次）



梁の先端のたわみの時間変化

固有振動数の物理的意味

★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

- 最初に梁をある形に変形させておいて、静かに手を離した場合、最初の形によっては、梁は一定の振動数で繰り返し振動する。
- そのときの振動数が固有振動数であり、この振動を固有振動と呼ぶ。固有振動は、振動数が小さい順に「1次」,「2次」と呼ぶ。

MECH VIB
Mechanics and Vibration Research Group

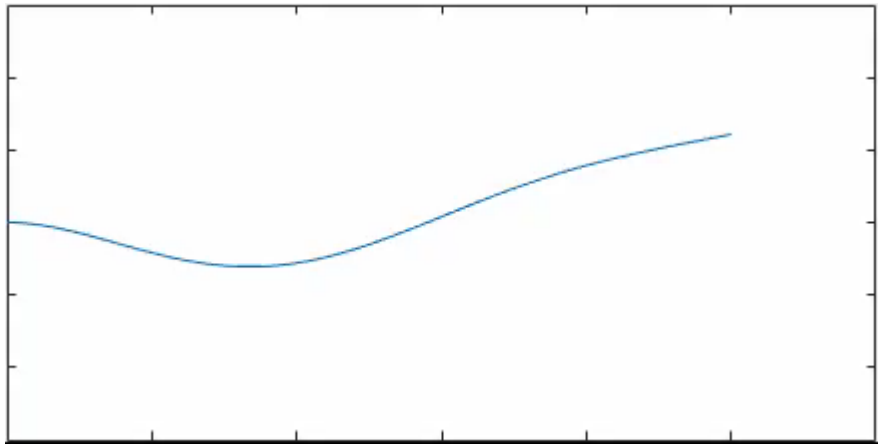
https://youtu.be/bLGW7cWQGEY

固有振動数の物理的意味

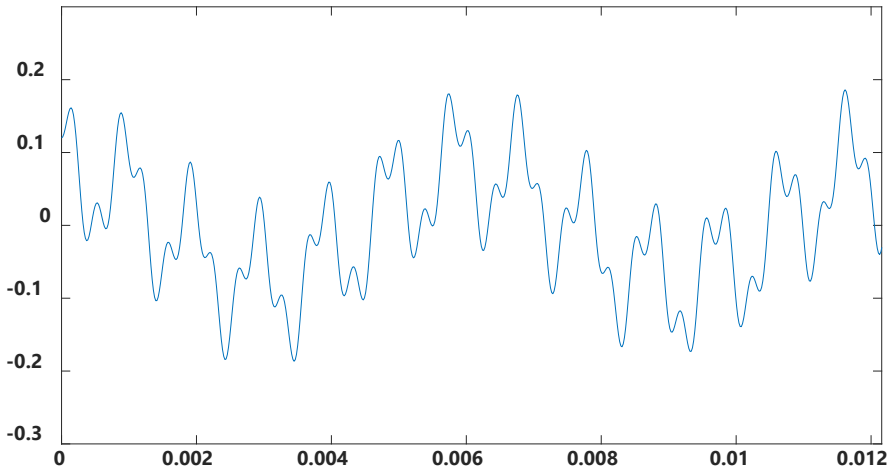
★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

- ふつうは（最初の形が特別な場合を除くと）、梁は一定の振動数で繰り返し振動することはなく、複数の振動が足しあわされた振動となる。
- 実は、一つ一つの振動は、さきほどの固有振動になっている。



梁の振動



梁の先端のたわみの時間変化

固有振動数の物理的意味

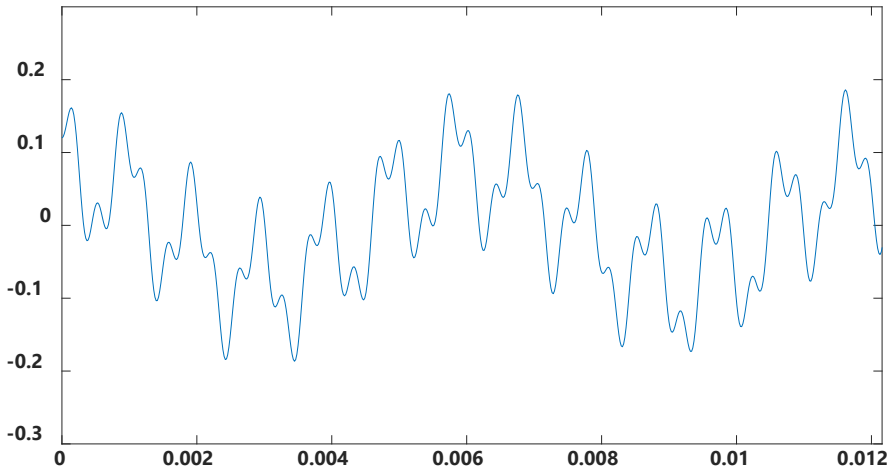
★「固有振動数が複数ある」とは？

片持ち梁の振動

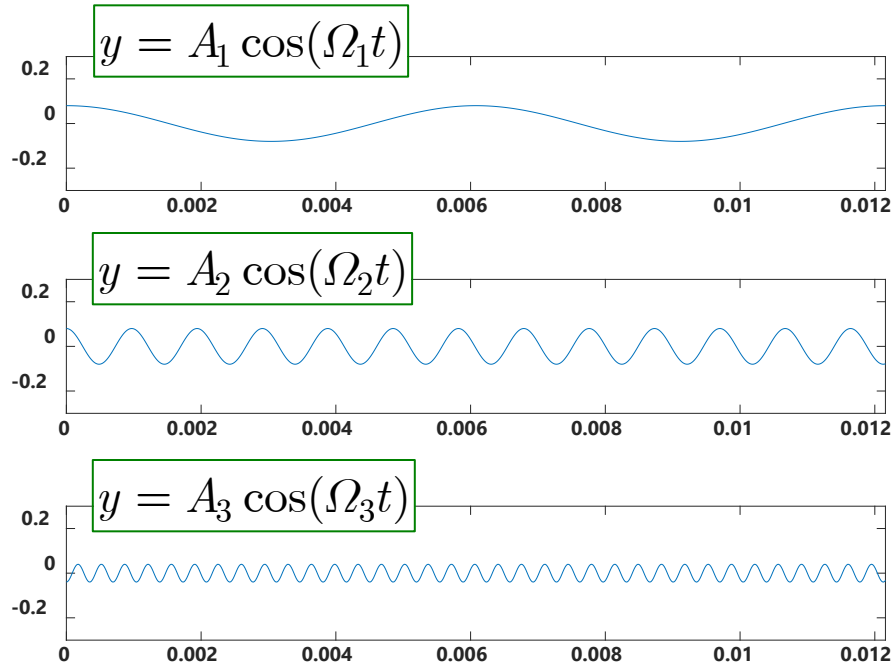
- ふつうは（最初の形が特別な場合を除くと）、梁は一定の振動数で繰り返し振動することはなく、複数の振動が足しあわされた振動となる。
- 実は、一つ一つの振動は、さきほどの固有振動になっている。

この例では cos だけの和になっているが、sin が混ざる場合も当然ある

$$y = A_1 \cos(\Omega_1 t) + A_2 \cos(\Omega_2 t) + A_3 \cos(\Omega_3 t)$$

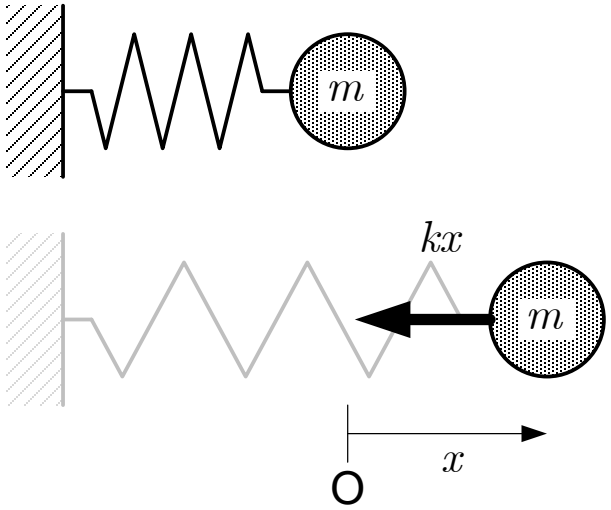


梁の先端のたわみの時間変化



バネ・マス系の振動

★固有角振動数（固有振動数）



固有角振動数（慣例的に固有振動数と呼ぶ場合も多い）は、

$$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1.13}$$

つまり、軽くて剛なもの（mが小さくてkが大きいもの）が、固有振動数が大きい。

⇒ 航空宇宙分野では、固有振動数の値が高くなるよう、設計することが多い。つまり、与えられた質量制限のもとで固有振動数を要求値以上にする。

ちなみに、航空宇宙分野では、「剛性」というと、 kではなくて、ω_oを指すことが多い。

ちなみに、イプシロンに相乗りさせる超小型衛星の場合、ロケット側から衛星側に対して、「1次の固有振動数を40Hz以上にしなさい」というような要求がくる（なぜかというと・・・）。

第1章のまとめ

- 物体は，自由振動させると、必ず、ある特定の振動数の振動（固有振動と呼ばれる）が複数、足し合された振動を呈する。 このとき、それぞれの振動数を固有振動数と呼ぶ。
- 一般に、固有振動数は、剛性が大きく、かつ、質量が小さいものほど大きい。
- 航空宇宙分野では、 固有振動数をある値以上にする、というような設計要求が課せられる場合が多い。つまり、固有振動数は、設計上、極めて重重要な値となる。
- ちなみに、固有振動数を、慣例的に「剛性」と呼ぶ場合も多い。

第2章　粘性減衰比が一定の場合の減衰振動

第2章の学修目標

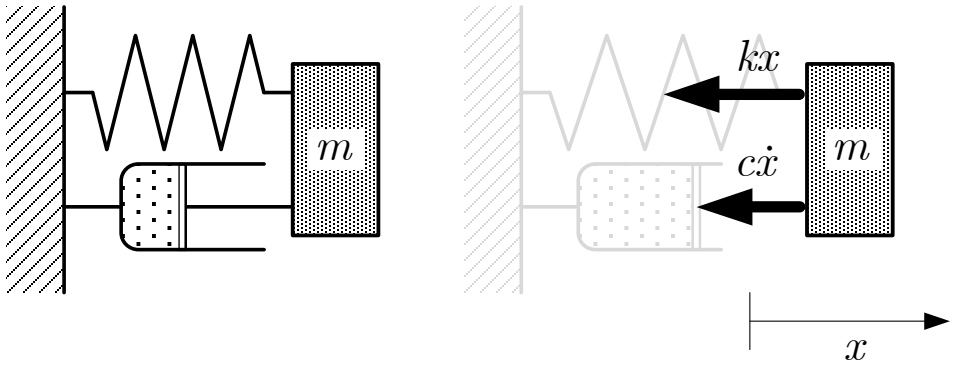
★ 1自由度線形自由運動を、 減衰比の値によって分類できる。

★ 臨界減衰の特徴について説明できる。

★ より素早く減衰させるにはどうすればよいか、 説明できる。

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★運動方程式とその解



運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \tag{2.2.1}$$

つまり、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.2.2}$$

減衰比（粘性減衰比）

ここで，

$$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad \zeta \equiv \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{2.2.3}$$

とすれば、運動方程式(2.2.2)は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = 0 \tag{2.2.4}$$

と書くことができ，一般解を

$$x = e^{\lambda t} \tag{2.2.5}$$

とおいて、式(2.2.4)に代入して特性方程式を求めると、

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_o\lambda + {\omega_o}^2 = 0 \tag{2.2.6}$$

この2次方程式の判別式は、

$$D = \zeta^2{\omega_o}^2 - {\omega_o}^2 = {\omega_o}^2(\zeta^2 - 1) \tag{2.2.7}$$

であるので、ζの値よって、次の通りに解の種類を分類できる。

$$(1)\ \zeta = 0\,,\ (2)\ 0 < \zeta < 1\,,\ (3)\ \zeta = 1\,,\ (4)\ 1 < \zeta \tag{2.2.8}$$

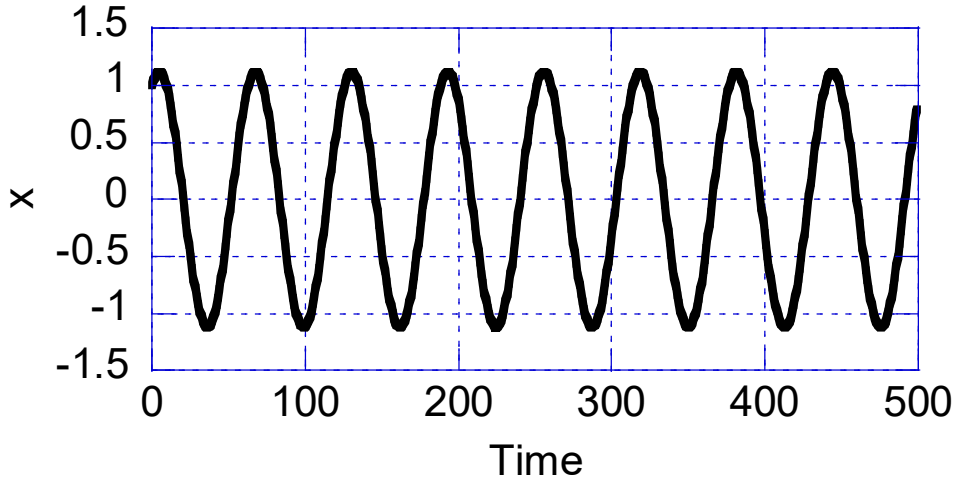
実際、次のようにζが1より小さいとλは複素数になる。

$$\begin{cases} \zeta \le 1 \text{ のとき} : \lambda = -\zeta\omega_o \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o \\ 1 \le \zeta \text{ のとき} : \lambda = -\zeta\omega_o \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_o \end{cases} \tag{2.2.9}$$

次ページ以降では、上記の (1)〜(4)の場合について、解の特徴を確認する。

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★$\zeta = 0$ のとき



$$\left[x_0 = 1\,,\, v_0 = 0.05\,,\, \omega_o = 0.1\,,\, \zeta = 0\right]$$

定常振動

$$\lambda = \left[-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right]\omega_o$$

特性根は

$$\lambda = \pm i\omega_o \tag{2.2.10}$$

一般解は

$$x = D_1 \exp(i\omega_o t) + D_2 \exp(-i\omega_o t) \tag{2.2.11}$$

整理すると、

$$x = C_1 \sin(\omega_o t) + C_2 \cos(\omega_o t) \tag{2.2.12}$$

初期条件が

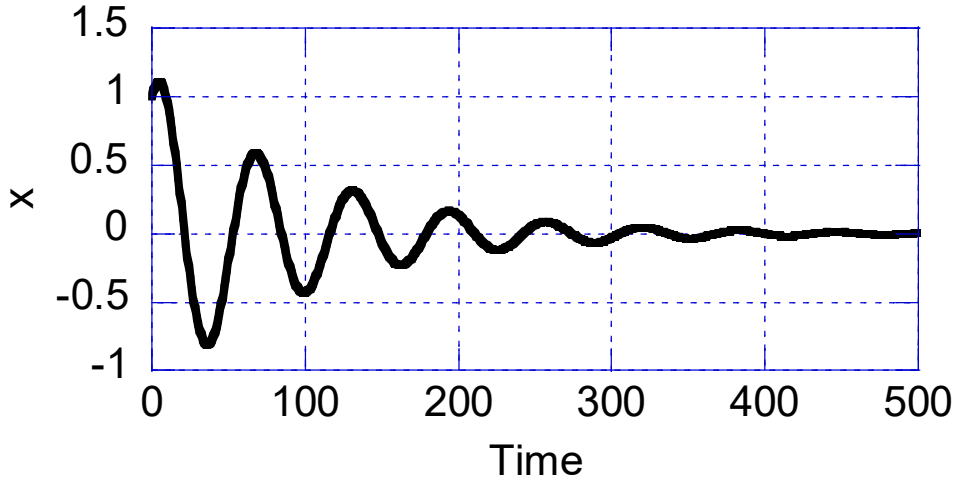
$$t = 0 : x = x_0\ ,\ \dot{x} = v_0 \tag{2.2.13}$$

のとき、解は

$$x = \frac{v_0}{\omega_o}\sin(\omega_o t) + x_0 \cos(\omega_o t) \tag{2.2.14}$$

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★$0 < \zeta < 1$ のとき



$$\left[x_0 = 1\,,\, v_0 = 0.05\,,\, \omega_o = 0.1\,,\, \zeta = 0.1\right]$$

減衰振動

$\zeta\omega_o$が大きいほど早く減衰する！

特性根は複素数となり、

$$\lambda = \left[-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right]\omega_o \tag{2.2.15}$$

一般解は

$$\begin{aligned} x &= D_1 \exp\left[(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_o t\right] \\ &\quad + D_2 \exp\left[(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_o t\right] \\ &= e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

初期条件が

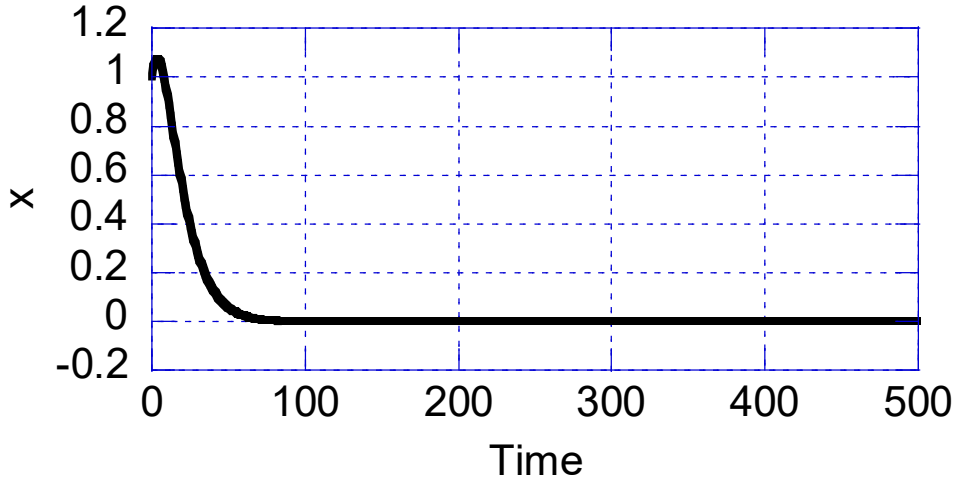
$$t = 0 : x = x_0\,,\, \dot{x} = v_0 \tag{2.2.17}$$

のとき、解は

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left[\begin{array}{l} \dfrac{v_0 + \zeta\omega_o x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) \\ \quad + x_0 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) \end{array}\right] \tag{2.2.18}$$

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★$\zeta = 1$ のとき



$$\left[x_0 = 1\,,\, v_0 = 0.05\,,\, \omega_o = 0.1\,,\, \zeta = 1\right]$$

臨界減衰

$$\lambda = \left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\omega_o$$

特性根は重根となり、

$$\lambda = -\zeta\omega_o \tag{2.2.19}$$

一般解は

$$x = e^{-\omega_o t}(A_1 t + A_2) \tag{2.2.20}$$

初期条件が

$$t = 0 : x = x_0\,,\, \dot{x} = v_0 \tag{2.2.21}$$

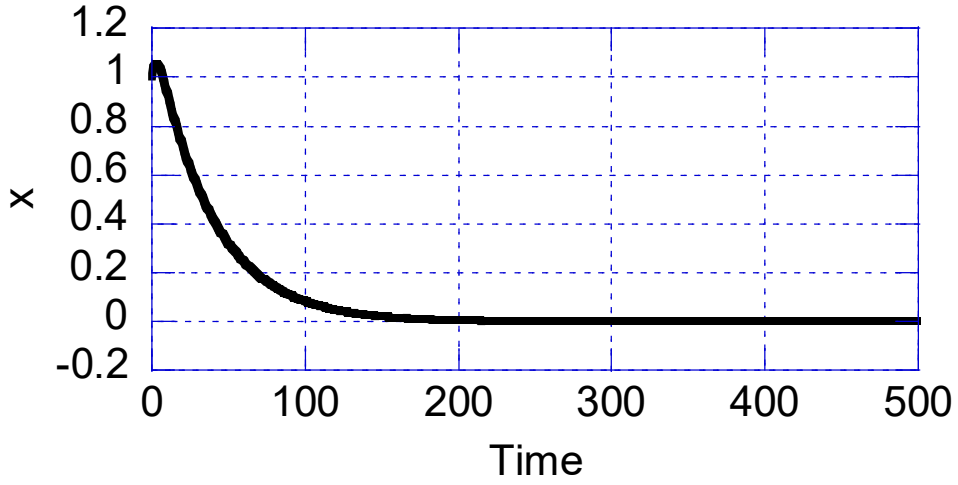
のとき、解は

$$x = e^{-\omega_o t}\left[(v_0 + \omega_o x_0)t + x_0\right] \tag{2.2.22}$$

※ ちなみに、式(2.2.18)から(2.2.22)を導くことはできますか？

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★$\zeta > 1$ のとき



$$\left[x_0 = 1\,,\, v_0 = 0.05\,,\, \omega_o = 0.1\,,\, \zeta = 2\right]$$

過減衰

※ 例えば，スポンジは過減衰

特性根は2つとも負の実数で、

$$\lambda = \left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\omega_o \tag{2.2.23}$$

一般解は

$$\begin{aligned} x &= D_1 \exp\left[(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_o t\right] \\ &\quad + D_2 \exp\left[(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_o t\right] \\ &= e^{-\zeta\omega_o t}\begin{bmatrix} C_1 \sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_o t\right) \\ +C_2 \cosh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_o t\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

初期条件が

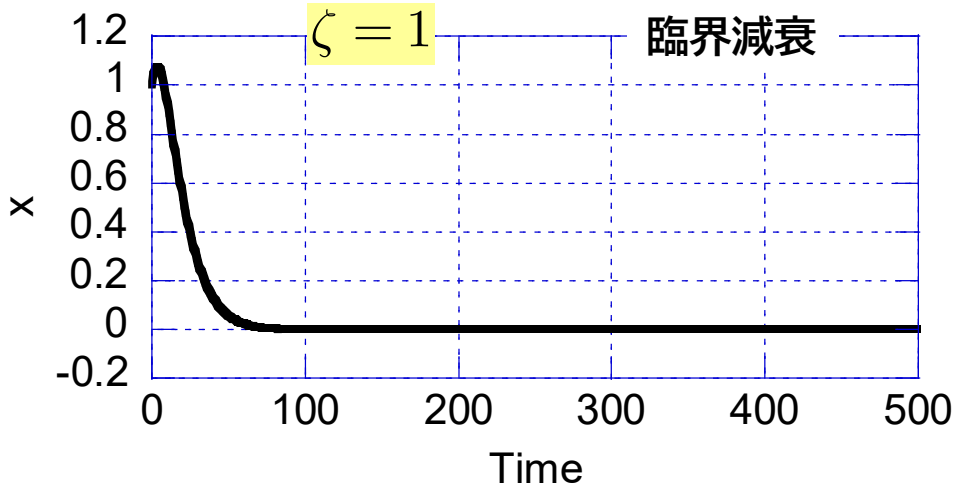
$$t = 0 : x = x_0\,,\, \dot{x} = v_0 \tag{2.2.25}$$

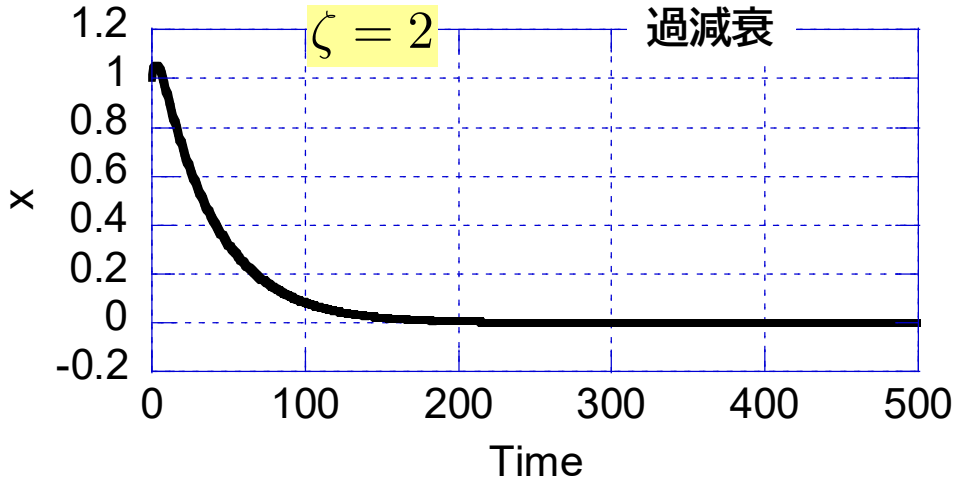
のとき、解は

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\begin{bmatrix} \dfrac{v_0 + \zeta\omega_o x_0}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_o} \sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_o t\right) \\ \quad + x_0 \cosh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_o t\right) \end{bmatrix} \tag{2.2.26}$$

バネ・マス・ダンパー系の運動（復習しましょう）

★臨界減衰の特徴





臨界減衰のときの方が早い！

臨界減衰のときは

$$x = e^{-\omega_o t}\left[v_0 t + x_0(\omega_o t + 1)\right] \tag{2.2.27}$$

過減衰のときは

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left\{ v_0 \frac{\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_o t\right)}{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_o} + x_0\left[\frac{\zeta\sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_o t\right)}{\sqrt{\zeta^2-1}} + \cosh\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_o t\right)\right]\right\} \tag{2.2.28}$$

上記のどちらの式も、オレンジやマゼンダの部分は増加関数であるが、緑の部分の減少が大きいので、全体としては減少していく。式(2.2.27)と(2.2.28)とでは、オレンジもマゼンダも、式(2.2.28)の方が大きい。したがって、全体としても、式(2.2.28)の方が大きくなる。

何かを制御をするときには、臨界減衰になるようにダンパを調節できれば、すごくいい（PD制御の基本）。

第2章のまとめ

- 1自由度線形系の自由運動は、減衰比が0以上の場合、次のように分類できる。
  1. 減衰比が0の場合、減衰はせず、定常振動を続ける。
  2. 減衰比が0より大きく、1より小さい場合、減衰振動を起こす。
  3. 減衰振動の場合、減衰比と固有振動数の積の値が大きいほど、減衰が早い。
  4. 減衰比が1以上の場合、振動はせずに減衰する。減衰比が1の場合を臨界減衰、1より大きい場合を過減衰と呼ぶ。

- 減衰比が1以上の場合、大きいほど減衰が早いわけではなく、減衰比が1のとき（臨界減衰のとき）がもっとも早く減衰する。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月21日(月)2限

第2回　1自由度線形振動

第3章　1自由度線形振動の重要性

第3章の学修目標

★ 1自由度線形振動を理解すると 何ができるようになるかを説明できる。

1自由度線形振動の重要性

★1自由度線形振動とは？

一般に、1自由度線形運動系とは、運動方程式が線形常微分方程式で記述される系を指す。運動方程式は2階の微分方程式で表されることを考えると、結局、1自由度線形運動系とは運動方程式が次式で表される系を指す。

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \tag{2.3.1}$$

これはまさに、バネ・マス・ダンパー系の運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.3.2}$$

そのものである。つまり、1自由度線形振動とは、運動方程式が式$(2.1.2)$で表される系のうち、$f(t) = 0$のときに自由運動解が振動解になる場合の運動を指す。

※ 式$(2.3.2)$が$f(t) = 0$のときに振動解をもつ条件は、第2章で復習した通り。

★多自由度線形系の運動

n自由度線形運動系の運動方程式は

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \cdots m_{1n}\ddot{x}_n \\ \quad + c_{11}\dot{x}_1 + x_{12}\dot{x}_2 + \cdots + c_{1n}\dot{x}_n \\ \quad + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1n}x_n = f_1(t) \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + \cdots m_{2n}\ddot{x}_n \\ \quad + c_{21}\dot{x}_1 + x_{22}\dot{x}_2 + \cdots + c_{2n}\dot{x}_n \\ \quad + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{2n}x_n = f_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ m_{n1}\ddot{x}_1 + m_{n2}\ddot{x}_2 + \cdots m_{nn}\ddot{x}_n \\ \quad + c_{n1}\dot{x}_1 + x_{n2}\dot{x}_2 + \cdots + c_{nn}\dot{x}_n \\ \quad + k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \cdots + k_{nn}x_n = f_n(t) \end{cases} \tag{2.3.3}$$

※ 自由度がnの場合、運動方程式はn個あるはず。

整理すると、

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{2.3.4}$$

1自由度線形振動の重要性

★多自由度線形系の運動

整理すると，

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \tag{2.3.4}$$

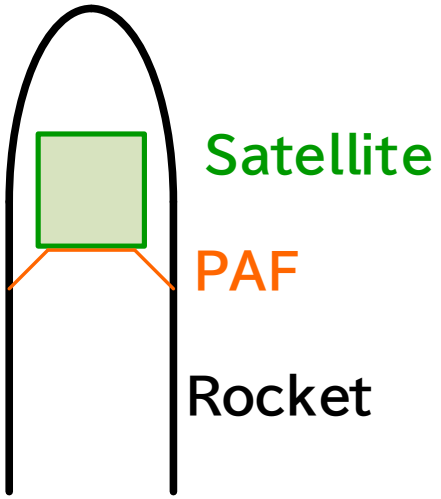
詳しくは第9章で学ぶが、この常微分方程式の解は、ある条件を満たすと、n個の1自由度線形振動系の解 $u_i(t)$ と定数ベクトル e_i を用いて、

$$x = u_1(t)e_1 + u_2(t)e_2 + \cdots + u_n(t)e_n \tag{2.3.5}$$

と書くことができる。つまり、1自由度線形振動系の解について理解していれば、任意の多自由度系（航空機だろうが、ロケットだろうが、宇宙機だろうが、建物だろうが車だろうが、何でも）の振動を理解することができる。

★振動モデルの単純化

宇宙機を打上げ機に搭載して打ち上げる場合、打ち上げ時に宇宙機に作用する振動は、宇宙機を載せている土台が振動した場合の宇宙機の振動で模擬できる。



1自由度線形振動の重要性

★多自由度線形系の運動

整理すると，

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \tag{2.3.4}$$

詳しくは第9章で学ぶが、この常微分方程式の解は、ある条件を満たすと、n個の1自由度線形振動系の解 $u_i(t)$ と定数ベクトル e_i を用いて、

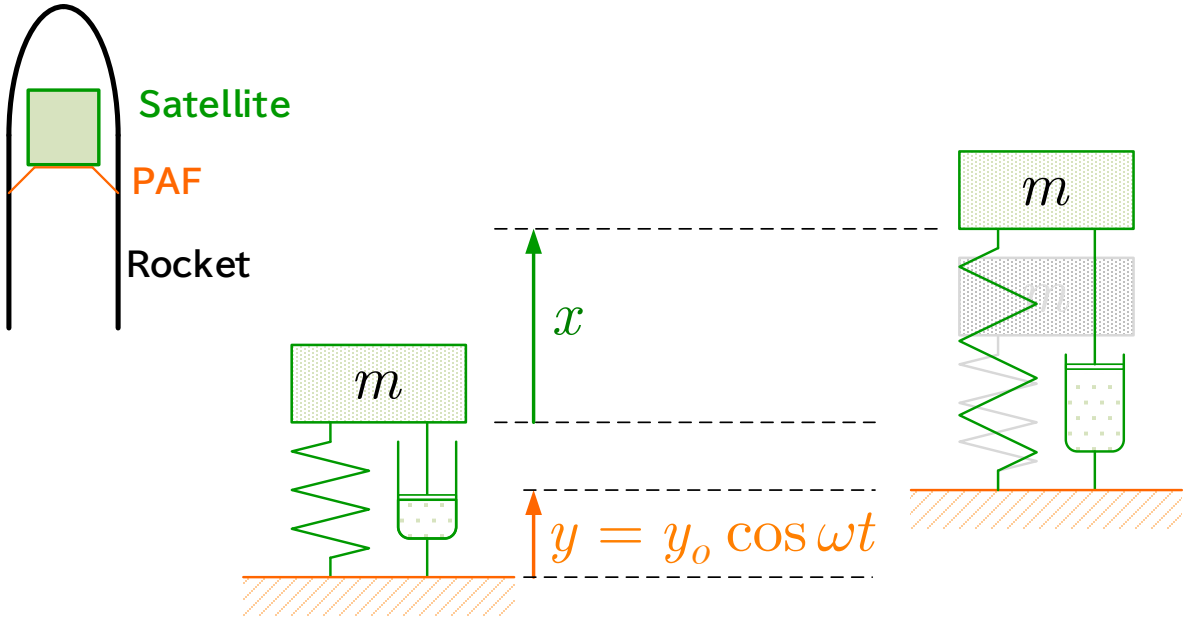
$$x = u_1(t)e_1 + u_2(t)e_2 + \cdots + u_n(t)e_n \tag{2.3.5}$$

と書くことができる。つまり、1自由度線形振動系の解について理解していれば、任意の多自由度系（航空機だろうが、ロケットだろうが、宇宙機だろうが、建物だろうが車だろうが、何でも）の振動を理解することができる。

★振動モデルの単純化

宇宙機を打上げ機に搭載して打ち上げる場合、打ち上げ時に宇宙機に作用する振動は、宇宙機を載せている土台が振動した場合の宇宙機の振動で模擬できる。

土台が振動した時の宇宙機の振動を概算する場合、まずは1次自由度振動系で近似して、宇宙機に作用する荷重等を見積もることが多い。宇宙機搭載機器の場合も同様（この場合は、土台は宇宙機本体となる）。



第3章のまとめ

- 多自由度線形系の振動は、1自由度線形振動系の和で表すことができる。したがって、1自由度線形振動系のことを理解していれば、任意の多自由度系の振動を理解することができる。
- 土台が加振される物体の振動を解析する場合、まずは物体を1自由度線形振動系で近似して、その振動の様子を調べることもよくやられる。
- したがって、何か（動くもの）を設計・開発をするには、 1自由度線形振動系について理解することが重要である。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月21日(月)2限

第2回　1自由度線形振動

第4章　自由減衰振動における状態遷移関係

第4章の学修目標

★ 運動の「状態量」および「状態遷移関係」について　説明できる。

★ 状態遷移行列について説明できる。

★ 自由振動する1自由度線形振動系の状態遷移行列を求めることができる。

運動方程式の状態方程式表現

★1自由度線形振動系の状態方程式

1自由度線形振動系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.4.1}$$

この常微分方程式は、ある時刻における位置と速度、すなわち、

$$\boldsymbol{z} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{2.4.2}$$

がわかれば解くことができて、未来の(そして，過去の)$\boldsymbol{z}$の値も求めることができる。 つまり、$\boldsymbol{z}$がこの運動の全てを司っているといえる。別の言い方をすれば、$\boldsymbol{z}$はこの運動の「状態」を表しているといえる。そこで、このように、 運動の状態を表している物理量を「状態量」と呼び、状態量の変化を支配する方程式を状態方程式と呼ぶ。

式(2.4.1)の場合，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

であるので、

$$\boldsymbol{P} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & c \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{F} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{2.4.4}$$

とおけば、

$$\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F} \tag{2.4.5}$$

これが、1自由度線形振動系の状態方程式である。

また、式(2.4.1)は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \quad , \quad \alpha(t) \equiv \frac{f(t)}{m} \tag{2.4.6}$$

と変形できて、

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -{\omega_o}^2 & -2\zeta\omega_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \tag{2.4.7}$$

運動方程式の状態方程式表現

★1自由度線形振動系の状態方程式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -{\omega_o}^2 & -2\zeta\omega_o\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \alpha(t)\end{bmatrix} \tag{2.4.7}$$

したがって、

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\ -{\omega_o}^2 & 2\zeta\omega_o\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}(t)\equiv\begin{bmatrix}0\\ \alpha(t)\end{bmatrix} \tag{2.4.8}$$

として、状態方程式は次のようにも書ける。

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}(t) \tag{2.4.9}$$

ちなみに、この式は一般的な線形微分方程式そのもの。

※ 一般的には、線形微分方程式の解析解を求めることはできるものの（第3回の授業を参照）、かなり手間がかかるので、数値計算で解く（すなわち、時々刻々の値を数値的に求める）ことが多い。
　ただし、 $b(t)=0$ の場合であれば、$\boldsymbol{A}$ がどんな行列であっても、比較的簡単に解くことができる （解けますか？）。

★自由運動の場合の状態量の解

自由運動の場合，運動方程式は

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_o\dot{x}+{\omega_o}^2x=0 \tag{2.2.4}$$

であり，初期値が $x(0)=x_0$ 、$\dot{x}(0)=v_0$ の場合、 減衰振動解は

$$x=e^{-\zeta\omega_o t}\left[\begin{array}{l}\dfrac{v_0+\zeta\omega_o x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\\ \qquad +x_0\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\end{array}\right] \tag{2.2.18}$$

つまり、

$$\begin{aligned}x=e^{-\zeta\omega_o t}&\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)+\zeta\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]x_0\\ &+e^{-\zeta\omega_o t}\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o}v_0\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

この式から速度を求めると、

運動方程式の状態方程式表現

★状態量の解

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + \zeta\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]x_0 + e^{-\zeta\omega_o t}\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o}v_0 \tag{2.4.10}$$

この式から速度を求めると、

$$\dot{x} = -\omega_o e^{-\zeta\omega_o t}\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}x_0 + e^{-\zeta\omega_o t}\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) - \zeta\frac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]v_0 \tag{2.4.11}$$

これらを整理すると、

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{z}_0 \tag{2.4.12}$$

ただし、z_0 は時刻 $t = 0$ での状態量、すなわち、

$$\boldsymbol{z}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{2.4.13}$$

であり、

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) \\ x_2(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t)+\zeta x_2(t) & \dfrac{1}{\omega_o}x_2(t) \\ -\omega_o x_2(t) & x_1(t)-\zeta x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

したがって、ある時刻 $t = t_s$ での値を z_s とすれば、

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{z}_s \tag{2.4.15}$$

つまり、 ある時刻 $t = t_s$ での状態量の値 z_s がわかっていれば、過去も含めて、任意の時刻の状態量の値がわかる！

自由減衰振動の状態遷移関係

★実際の物体の振動は？

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{z}_s \tag{2.4.15}$$

減衰係数 c やバネ定数 k の値は状態量の値によって変化する場合もある。 つまり、ζ や ω_0 (特に、ζ)が z の値によって変化する場合がある。 式(2.4.15)は、ζ や ω_o が一定であることを前提に導いているので、 そのままでは使えない場合もある。

その場合には、

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}(t_s + \Delta t) = \boldsymbol{B}(\Delta t)\boldsymbol{z}_s \\ \zeta = \zeta(\boldsymbol{z}_s) \quad , \quad \omega_o = \omega_o(\boldsymbol{z}_s) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

として, 時刻 t_s から短い時間 Δt だけ先の時刻での z の値 $z(t_s + \Delta t)$ を出して、その値のときの ζ や ω_0 を使って再び B を計算し直して、式(2.4.16)を使う。

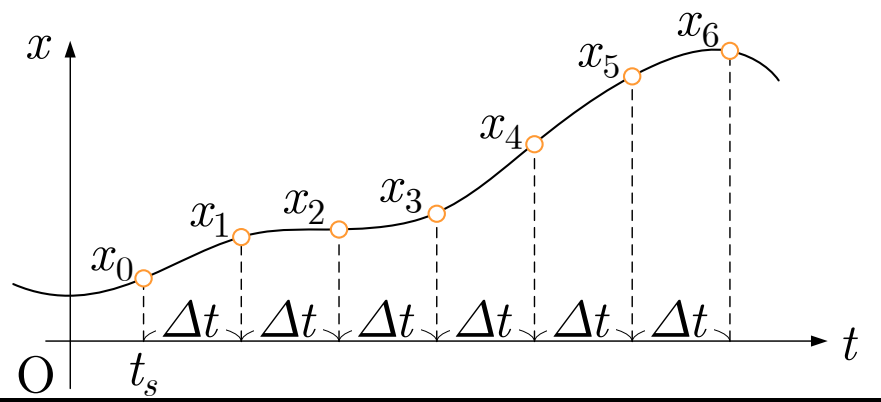
つまり、例えば、

$$\begin{cases} t_n \equiv t_s + n\Delta t \quad , \quad \boldsymbol{z}_n \equiv \boldsymbol{z}(t_n) \\ \zeta \equiv \zeta(\boldsymbol{z}_n) \quad , \quad \omega \equiv \omega_o(\boldsymbol{z}_n) \\ \boldsymbol{P}_n \equiv \boldsymbol{B}(\Delta t) \end{cases} \tag{2.4.17}$$

として、

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{z}_n \tag{2.4.18}$$

式(2.4.18)は、 ある時刻 t_n での状態量 z_n と次の状態量 z_{n+1} との関係、つまり, 状態量がどのように変化していくかを表している。 このような関係は、一般に, 状態遷移関係と呼ばれ、P_n は状態遷移行列と呼ばれる。



運動方程式の一般解

★ちなみに・・・

状態量の解

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{z}_s \tag{2.4.15}$$

において、$\boldsymbol{z}_s$ はどんな値でもよい。 別の言い方をすれば、常微分方程式

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = 0 \tag{2.2.4}$$

の**一般解**は、$\boldsymbol{q}$ を任意の定数ベクトル、t_s を任意の定数として、

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{q} \tag{2.4.19}$$

と書ける。そして、

$$\boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{I} \tag{2.4.20}$$

であることから、初期値が

$$\boldsymbol{z}(t_s) = \boldsymbol{z}_s \tag{2.4.21}$$

と与えられると、

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{z}_s \tag{2.4.22}$$

であることがわかり、式$(2.4.15)$が導かれるわけである。

【例題2.4.1】減衰比が0.01、固有振動数が$60\,\mathrm{Hz}$であるバネ・マス・ダンパー系がある。 時刻$t = 2.0\,\mathrm{sec}$のときの変位が$3.0\mathrm{mm}$、速度が$4.0\mathrm{mm}\,/\,\mathrm{sec}$であるとき、$t = 12.0\,\mathrm{sec}$のときの変位を求めなさい。

第4章のまとめ

- 運動の状態を決定する物理量で、ある時刻におけるその物理量が与えられれば未来のその物理量がわかる場合、その物理量を状態量と呼ぶ。
- 状態量の変化を支配する方程式を状態方程式と呼ぶ。
- 1自由度線形振動系の状態量は $z \equiv \left[x\,,\dot{x}\right]^T$ であり、式$(2.4.13)$で与えられる $B(t)$ を用いて、

$$\begin{cases} t_n \equiv t_s + n\Delta t \quad , \quad \boldsymbol{z}_n \equiv \boldsymbol{z}(t_n) \\ \zeta \equiv \zeta(\boldsymbol{z}_n) \quad , \quad \omega_o \equiv \omega_o(\boldsymbol{z}_n) \quad , \quad \boldsymbol{P}_n \equiv \boldsymbol{B}(\Delta t) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

とおけば、

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}_n \boldsymbol{z}_n \tag{2.4.17}$$

と書ける。この関係式は状態遷移関係と呼ばれ、P_n は状態遷移行列と呼ばれる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第2回　　1自由度線形振動

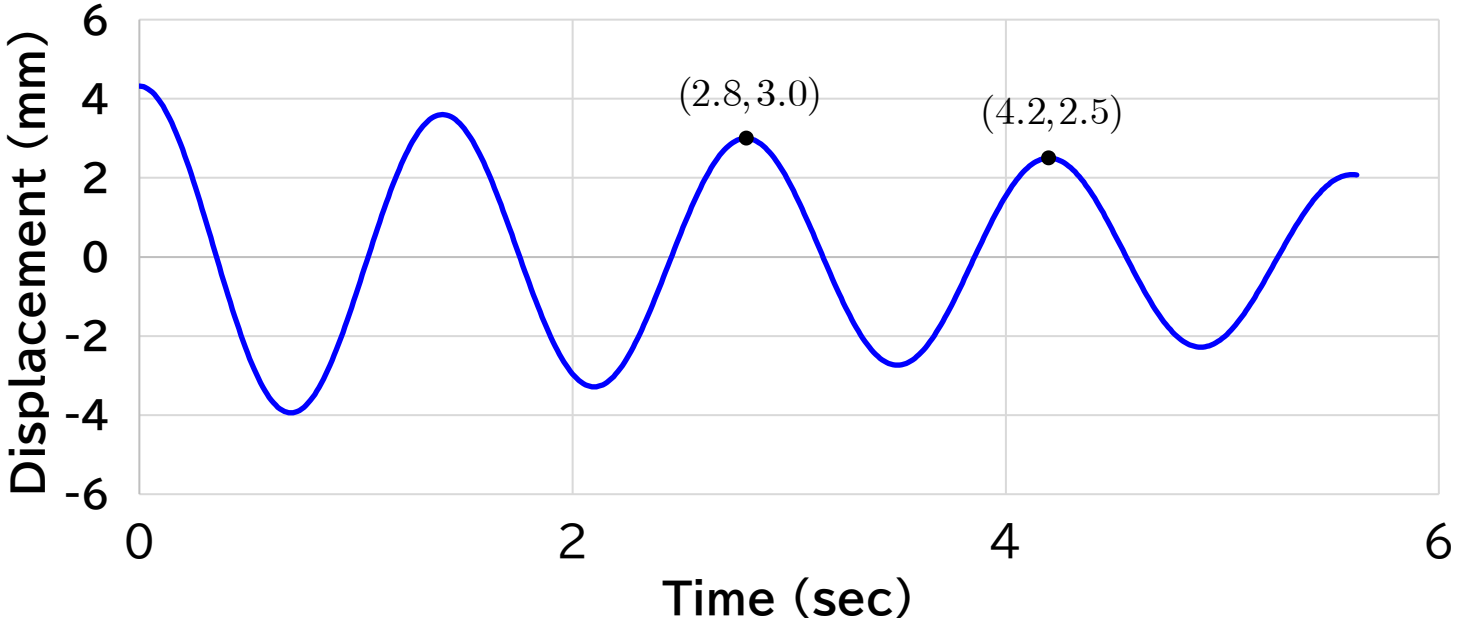
2025年4月21日(月)2限

課題

2024年4月27日(日)18時00分締切

[1] 粘性減衰比が$\zeta = 0.02$、固有振動数が$f_o = 0.1\mathrm{Hz}$である1自由度減衰振動系があり、 時刻$t = 0$において、変位を$20\mathrm{mm}$、速度を$30\mathrm{mm}\ /\ \mathrm{sec}$として自由振動させた。時刻$t = 20\,\mathrm{sec}$における速度を求めなさい。(2点)

[2] 1自由度減衰振動系を自由振動させたところ、以下の図のような変位データを得た。 固有振動数と粘性減衰比を求めなさい。(3点)



振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第2回　1自由度線形振動

おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移

宮崎 康行

miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第3回の学修目標

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系の解析解を積分形式で求めることができる。

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系の解析解をフーリエ級数展開を用いて求めることができる。

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系の近似解を求めることができる。

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系における状態遷移関係を求めることができる。

第3回の全体構成

第1章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の積分形式の解析解

第2章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系のフーリエ級数展開を用いた解析解

第3章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の近似解

第4章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移関係

感想、課題

第1章と第2章は、「そういうものがあるんだな」という程度に思ってくれればOKです。

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移

第1章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の積分形式の解析解

第1章の学修目標

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系の積分形式の解析解を求めることができる。

線形常微分方程式の一般解

★斉次解と特殊解

一般に、第2回第3章で扱ったような線形常微分方程式

$$
\begin{cases}
m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \cdots m_{1n}\ddot{x}_n \\
\quad + c_{11}\dot{x}_1 + c_{12}\dot{x}_2 + \cdots + c_{1n}\dot{x}_n \\
\quad + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1n}x_n = f_1(t) \\
m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + \cdots m_{2n}\ddot{x}_n \\
\quad + c_{21}\dot{x}_1 + c_{22}\dot{x}_2 + \cdots + c_{2n}\dot{x}_n \\
\quad + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{2n}x_n = f_2(t) \\
\qquad\qquad \vdots \\
m_{n1}\ddot{x}_1 + m_{n2}\ddot{x}_2 + \cdots m_{nn}\ddot{x}_n \\
\quad + c_{n1}\dot{x}_1 + c_{n2}\dot{x}_2 + \cdots + c_{nn}\dot{x}_n \\
\quad + k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \cdots + k_{nn}x_n = f_n(t)
\end{cases}
\tag{2.3.3}
$$

の一般解は、斉次解と特殊解（特解）の和で表される。つまり、式(2.3.3)の右辺が全て0、つまり、 $f_i(t) = 0$ であるときの一般解（**斉次解**）を $\tilde{x}_i(t)$ とし、式(2.3.3)を満たす**特殊解の1つ** （なんでもいいので、とにかく、なにか1つ）を $x_i^*(t)$ とすれば、式(2.3.3)の一般解は、

$$
x_i(t) = \tilde{x}_i(t) + x_i^*(t) \tag{3.1.1}
$$

と書ける。

1自由度線形振動系の解

★外力が作用する場合の解

qがどういうものであったか、覚えていますか？

1自由度線形振動系の場合、運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

と書けて、斉次解、つまり、

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = 0 \tag{3.1.3}$$

の状態量の一般解は、qを定数とし、

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) \\ x_2(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ B_{11} = B_{11}(t) \equiv x_1(t) + \zeta x_2(t) \\ B_{12} = B_{12}(t) \equiv \dfrac{1}{\omega_o}x_2(t)\,, \quad B_{21} = B_{21}(t) \equiv -\omega_o x_2(t) \\ B_{22} = B_{22}(t) \equiv x_1(t) - \zeta x_2(t) \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t) \equiv \begin{bmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

として、

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{q} \tag{3.1.4}$$

また、斉次解は

$$\tilde{x} = e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] \tag{3.1.5}$$

とも書けた。つまり、

$$\tilde{x}(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{3.1.6}$$

一般に、 線形微分方程式の解が式(3.1.7)のように複数の関数の線形和で書ける場合、特殊解は、t_s を定数として、

$$\begin{aligned} x^*(t, t_s) = &\left[\int_{t_s}^{t} \frac{x_1(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau) - x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}\,d\tau\right]x_2(t) \\ &-\left[\int_{t_s}^{t} \frac{x_2(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau) - x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}\,d\tau\right]x_1(t) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

と書けることが知られている。よって，

1自由度線形振動系の解

★外力が作用する場合の解

また、特殊解は、t_s を定数として、

$$x^*(t,t_s)=\left[\int_{t_s}^{t}\frac{x_1(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau)-x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}d\tau\right]x_2(t) -\left[\int_{t_s}^{t}\frac{x_2(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau)-x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}d\tau\right]x_1(t) \quad (3.1.7)$$

と書けることが知られている。よって，

$$\dot{x}^*(t,t_s)=\left[\int_{t_s}^{t}\frac{x_1(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau)-x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}d\tau\right]\dot{x}_2(t) -\left[\int_{t_s}^{t}\frac{x_2(\tau)\alpha(\tau)}{x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau)-x_2(\tau)\dot{x}_1(\tau)}d\tau\right]\dot{x}_1(t) \quad (3.1.8)$$

であり、

$$\boldsymbol{z}^*(t,t_s)\equiv\begin{bmatrix}x^*(t,t_s)\\ \dot{x}^*(t,t_s)\end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

とすれば、状態量の一般解は、

$$z(t)=\boldsymbol{B}(t-t_s)\boldsymbol{q}+\boldsymbol{z}^*(t,t_s) \quad (3.1.10)$$

ここで，計算してみると、

$$\boldsymbol{z}^*(t_s,t_s)=\begin{bmatrix}x^*(t_s,t_s)\\ \dot{x}^*(t_s,t_s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \quad (3.1.11)$$

となることがわかるので、式(3.1.10)より、

$$z(t_s)=\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q} \quad (3.1.12)$$

となる。よって、初期値が

$$z(t_s)=\boldsymbol{z}_s \quad (3.1.13)$$

と与えられていたとしたら、

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{z}_s \quad (3.1.14)$$

であり、したがって、式(3.1.2)の解は

$$z(t)=\boldsymbol{B}(t-t_s)\boldsymbol{z}_s+\boldsymbol{z}^*(t,t_s) \quad (3.1.15)$$

ただ、実際には、式(3.1.7)の積分は大変であるし、一般には厳密解を求めることができない。そこで、もう少し手軽な方法で求めたいところ。

第1章のまとめ

- **1自由度線形振動系**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

の一般解は、式$(2.4.13)$**の** $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t, \zeta, \omega_o)$ **と、式**$(3.1.7)$**〜**$(3.1.9)$**の** $\boldsymbol{z}^*(t, t_s)$ **を用いて、**

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t - t_s)\boldsymbol{z}_s + \boldsymbol{z}^*(t, t_s) \tag{3.1.15}$$

と書ける。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移

第2章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系のフーリエ級数展開を用いた解析解

第2章の学修目標

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系の解析解をフーリエ級数展開を用いて求めることができる。

フーリエ級数展開を用いた1自由度線形振動系の解

★外力項のフーリエ展開

1自由度線形振動系の場合、運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

と書けた。 いま、例えば、ある時間区間$[t_s, t_e]$の間の解を求めたい場合を考えてみる。 この場合、この区間で$\alpha(t)$をフーリエ級数展開すると、

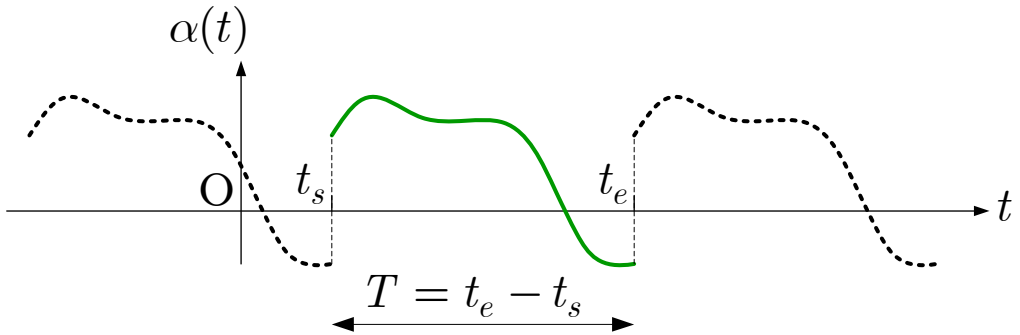
$$\alpha(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right] \tag{3.2.1}$$

ただし、

$$\begin{cases} T = t_e - t_s \\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_s}^{t_e} \alpha(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_s}^{t_e} \alpha(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \end{cases} \tag{3.2.2}$$

であり、このフーリエ展開は、$\alpha(t)$が$[t_s, t_e]$を1周期分とする周期関数であると(勝手に)仮定している。

※ なぜ、周期性を仮定しても大丈夫なのでしょうか？



このとき、特殊解は次式のようにおくことができる。

$$x^*(t) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + q_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right] \tag{3.2.3}$$

式(3.2.1)と(3.2.3)を(3.1.2)に代入して解くと、

$$\begin{cases} {\omega_o}^2\dfrac{p_0}{2} = \dfrac{a_0}{2} \\ -\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 p_n + 2\zeta\omega_o\dfrac{2\pi n}{T}q_n + {\omega_o}^2 p_n = a_n \\ -\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 q_n - 2\zeta\omega_o\dfrac{2\pi n}{T}p_n + {\omega_o}^2 q_n = b_n \end{cases} \tag{3.2.4}$$

フーリエ級数展開を用いた1自由度線形振動系の解

★外力項のフーリエ展開

$$\begin{cases} {\omega_o}^2 \dfrac{p_0}{2} = \dfrac{a_0}{2} \\ -\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 p_n + 2\zeta\omega_o \dfrac{2\pi n}{T} q_n + {\omega_o}^2 p_n = a_n \\ -\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 q_n - 2\zeta\omega_o \dfrac{2\pi n}{T} p_n + {\omega_o}^2 q_n = b_n \end{cases} \tag{3.2.4}$$

したがって、

$$D_n \equiv \left[{\omega_o}^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega_o \frac{2\pi n}{T}\right)^2 \tag{3.2.5}$$

として、

$$p_0 = \frac{a_0}{{\omega_o}^2} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \frac{1}{D_n} \begin{bmatrix} {\omega_o}^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 & -2\zeta\omega_o \dfrac{2\pi n}{T} \\ 2\zeta\omega_o \dfrac{2\pi n}{T} & {\omega_o}^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

このとき、一般解は

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] + \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + q_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\right] \tag{3.2.9}$$

ただし、C_1 および C_2 は初期値で決まる定数である。実際、

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{3.2.10}$$

という初期値が与えられた場合、C_1 と C_2 は

$$\begin{cases} C_2 + \dfrac{p_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n = x_0 \\ \sqrt{1-\zeta^2}\omega_o C_1 - \zeta\omega_o C_2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{T} q_n = v_0 \end{cases} \tag{3.2.11}$$

により求められる。

※　このやり方も、それなりに面倒。

第2章のまとめ

- **1自由度線形振動系**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o x + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

の一般解は、 $\alpha(t)$ **の時間区間** $[t_s, t_e]$ **でのフーリエ級数展開の係数** a_n **および** b_n **を用いると、式**$(3.2.6)$**、**$(3.2.7)$ **で定義される** p_n **および** q_n **と式**$(3.2.11)$**から求められる** C_1 **および** C_2 **を用いて、**

$$x = e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] + \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + q_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right] \tag{3.2.9}$$

と書ける。

第3章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の近似解

第3章の学修目標

★ 任意の外力が作用する１自由度線形振動系の近似解を求めることができる。

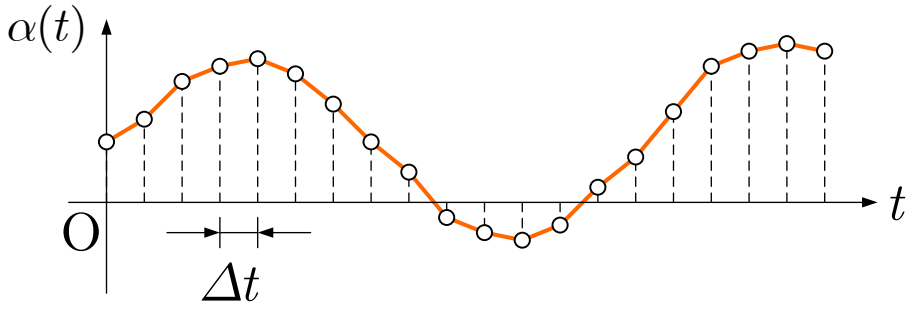
外力が作用する1自由度線形振動系

★サンプリングタイムごとに近似解を求めればよい

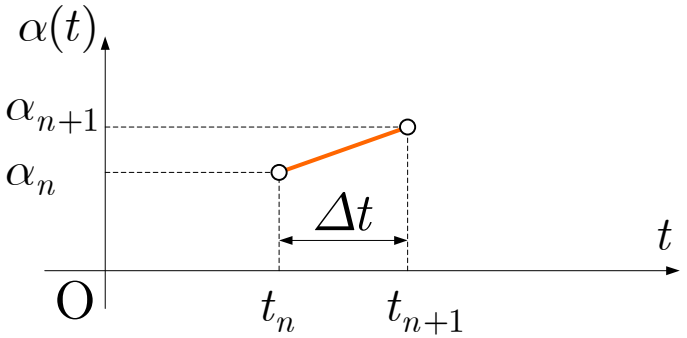
解くべき式は

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o x + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

$\alpha(t)$の値をΔt毎にサンプリングした場合、



時刻$t_n = n\Delta t$からt_{n+1}までの外力の値を直線近似してみる。



このとき、時間区間$t_n \le t \le t_{n+1}$では、

$$\alpha(t) \approx \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}(t - t_n) + \alpha_n \tag{3.3.1}$$

したがって、

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}(t - t_n) + \alpha_n \tag{3.3.2}$$

特殊解$x^*(t)$は以下の形をしていると予想できる。

$$x^* = p(t - t_n) + q \tag{3.3.3}$$

これを実際に式(3.3.2)に代入すると、

$$2\zeta\omega_o p + {\omega_o}^2\left[p(t - t_n) + q\right] = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}(t - t_n) + \alpha_n \tag{3.3.4}$$

したがって、

$$p = \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{{\omega_o}^2 \Delta t}, \quad q = \frac{\alpha_n}{{\omega_o}^2} - 2\zeta\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{{\omega_o}^3 \Delta t} \tag{3.3.5}$$

外力が作用する1自由度線形振動系

★サンプリングタイムごとに近似解を求めればよい

このとき、状態量の特殊解は

$$
\begin{aligned}
z^*(t) &= \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \dot{x}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t-t_n)+q \\ p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{{\omega_o}^2\Delta t}(t-t_n) + \dfrac{\alpha_n}{{\omega_o}^2} - 2\zeta\dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{{\omega_o}^3\Delta t} \\ \dfrac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{{\omega_o}^2\Delta t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(-\dfrac{t-t_n}{{\omega_o}^2\Delta t} + \dfrac{1}{{\omega_o}^2} + 2\zeta\dfrac{1}{{\omega_o}^3\Delta t}\right) & \left(\dfrac{t-t_n}{{\omega_o}^2\Delta t} - 2\zeta\dfrac{1}{{\omega_o}^3\Delta t}\right) \\ -\dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t} & \dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \\
&\equiv \boldsymbol{D}(t-t_n)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(t) &\equiv \\
&\begin{bmatrix} \left(-\dfrac{t}{{\omega_o}^2\Delta t} + \dfrac{1}{{\omega_o}^2} + 2\zeta\dfrac{1}{{\omega_o}^3\Delta t}\right) & \left(\dfrac{t}{{\omega_o}^2\Delta t} - 2\zeta\dfrac{1}{{\omega_o}^3\Delta t}\right) \\ -\dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t} & \dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\begin{bmatrix} -\left(t-\Delta t-\dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right) & \left(t-\dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \equiv \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (3.3.8)
$$

一方，斉次解は、式(2.4.19)より、

$$
\tilde{z}(t) = \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{q} \qquad (3.3.9)
$$

と書けるので、一般解は

$$
\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}(t-t_n)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \qquad (3.3.10)
$$

外力が作用する1自由度線形振動系

★サンプリングタイムごとに近似解を求めればよい

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}(t-t_n)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \tag{3.3.10}$$

初期条件は

$$\boldsymbol{z}(t_n) = \boldsymbol{z}_n \tag{3.3.11}$$

であるので、

$$\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}(0)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{D}(0)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \tag{3.3.12}$$

したがって、

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{D}(0)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \tag{3.3.13}$$

であり、$t_n \le t \le t_{n+1}$ の範囲内での状態量の近似解は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t) &= \boldsymbol{B}(t-t_n)\left[\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{D}(0)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n}\right] + \boldsymbol{D}(t-t_n)\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \\ &= \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{z}_n + \left[\boldsymbol{D}(t-t_n) - \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{D}(0)\right]\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n}\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

ちなみに、$\Delta t \equiv t_{n+1} - t_n$ として、

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right) \\ x_2(t) \equiv e^{-\zeta\omega_o t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t)+\zeta x_2(t) & \dfrac{1}{\omega_o}x_2(t) \\ -\omega_o x_2(t) & x_1(t)-\zeta x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

$$\boldsymbol{D}(t) = \frac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\begin{bmatrix} -\left(t-\Delta t-\dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right) & \left(t-\dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

第3章のまとめ

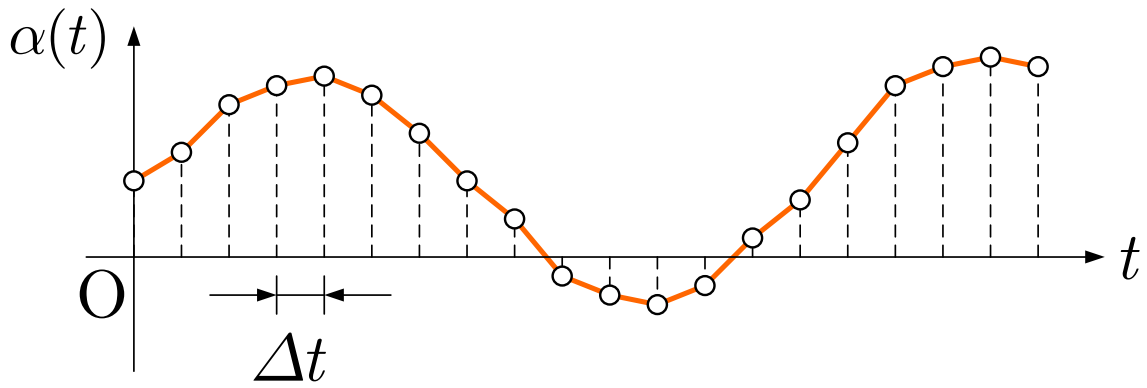
- **1自由度線形振動系**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \qquad (3.1.2)$$

において、時間区間$[t_n, t_{n+1}]$**で**$\alpha(t)$**を直線近似すると、この区間での近似解は, 式**$(2.4.13)$**で定義される**$\boldsymbol{B}(t)$**と、式**$(3.3.6)$**で定義される**$D(t)$**と**$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n}$**を用いて、**

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{z}_n + \left[\boldsymbol{D}(t-t_n) - \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{D}(0)\right]\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \qquad (3.3.14)$$

と書ける。



第4章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移関係

第4章の学修目標

★ 任意の外力が作用する 1自由度線形振動系における状態遷移関係を求めることができる。

外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移関係

★区分区間の直線近似解から求めると・・・

第3章の結果

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{z}_n + \left[\boldsymbol{D}(t-t_n) - \boldsymbol{B}(t-t_n)\boldsymbol{D}(0)\right]\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \tag{3.3.12}$$

より、$t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$ のとき、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}_{n+1} &= \boldsymbol{B}(\Delta t)\boldsymbol{z}_n + \left[\boldsymbol{D}(\Delta t) - \boldsymbol{B}(\Delta t)\boldsymbol{D}(0)\right]\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \\ &\equiv \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n}\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ただし、

$$\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{B}(\Delta t) \quad , \quad \boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{D}(\Delta t) - \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}(0) \tag{3.4.2}$$

もし、ζ や ω_o が z の値によって変化する場合は、$\boldsymbol{P}$ や $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{P}_n$ や $\boldsymbol{Q}_n$ と表現されるべきものとなる。

ちなみに、$\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{Q}$ の具体的な表現は、

$$\begin{cases} c \equiv e^{-\zeta\omega_o\Delta t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o\Delta t\right) \\ s \equiv e^{-\zeta\omega_o\Delta t}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o\Delta t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \tag{3.4.3}$$

として、

$$\begin{cases} P_{11} \equiv c + \zeta s \ , \ P_{12} \equiv \dfrac{1}{\omega_o}s \\ P_{21} \equiv -\omega_o s \ , \ P_{22} \equiv c - \zeta s \end{cases} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{cases} Q_{11} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\left[\dfrac{2\zeta(1-P_{11})}{\omega_o} + P_{12} - P_{11}\Delta t\right] \\ Q_{12} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\left[\Delta t - P_{12} - \dfrac{2\zeta(1-P_{11})}{\omega_o}\right] \\ Q_{21} \equiv -\dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\left[1 - P_{22} + P_{21}\left(\Delta t + \dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right)\right] \\ Q_{22} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2\Delta t}\left(1 - P_{22} + \dfrac{2\zeta}{\omega_o}P_{21}\right) \end{cases} \tag{3.4.5}$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} \equiv \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

【例題3.4.1】減衰比が 0.03 、固有振動数が $4\,\mathrm{Hz}$ であるバネ・マス・ダンパー系の $\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{Q}$ を求めなさい。ただし、$\Delta t = 0.2\,\mathrm{sec}$ とする。

第4章のまとめ

- 1自由度線形振動系

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \alpha(t) \tag{3.1.2}$$

において、時間区間$[t_n, t_{n+1}]$で$\alpha(t)$を直線近似すると、この区間での状態遷移関係は、式$(3.4.3)$〜$(3.4.6)$で定義される$\boldsymbol{P}$と$\boldsymbol{Q}$を用いて、

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \tag{3.4.1}$$

と書ける。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年4月28日(月)2限

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移

課題

2024年5月4日(日)18時00分締切

[1] ある1自由度減衰振動系の質点に作用する荷重 f のデータを $\Delta t = 0.1\,\mathrm{sec}$ の時間刻みで取得したところ、以下の表のようになった。　計測開始時には質点の変位と速度は 0 であったとして、計測開始から 1.1 秒後の変位を予測しなさい。ただし、質点の質量は $0.5\mathrm{kg}$、系の固有振動数は $3.5\mathrm{Hz}$、粘性減衰比は 0.012 であるとする。

時刻[sec]	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
荷重[N]	2.0	2.1	2.15	2.2	2.3	2.25	2.15	2.1	2.0	1.9	1.75	1.55

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第4回の学修目標

★ ロケットの振動源について例を挙げることができる。

★ 人工衛星の振動源について例を挙げることができる。

★ 宇宙機の強度設計と振動解析との関係について、例を挙げることができる。

第4回の全体構成

第1章　ロケットの振動源

第2章　人工衛星の振動源

第3章　人工衛星の打ち上げ時の機械環境

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月5日(月)2限

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

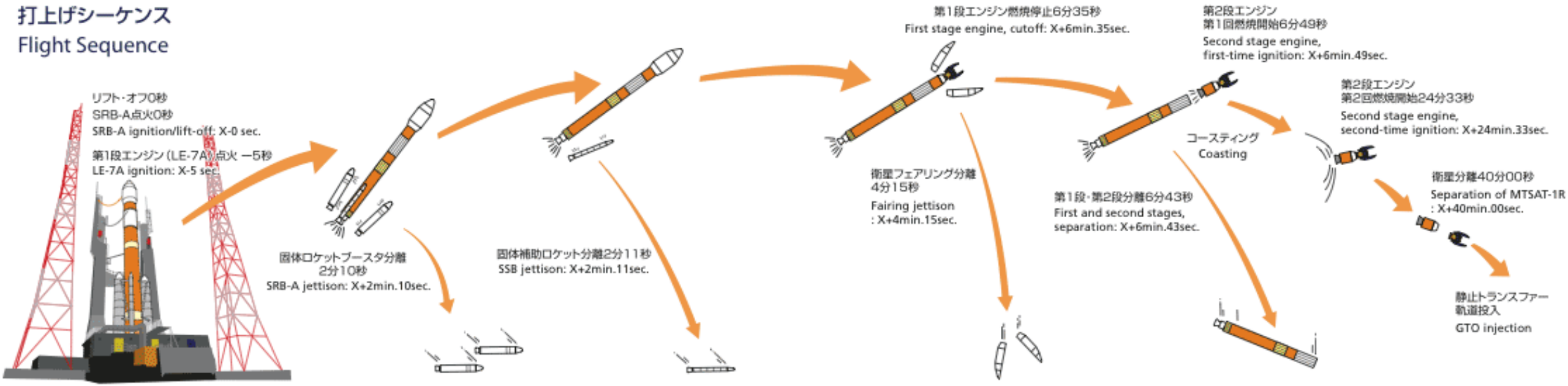
第1章　ロケットの振動源

第1章の学修目標

★ ロケットの打ち上げ時における機体の振動源について、例を挙げることできる。

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある

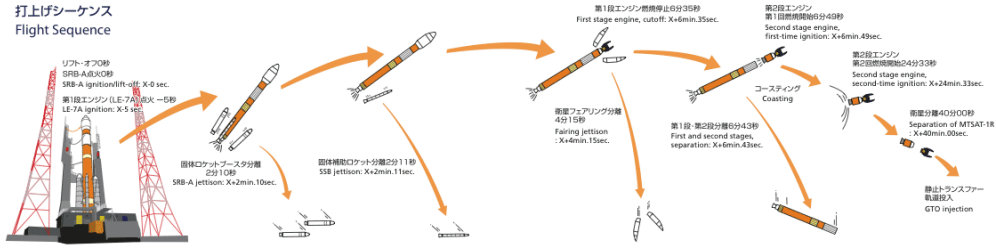


https://www.jaxa.jp/projects/rockets/h2a/f7/sequence_j.html

打上げシーケンス

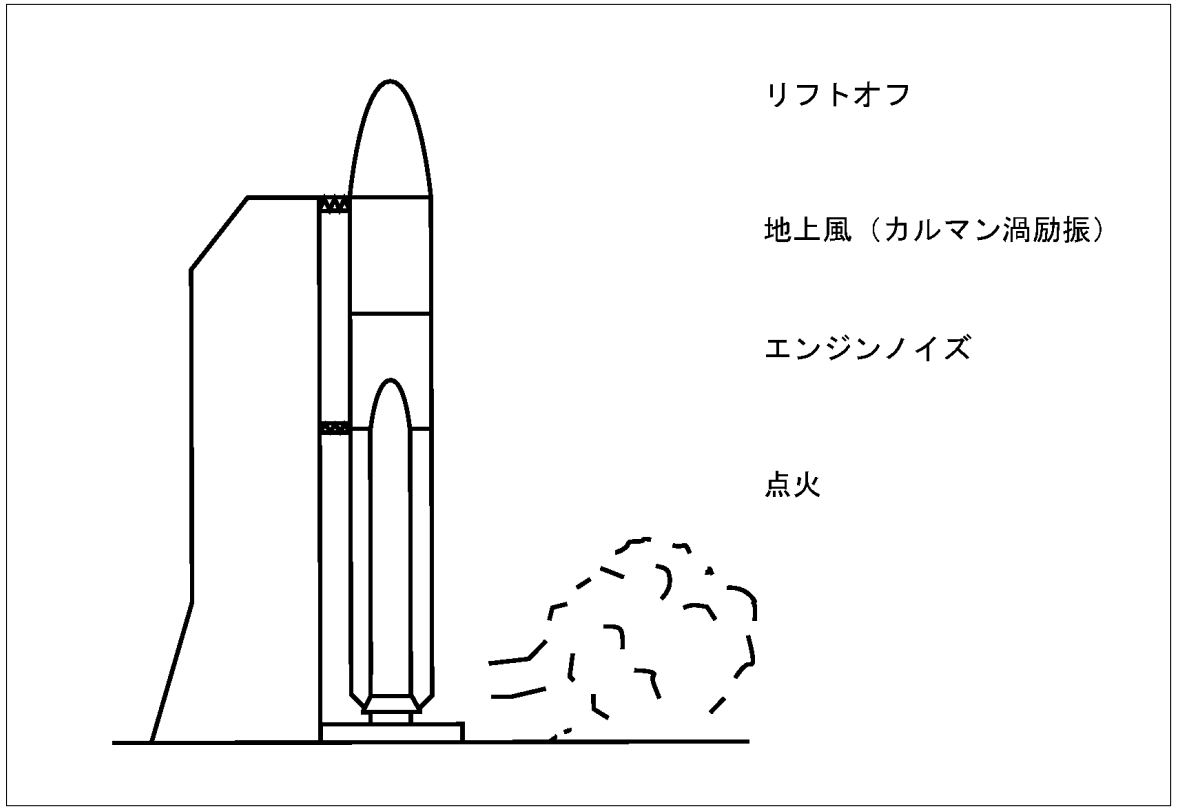
★各フェーズで振動が起こる可能性がある

	事象 Event	打上げ後経過時間 Mission elapsed time	高度 Altitude	慣性速度 Inertial velocity
		時 hr. 0 分 min. 0 秒 sec.	0 km	0.4 km/s
1	リフトオフ Lift off			
2	固体補助ロケット点火 SSB ignition	0 46	6	0.6
3	固体補助ロケット燃焼終了 SSB, burnout	1 45	38	1.6
4	固体ロケットブースタ燃焼終了 SRB-A, burnout	2 8	57	1.7
5	固体ロケットブースタ分離 SRB-A jettison	2 10	59	1.7
6	固体補助ロケット分離 SSB jettison	2 11	60	1.7
7	衛星フェアリング分離 Faring jettison	4 15	138	2.7
8	第1段主エンジン燃焼停止 First stage engine, cutoff (MECO)	6 35	216	5.2
9	第1段・第2段分離 First and second stages, separation	6 43	222	5.2
10	第2段エンジン第1回燃焼開始 Second stage engine, first-time ignition (SEIG 1)	6 49	226	5.2
11	第2段エンジン第1回燃焼停止 Second stage engine, first-time cutoff (SECO 1)	12 30	314	7.7
12	第2段エンジン第2回燃焼開始 Second stage engine, second-time ignition (SEIG 2)	24 33	258	7.7
13	第2段エンジン第2回燃焼停止 Second stage engine, second-time cutoff (SECO 2)	27 26	255	10.2
14	MTSAT-1R分離 Separation of MTSAT-1R	40 0	1979	8.9



打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある



※ 物理現象の理解と、「その現象が機体にどういう影響を与えるのか」、「その影響を設計にどう反映させればいいのか」を考えることが大切

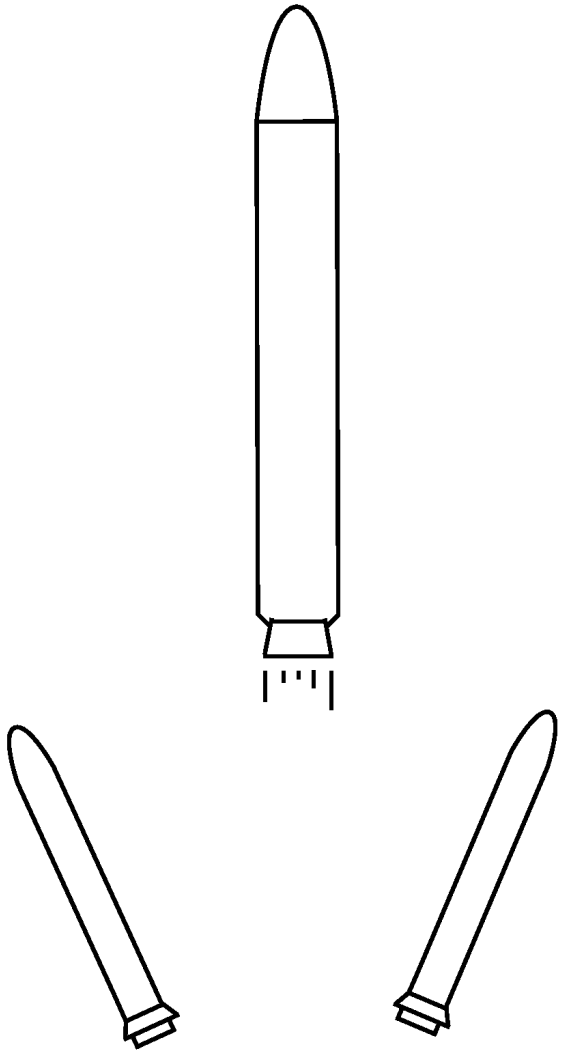
Lift off 前後

- ✓ 地震
- ✓ 風：機体全体の横振動により、機体全体（特に先端部）の曲げ
- ✓ Lift off時の地上からの離脱による反動
- ✓ 上昇時のエンジンによる振動（SRBと機体本体を結合する金具の部分のせん断が許容応力を超える可能性もある）

https://www.youtube.com/watch?v=athE2loTY1o

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある



風

バフェット

フラッタ

空力騒音

アポート（ドリームインパクト）

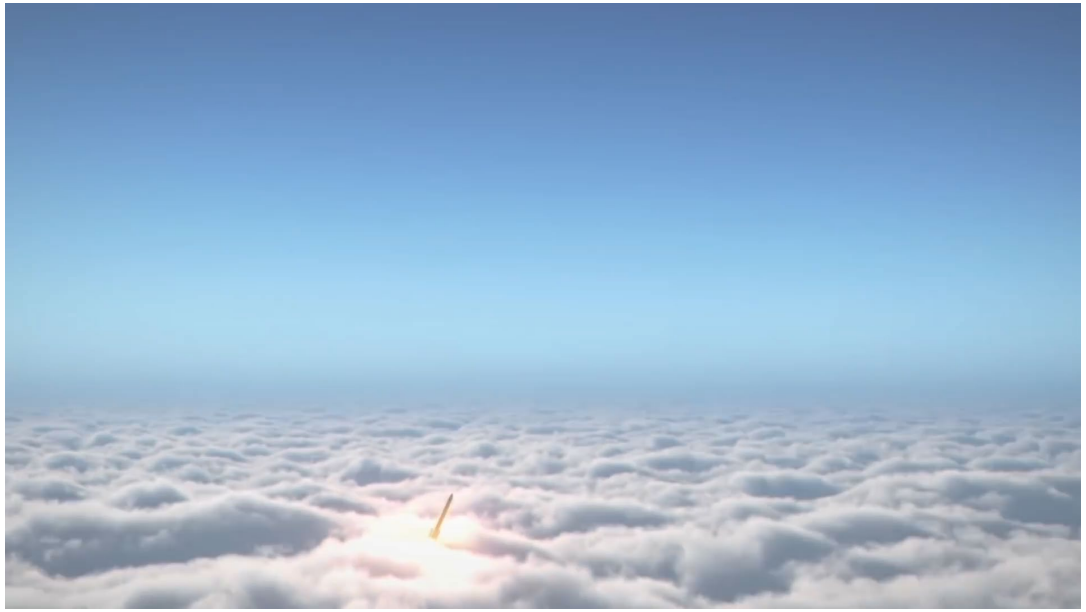
ボゴ

スロッシング

分離

SRB分離～迎角最大時

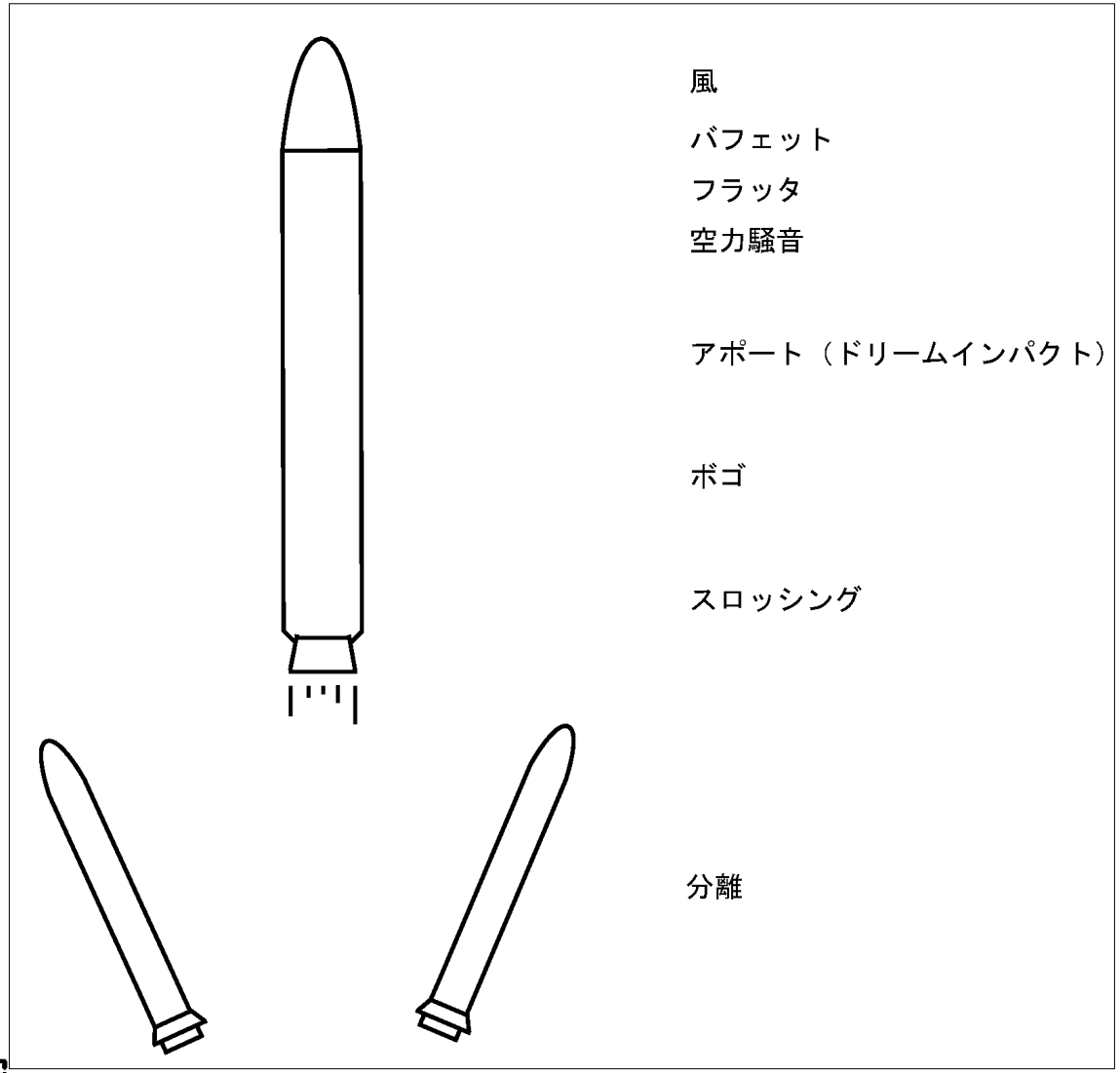
- ✓ SRB分離時の反動（衝撃荷重+振動）
- ✓ 高速バフェット（高迎角で剥離が起こって衝撃波が振動し、それによってフェアリングが振動）
- ✓ パネルフラッタ
- ✓ スロッシング、ドリームインパクト（タンク内の液体の振動）
- ✓ POGO（機体の縦振動と推進系の連成による正弦波振動）



https://www.youtube.com/watch?v=athE2loTY1o

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある



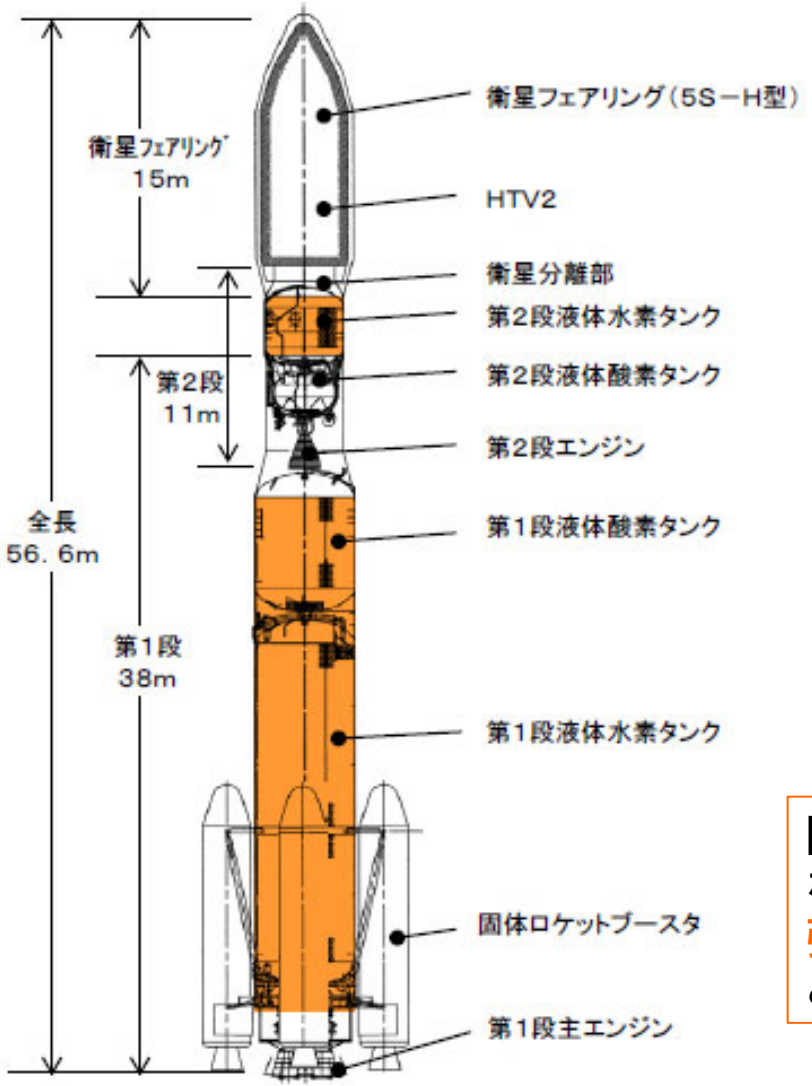
SRB分離～迎角最大時

- ✓ SRB分離時の反動（衝撃荷重+振動）
- ✓ 高速バフェット（高迎角で剥離が起こって衝撃波が振動し、それによってフェアリングが振動）
- ✓ パネルフラッタ
- ✓ スロッシング、ドリームインパクト（タンク内の液体の振動）
- ✓ POGO（機体の縦振動と推進系の連成による正弦波振動）

https://www.youtube.com/watch?v=9kIT2nJuoyk

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある



剛体なら振動は起きないが、流体や気体、弾性体だと振動が起こる。

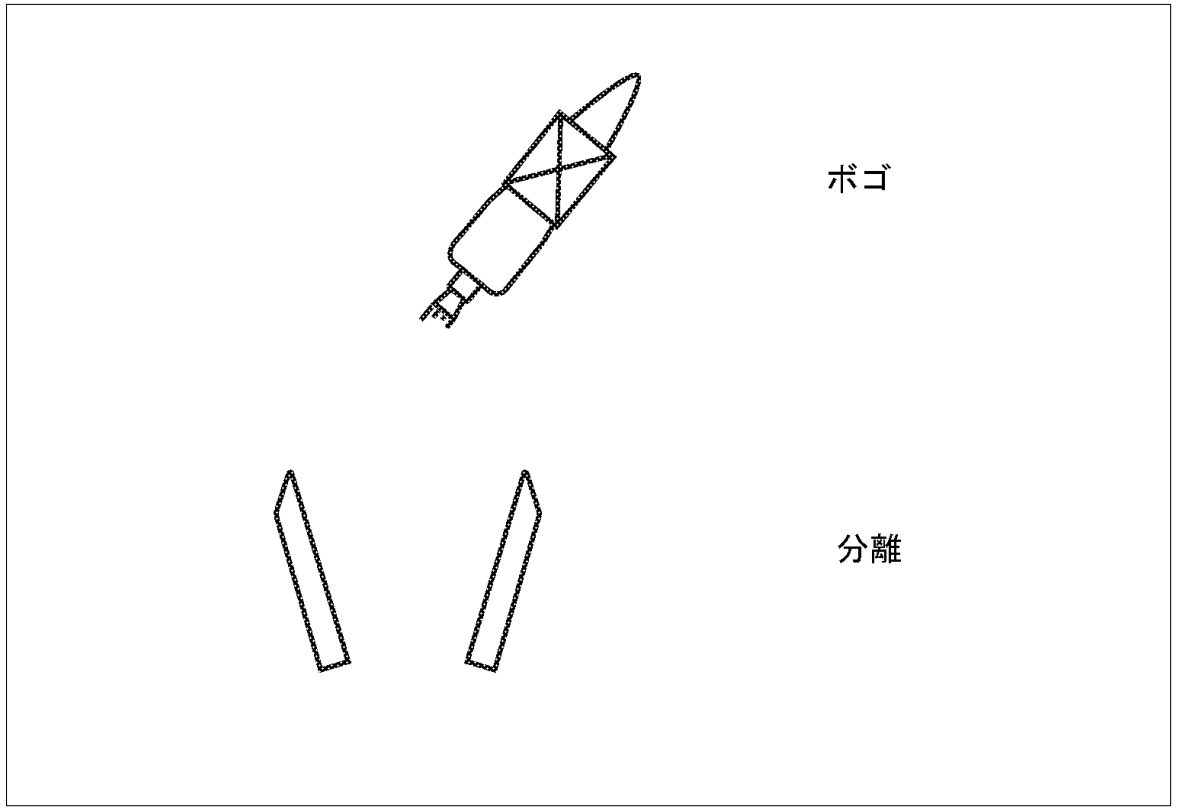
SRB分離～迎角最大時

- ✓ SRB分離時の反動(衝撃荷重+振動)
- ✓ 高速バフェット(高迎角で剥離が起こって衝撃波が振動し、それによってフェアリングが振動)
- ✓ パネルフラッタ
- ✓ スロッシング、ドリームインパクト(タンク内の液体の振動)
- ✓ POGO(機体の縦振動と推進系の連成による正弦波振動)

https://www.youtube.com/watch?v=6xvDr20Tvvc&t=27s

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある

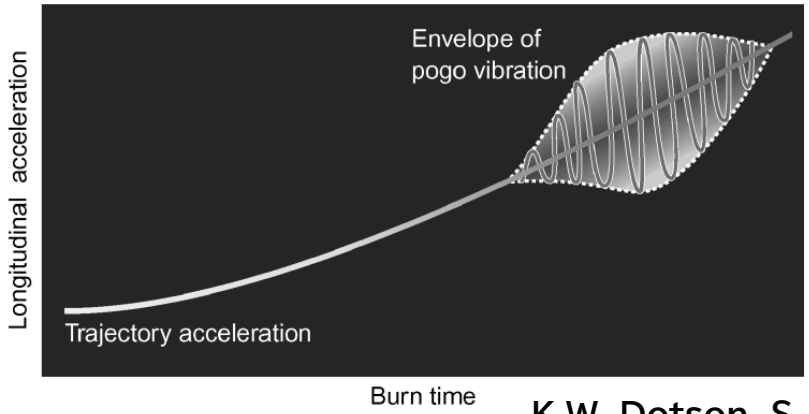


フェアリング開頭、2段分離
- ✓ 衝撃
- ✓ POGO

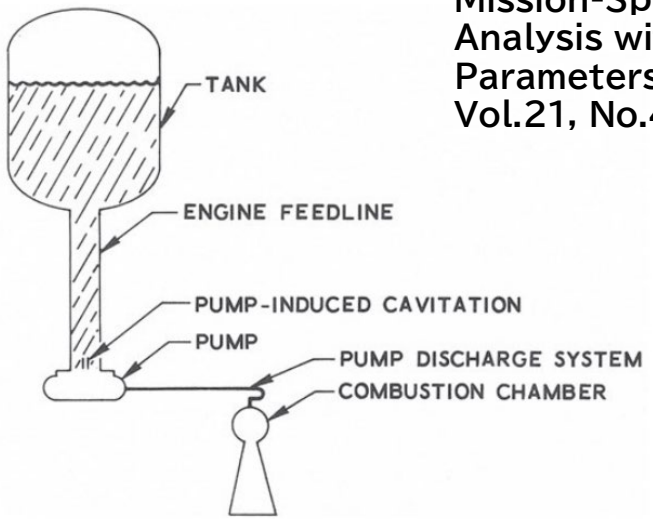
https://www.youtube.com/watch?v=athE2loTY1o

打上げシーケンス

★各フェーズで振動が起こる可能性がある

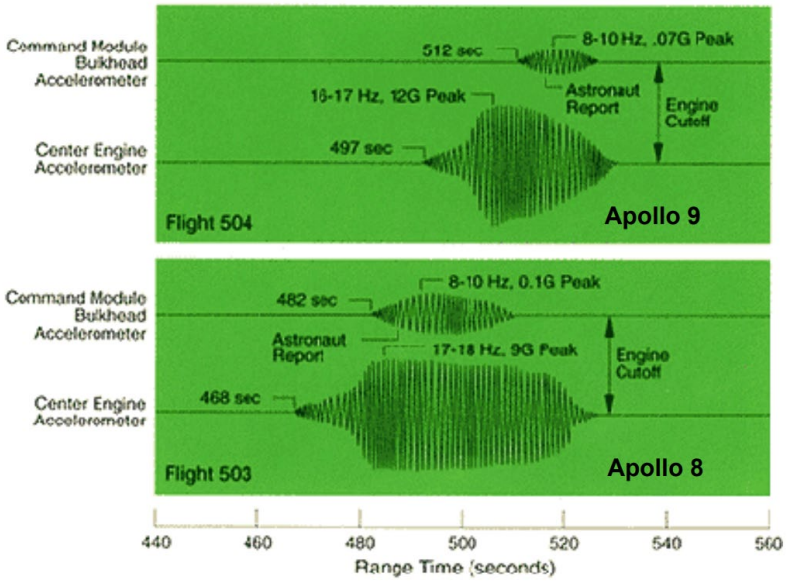


K.W. Dotson, S. Rubin, B.H. Sako, Mission-Specific Pogo Stability Analysis with Correlated Pump Parameters, J. Propulsion and Power, Vol.21, No.4, pp.619-626, 2005.

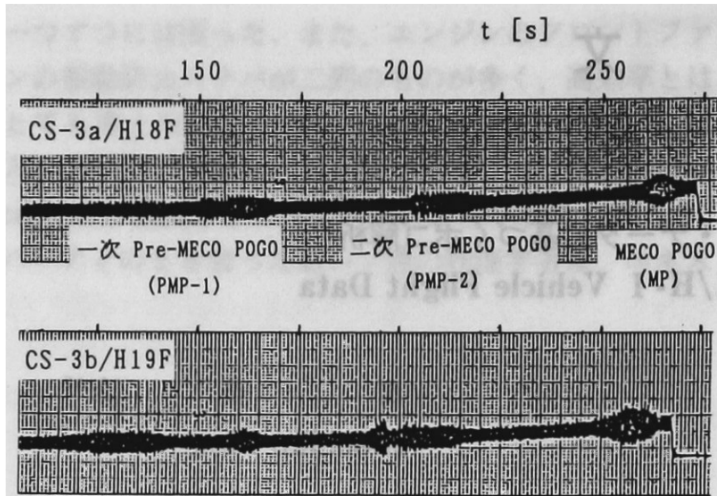


S. Rubin, Analysis of Pogo Stability, Proc. 23rd Congress of the IAF, pp.113-125, 1972.

POGOは怖い(怖かった)・・・



C.E. Larsen, NASA Experience with Pogo in Human Spaceflight Vehicles, NTRS - NASA Technical Reports Server, RTO-MP-AVT-152, 2008.



森英彦, N-II/H-Iロケットのフライト・データに基づくポゴ解析, 日本航空宇宙学会誌, 39巻, 445 号, pp.71-80, 1991年.

第1章のまとめ

- ロケットの打ち上げの際、以下のような原因で機体等の振動が起こる。
  - 打ち上げ前の地震
  - 打上げ前および打ち上げ直後の横風(フェアリングの曲げやSRB固定具のせん断が許容応力を超える可能性)
  - Lift off時に地上や地上設備からの離脱による反動
  - 打ち上げ時および飛行時のエンジンの燃焼
  - 飛行時の横風・突風(パネルフラッタが起る可能性)
  - SRB分離時の反動による振動
  - フェアリング開頭時や2段分離時等の衝撃による振動
  - 飛行途中に仰角が大きくなった際の空力振動(バフェットが起こる可能性)
  - 液体タンク内の推進剤のスロッシング
  - POGO(機体の軸方向の振動と推進系との連成による正弦波振動:破壊に至る可能性も)

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月5日(月)2限

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

第2章　人工衛星の振動源

第2章の学修目標

★ 打ち上げ時および軌道上において人工衛星が振動する原因について、例を挙げることできる。

打ち上げ時

★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

- ✓ 上昇時には準静的な加速度だけでなく、振動加速度も作用する。
- ✓ ランダム振動（音響による振動）と正弦波振動を考慮する必要がある。

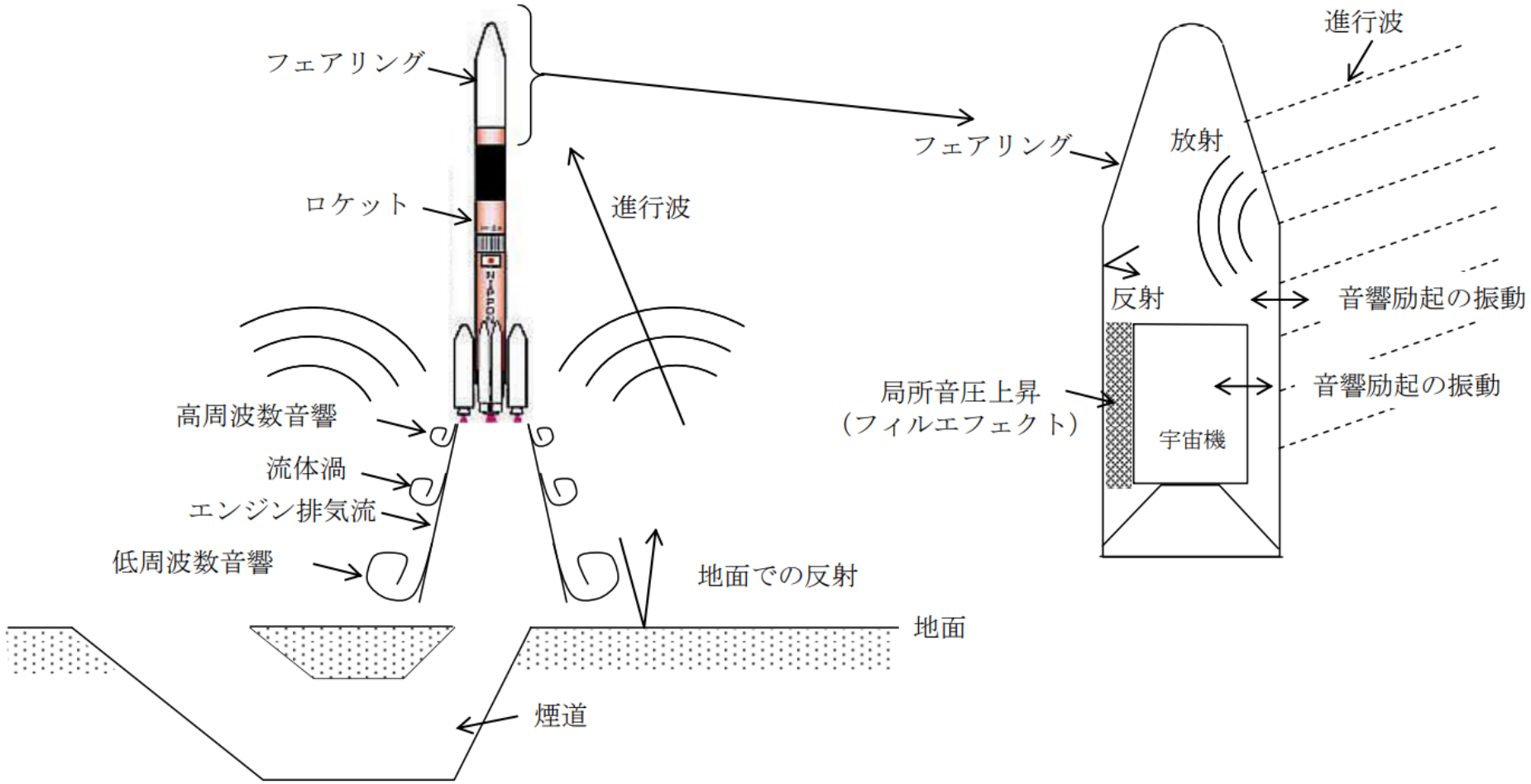
http://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=af7664b58f8a5e3b9e0fc347797b60e5

周波数	振動源
0～5Hz程度	上昇時の軸方向準静的加速度、その他，低振動数成分
低周波振動 5～100Hz程度	ロケットの振動 1. Lift off時 2. 空気力の変動 3. 2段分離時 4. POGO（正弦波振動） 5. エンジンの燃焼振動
音響・ランダム振動 数十Hz以上	Lift off時のエンジン燃焼の振動音響（ロケットから直接、あるいは，外からフェアリングを通して）
衝撃 100～10,000Hz	フェアリング開頭、衛星分離

打ち上げ時

★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

音響振動の原因（詳しくは第12回の講義で）

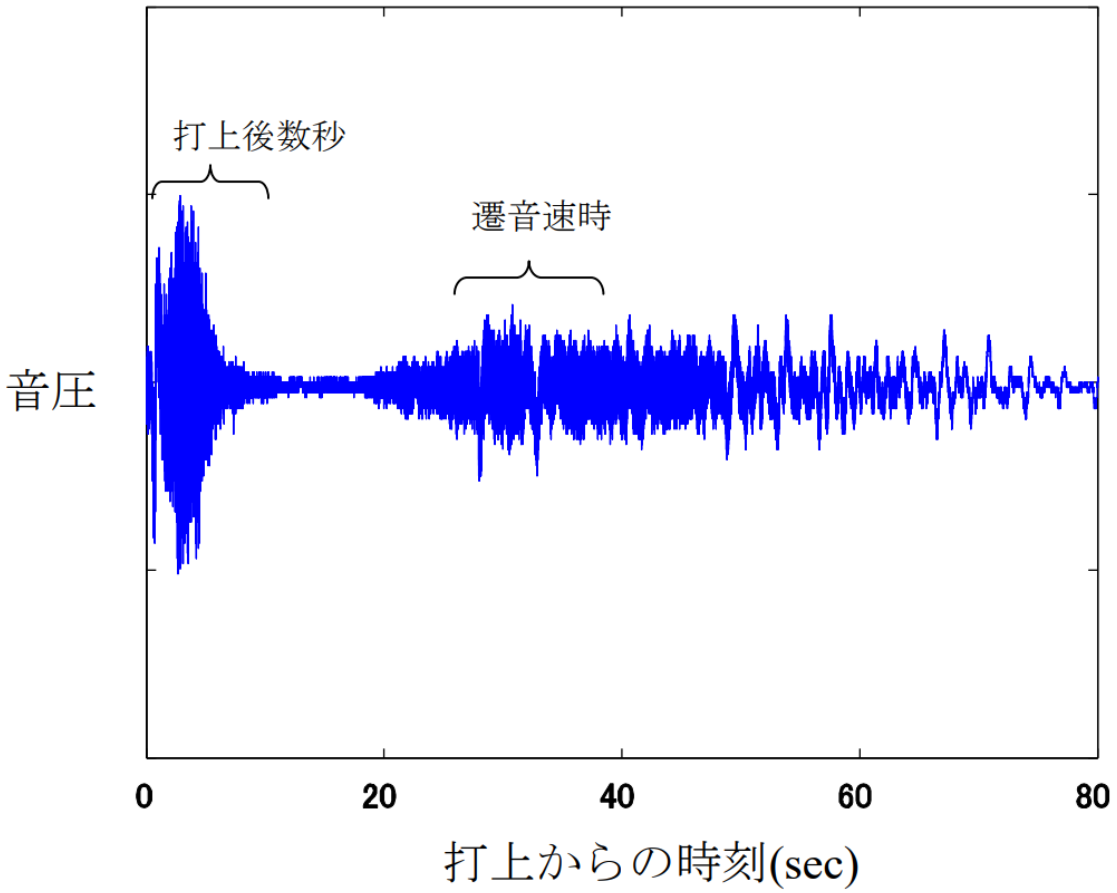


JAXA 音響試験ハンドブック https://sma.jaxa.jp/TechDoc/Docs/JAXA-JERG-2-130-HB002B.pdf

打ち上げ時

★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

音響振動の原因（詳しくは第12回の講義で）



JAXA 音響試験ハンドブック
https://sma.jaxa.jp/TechDoc/Docs/JAXA-JERG-2-130-HB002B.pdf

$$\mathrm{SPL} = 10\log_{10}\left(\frac{p}{p_o}\right)^2 \quad , \quad p_o = 20\times10^{-6}\,[\mathrm{Pa}]$$

表 1　H-IIA 202 型　最大予測音響環境

1/1 オクターブ中心周波数 [Hz]	音圧レベル [dB]
31.5	125
63	126.5
125	131
250	133
500	128.5
1000	125
2000	120
4000	115
8000	113
オーバーオール[dB]	**137.5**

The reference point 0 [dB] = 20×10^{-6} [Pa]

施, 赤城, ロケット打上げ時の音響加振に対する宇宙機設計解析・試験方法, ながれ33(2014)445－452.

打ち上げ時

★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

音響振動の原因（詳しくは第12回の講義で）

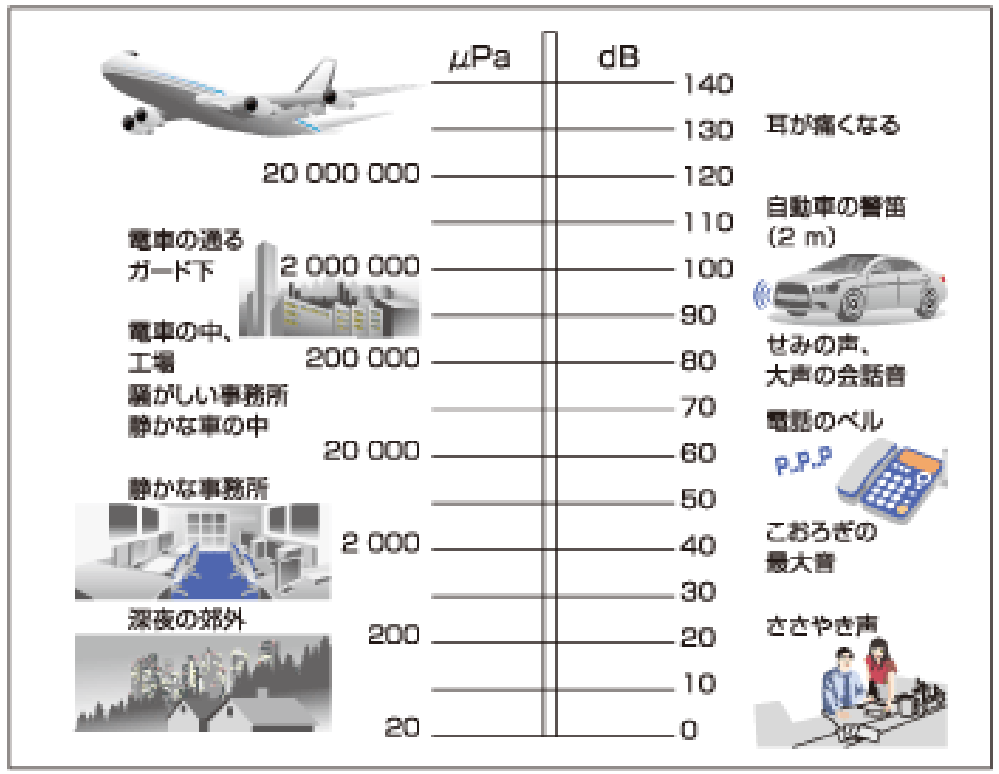


図1　音圧と音圧レベル

https://rion-sv.com/support/st_sound.aspx

$$\mathrm{SPL} = 10\log_{10}\left(\frac{p}{p_o}\right)^2 \quad , \quad p_o = 20\times10^{-6}\,[\mathrm{Pa}]$$

表 1　H-IIA 202 型　最大予測音響環境

1/1 オクターブ中心周波数 [Hz]	音圧レベル [dB]
31.5	125
63	126.5
125	131
250	133
500	128.5
1000	125
2000	120
4000	115
8000	113
オーバーオール[dB]	**137.5**

The reference point 0 [dB] = 20×10^{-6} [Pa]

施, 赤城, ロケット打上げ時の音響加振に対する宇宙機設計解析・試験方法, ながれ33(2014)445－452.

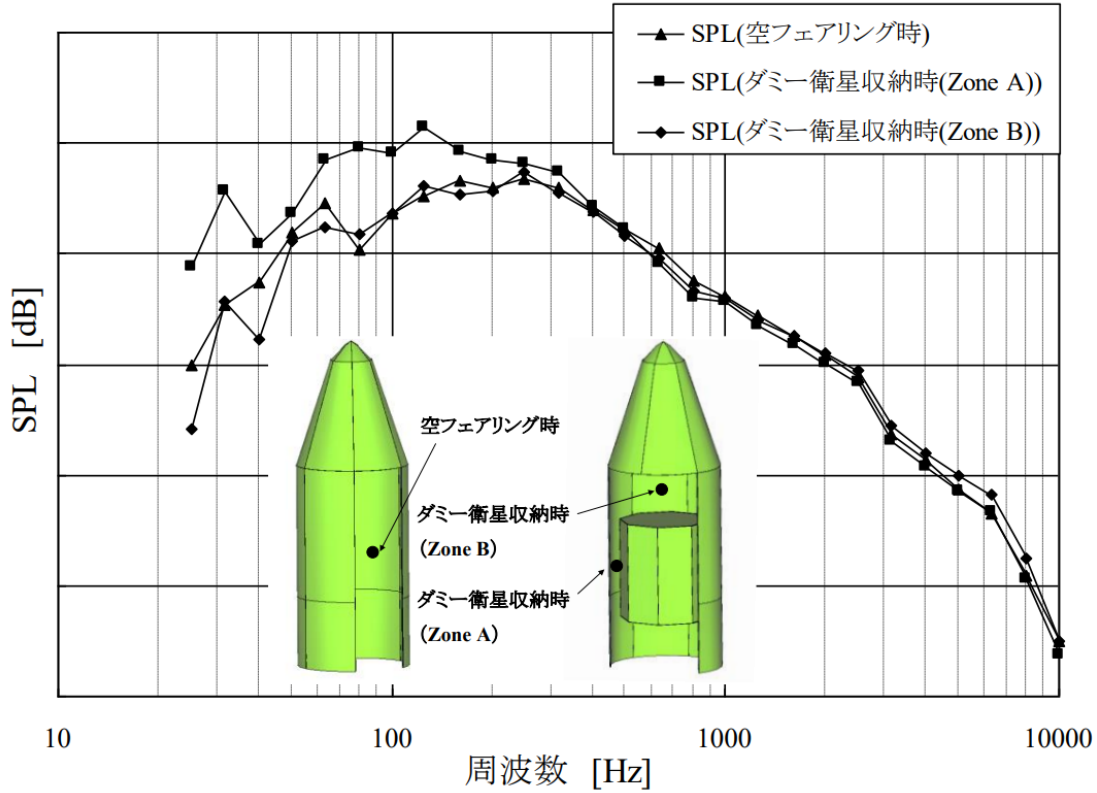
打ち上げ時

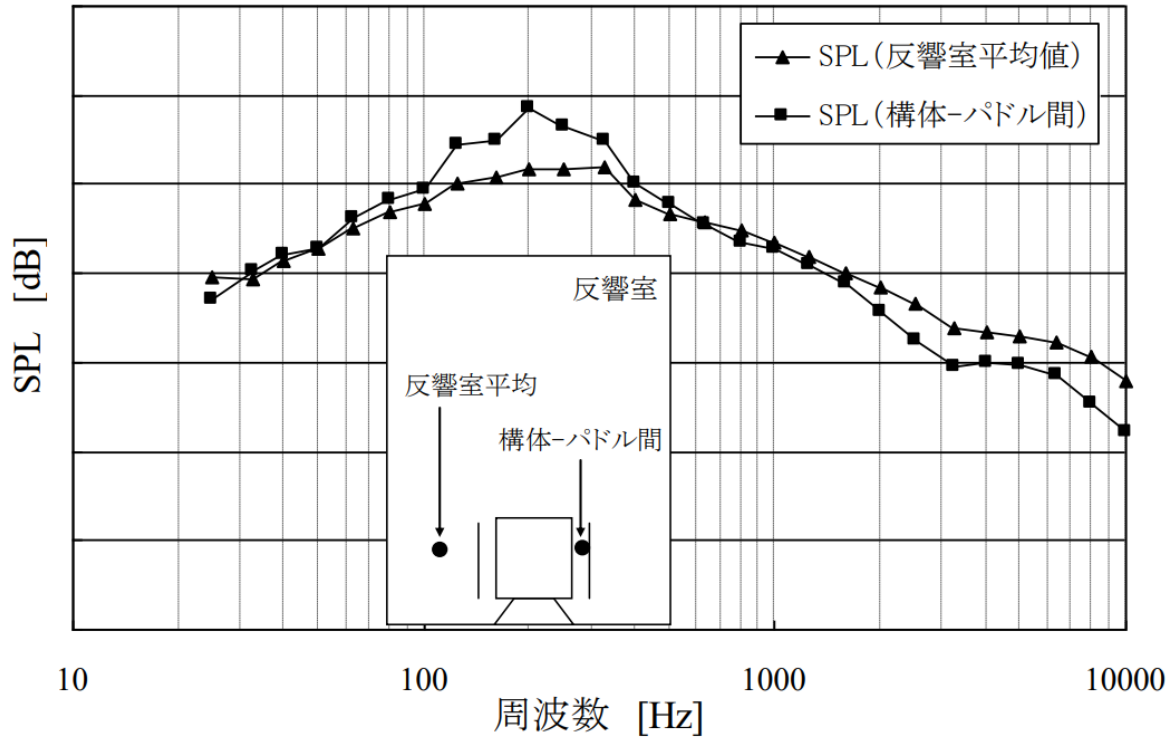
★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

音響振動の原因（詳しくは第12回の講義で）

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = pA \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \frac{pA}{m} \quad \Rightarrow$$

面積が大きいものほど影響を受ける





JAXA 音響試験ハンドブック https://sma.jaxa.jp/TechDoc/Docs/JAXA-JERG-2-130-HB002B.pdf

打ち上げ時

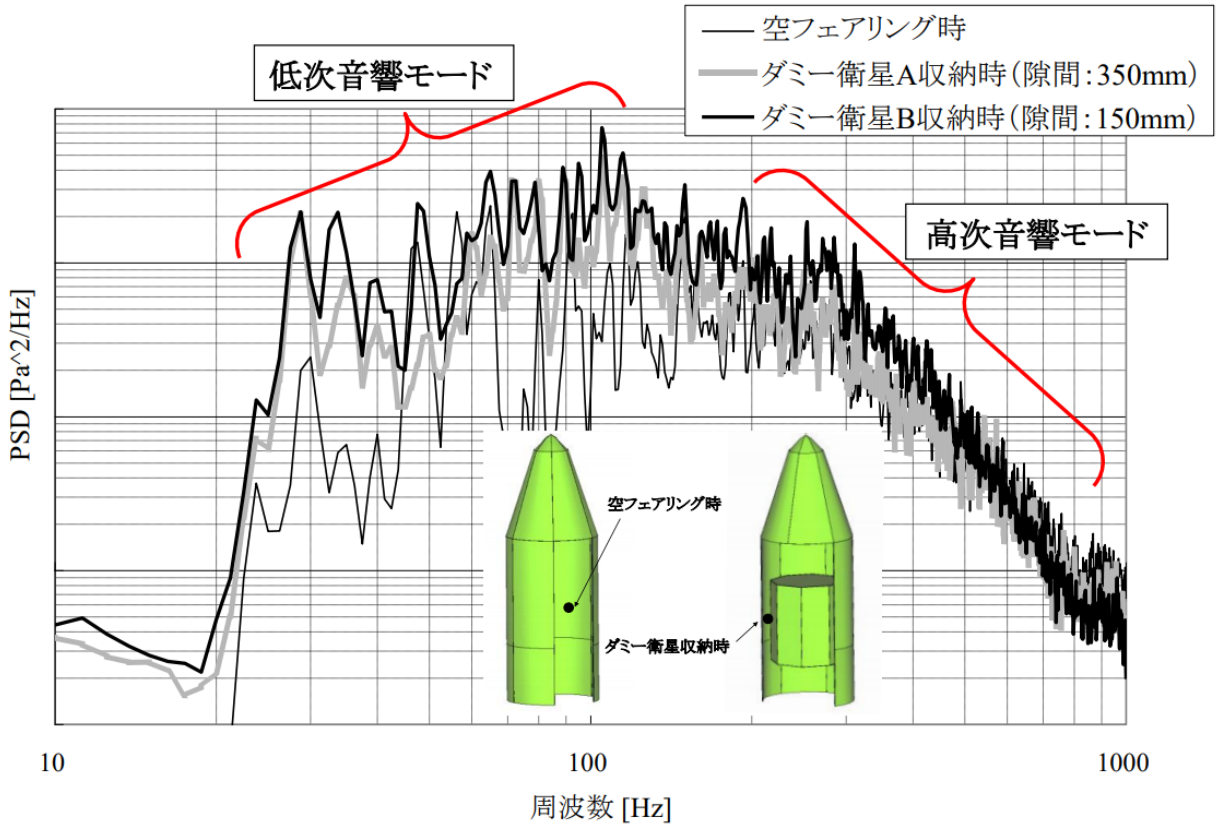
★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

音響振動の原因（詳しくは第12回の講義で）

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = pA \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = \frac{pA}{m} \quad \Rightarrow$$

面積が大きいものほど影響を受ける

PSD（Power Spectrum Density、パワースペクトル密度）：SPLの周波数分布から算出することができる（第12回の授業で学びます）

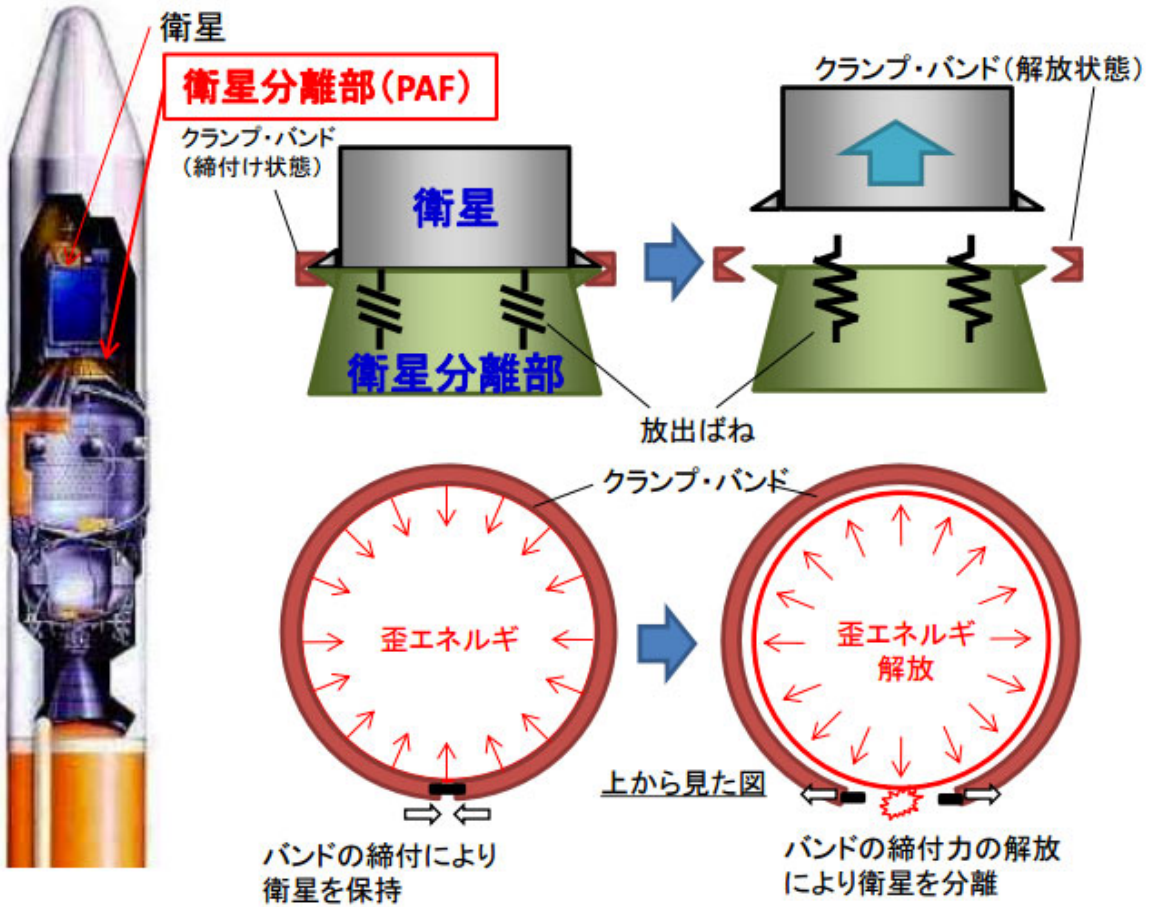


JAXA 音響試験ハンドブック https://sma.jaxa.jp/TechDoc/Docs/JAXA-JERG-2-130-HB002B.pdf

打ち上げ時

★ロケットの振動や音による振動が人工衛星に伝わる

衛星分離衝撃



https://fanfun.jaxa.jp/countdown/astro_h/f30.html

http://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=7f29bdca95cc035b5701fd9d69224641#

第2章のまとめ

- 人工衛星が打ち上げられる際、以下のような原因で振動が起こる。
  - 上昇時の準静的加速度の変動（0～5Hz程度の振動）
  - ロケットの低周波振動（5～100Hz程度）
    1. Lift off時
    2. 空気力の変動
    3. 2段分離時
    4. POGO
    5. エンジン燃焼振動
  - 音響によるランダム振動（数十Hz以上、低次音響モードと高次音響モード）
  - 衝撃（100～10,000Hz程度. フェアリング開頭、衛星分離）

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月5日(月)2限

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

第3章　人工衛星の打ち上げ時の機械環境

第3章の学修目標

★ ロケットによる CubeSat 打ち上げ時の機械環境条件の例を示すことができ、振動解析の必要性について説明できる。

★ 静的荷重と動的荷重により生じる応力の違いについて 説明できる。

★ ランダム振動する土台の上に置かれた物体に生じる 平均的な応力について説明できる。

CubeSatの機械環境条件の例

★この条件を満たすように設計（詳しくは第14回の講義で）

https://www.jaxa.jp/projects/rockets/epsilon/pdf/EpsilonUsersManual.pdf

CubeSatの環境条件

固有振動数※	3軸とも113Hz以上
準静的加速度	機軸方向10G, 直交方向1G
正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$ 4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min
ランダム振動	20 – 100 Hz : 0.000944 G^2/Hz 100 – 300 Hz : 11.1 dB/oct 300 – 500 Hz : 0.0542 G^2/Hz 500 – 2000 Hz : -9.5 dB/oct （30秒間）

※ 事実上は、共振振動数

静的荷重と動的荷重により生じる応力の違い

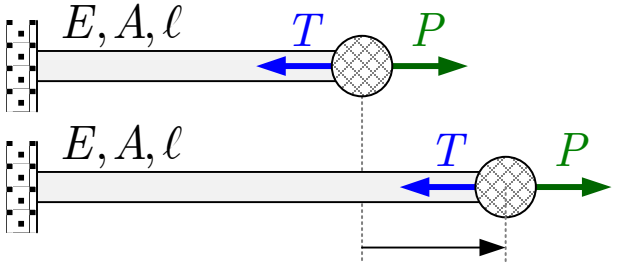
★例えば、棒の伸びは静的荷重の場合と動的荷重の場合とでどう異なるのか？

例えば、下図のように、質量の無視できる、ヤング率 E、断面積 A、 長さ ℓ の棒の先端に質量 m の質点が取り付けられている。いま、質点に静的に外力 P が作用するとすると、棒の伸び x_e は、

$$x_e = \frac{P\ell}{EA} \tag{4.3.1}$$

であり、応力は

$$\sigma_e = \frac{P}{A} \tag{4.3.2}$$



$$x_e = \frac{P\ell}{EA}$$

$$\begin{cases} P - T = 0 \\ T = \dfrac{EA}{\ell} x \end{cases} \quad \Rightarrow x = \frac{P\ell}{EA}$$

これに対し、時刻 $t = 0$ で突然, 外力 P が作用した場合、運動方程式および初期条件は

$$m\ddot{x} = -EA\frac{x}{\ell} + P \quad , \quad x(0) = 0 \, , \dot{x}(0) = 0 \tag{4.3.3}$$

この微分方程式を解くと、

$$x = \frac{P\ell}{EA} - \frac{P\ell}{EA}\cos\sqrt{\frac{EA}{m\ell}}t \tag{4.4.4}$$

となって、棒は振動する。棒の伸びが最大になるのは

$$\cos\sqrt{\frac{EA}{m\ell}}t = -1 \tag{4.4.5}$$

のときで、このとき、

$$x_{\max} = \frac{P\ell}{EA} - \frac{P\ell}{EA} \times (-1) = \frac{2P\ell}{EA} = 2x_e \tag{4.4.6}$$

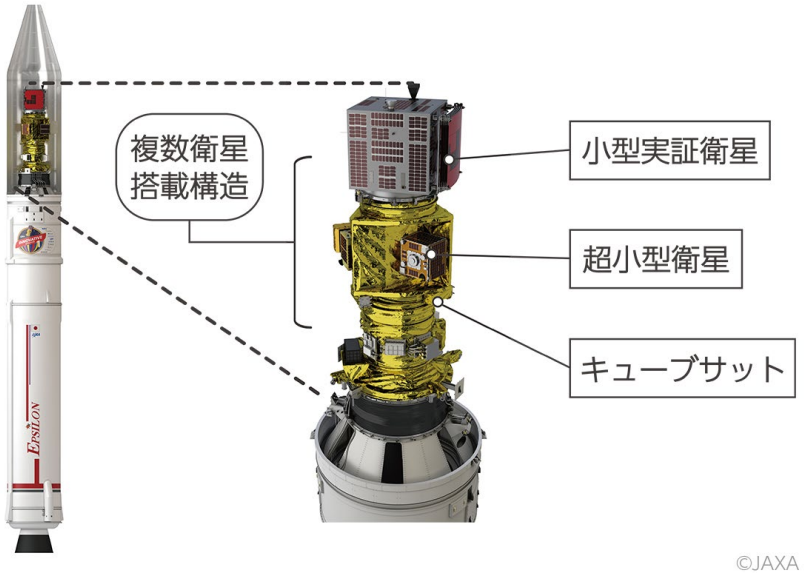
となり、棒に作用する応力の最大値 $\sigma_{\max}$ は

$$\sigma_{\max} = E\frac{x_{\max}}{\ell} = \frac{E}{\ell}\frac{2P\ell}{EA} = \frac{2P}{A} = 2\sigma_e \tag{4.4.7}$$

となって、静的な場合の2倍になってしまう！

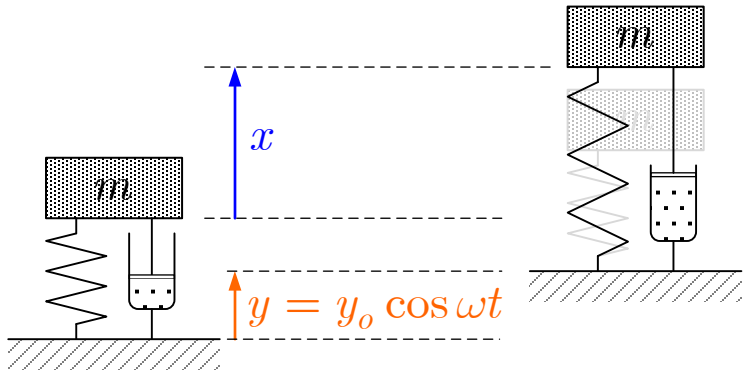
振動するときの最大応力は？

★一定振幅の振動なら簡単に求められるが，ランダム振動の場合は？



©JAXA

https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/gijyutu/gijyutu2/059/shiryo/_icsFiles/afieldfile/2019/05/27/1417114_2_2.pdf



一定加速度振幅 a_o の正弦波振動であれば、最大加速度は a_o そのものであるから、それだけの分布加速度が作用するとして解析すればよい。つまり、地球の重力加速度を $g = 9.806\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$ として、 地球の重力の $a_o\,/\,g$ 倍の重力が作用するとして解析すればよい。

音響による振動は、 衛星を搭載している土台をランダム振動させたときの振動で模擬できるとされている。

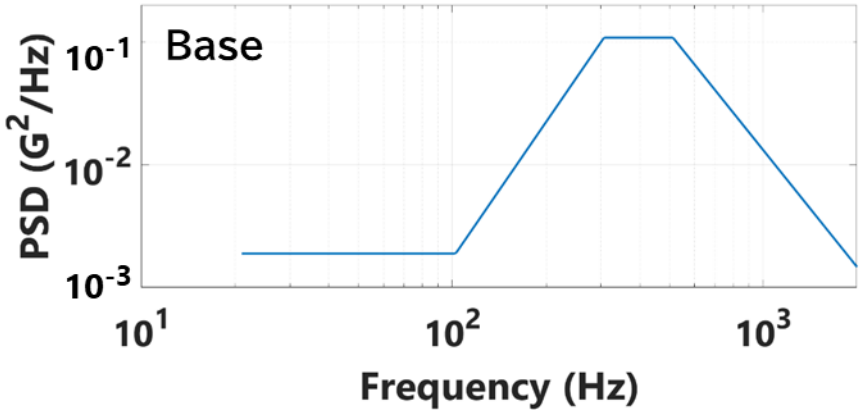
ランダム振動の場合、 様々な振動数の加速度振動が作用し、 それぞれの振動数の振動の加速度振幅が互いに異なり、かつ、 確率的に与えられるだけで、確定した値はわからないので、単純には計算できない・・・

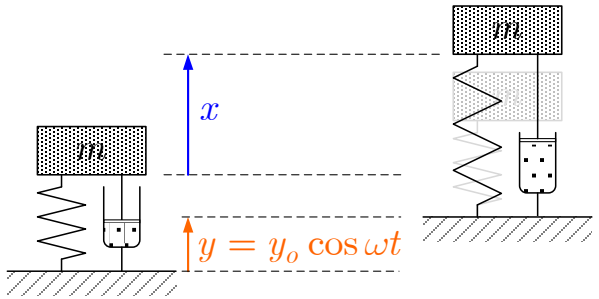
加速度振幅の2乗の周波数密度を表しているのが、 パワースペクトル密度(PSD)。 PSDの詳細は第12回に学ぶことになるが、ここでは使い道だけを示すと・・・

振動するときの最大応力は？

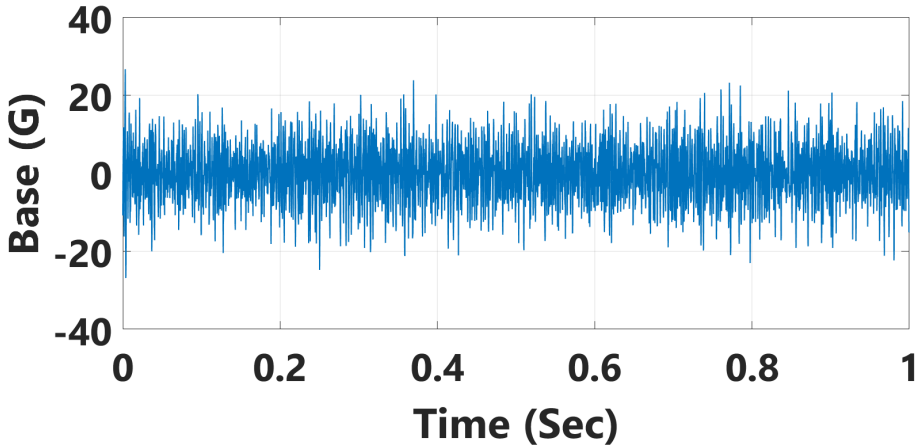
★一定振幅の振動なら簡単に求められるが，ランダム振動の場合は？

衛星に作用するランダム振動の　パワースペクトル密度はロケットによって異なり、 一般にはロケット側から下図のようなグラフが衛星側に提示される。 衛星側はこのランダム振動に耐えられるような衛星を設計・開発することになる。





土台の実際の振動は下図のようなものになる（詳しくは第12回の講義で学びます）。



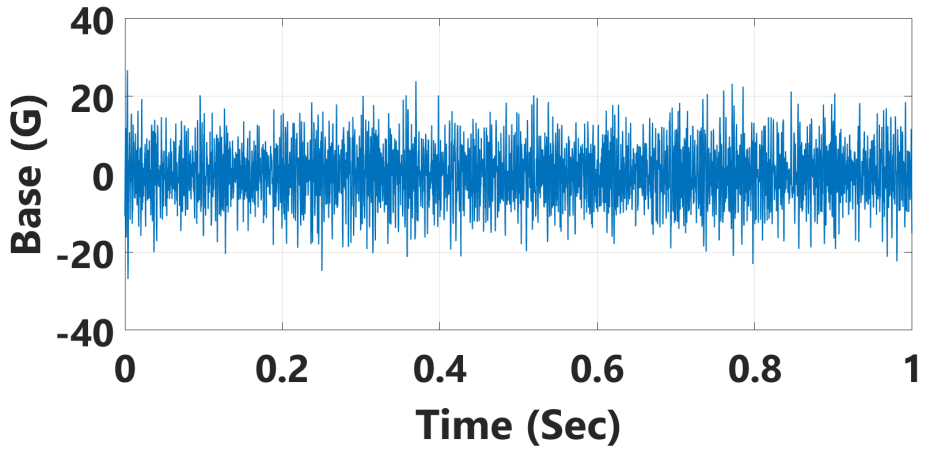
一般に、土台がある特定の振動数で振動すると、それに乗っている物体の振動の振幅が 極端に大きくなることがある。この現象は共振と呼ばれる（詳細は第5回の授業で学びます）。

物体に作用する加速度はこのときに最大になる。 このときの振動数を f_o とし、 そのときの物体の加速度振幅が土台の振幅の Q 倍だったとする。

振動するときの最大応力は？

★一定振幅の振動なら簡単に求められるが，ランダム振動の場合は？

土台の実際の振動は下図のようなものになる（詳しくは第12回の講義で学びます）。



一般に、土台がある特定の振動数で振動すると、それに乗っている物体の振動の振幅が 極端に大きくなることがある。この現象は共振と呼ばれる（詳細は第5回の授業で学びます）。

物体に作用する加速度はこのときに最大になる。 このときの振動数を f_o とし、 そのときの物体の加速度振幅が土台の振幅の Q 倍だったとする。

ランダム振動は 様々な振動数の振動が足し合された振動であるが、物体が共振するときには、物体の振動は土台を振動数 f_o で振動させたときの振動とほぼ同様になる（と仮定する）。

いま、 この振動数のときのPSDの値が S_o であったすると、 物体に作用する平均的な加速度は次式で与えられる。この式はMilesの式と呼ばれる（Milesの式の導出方法については第13回第3章で学びます）。

$$\ddot{x}_{rms} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_o S_o} \tag{4.3.8}$$

設計の際には確率分布を考慮して、なお、この値の3倍の値を限界加速度として設計することが多い。

第3章のまとめ

- ロケット打ち上げ時に衛星に作用する主な荷重は振動荷重である。
- 荷重が動的に作用する場合，静的な変形に加えて、 慣性力の影響で振動変位が生じる。 その結果，静的な場合の応力よりも大きな応力が物体には生じる。
- 例えば、ランダム振動をする土台に物体が置かれている場合に、 物体に生じる平均的な加速度は、Milesの式で見積もることができる。これにより、物体に生じる平均的な応力や最大応力を見積もることができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月5日(月)2限

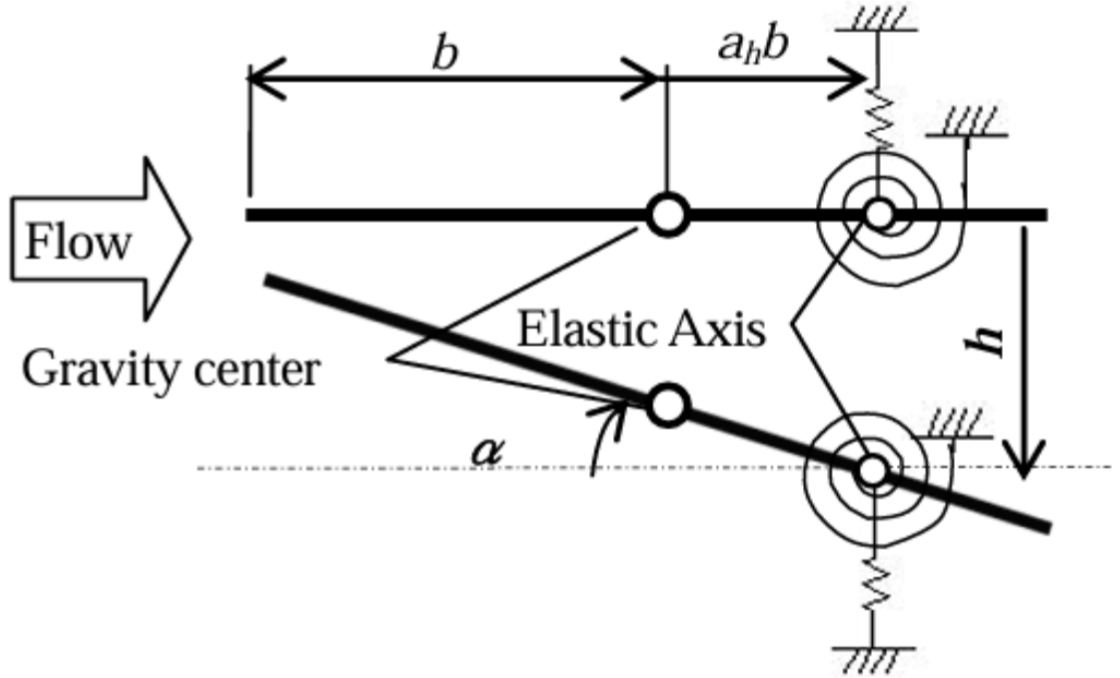
第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

第4章　航空機に関する振動問題

フラッタ

★以外と簡単に模擬できる(？)

https://www.youtube.com/watch?v=vGYIT_UjjAU

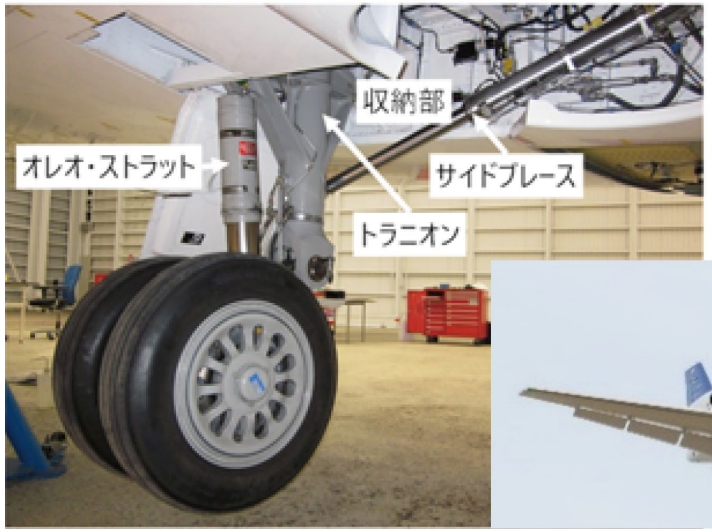


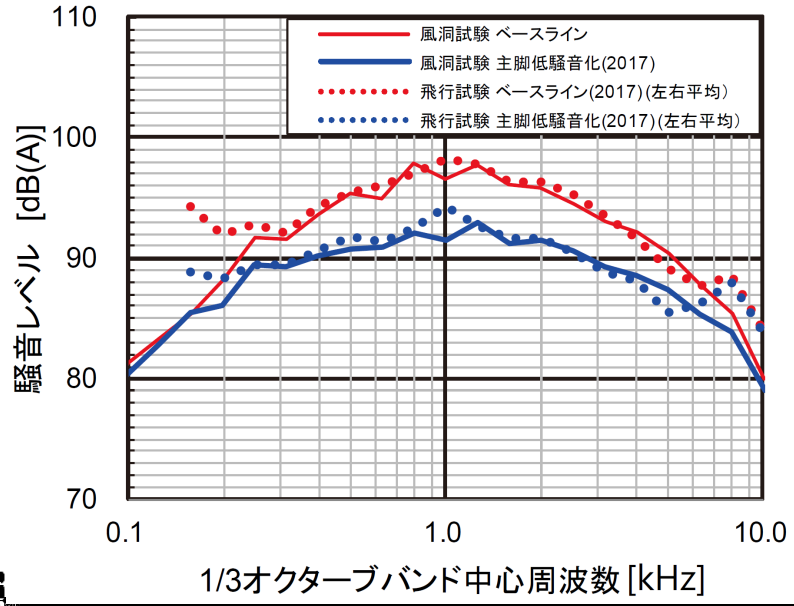
https://www.jstage.jst.go.jp/article/kikaic/78/789/78_1749/_pdf

※ 空気力を式で表すのが、なかなか・・・

脚の騒音（環境問題！）

https://jaxa.repo.nii.ac.jp/record/47346/files/AA2030013025.pdf





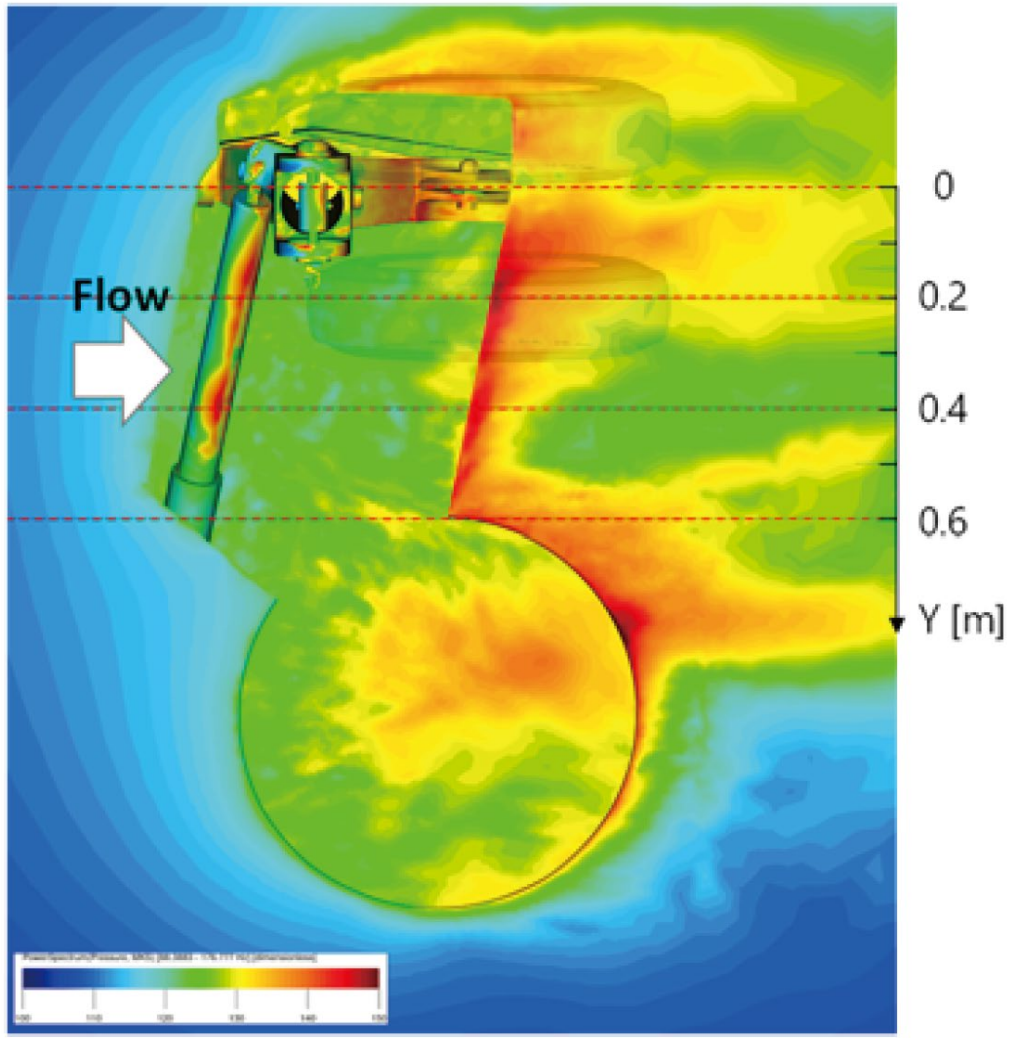
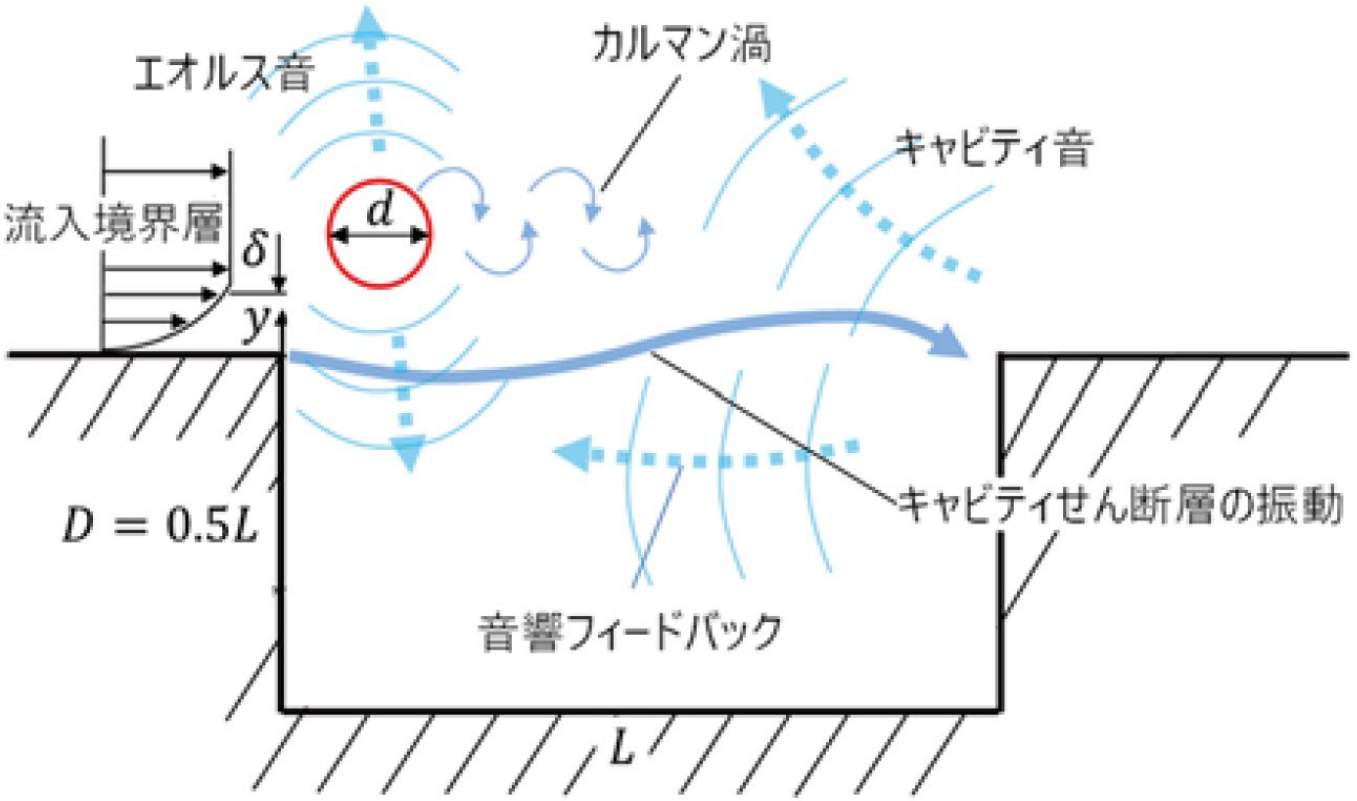
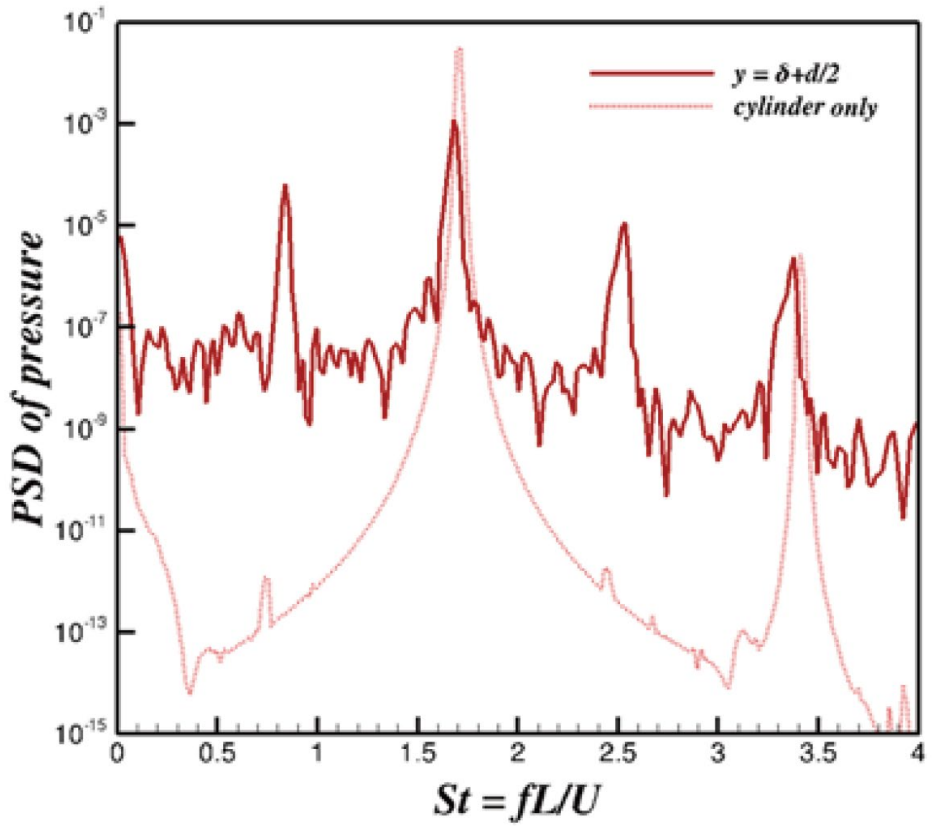


図3．VLESによる収納部周辺の表面圧力変動

脚の騒音（環境問題！）

https://jaxa.repo.nii.ac.jp/record/47346/files/AA2030013025.pdf





(b) キャビティ底面中央の圧力変動パワースペクトル密度

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

2025年5月5日(月)2限

課題

2025年5月11日(日)18時00分締切

[1] フラッター現象について説明し、フラッターが起こる原因および対策について述べなさい。ただし、必ず、図(または写真)を1枚以上載せて、その図(または写真)の説明も加えること（図に記号が記入されている場合には、記号の定義も述べること)。そして，A4サイズで1枚以上2枚以内にまとめること。

※ 採点基準：

- 基準点は3点で、自分なりの考察を加えていたら、内容に応じて0～2点を加点。
- オレンジの箇所(6箇所)の1つでも満たしていなければ0点。
- 文献のコピペは0点。
- 式も含めてWORD等で書いていなければ、1点減点。
- 体裁が整っていなければ、0点。

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析

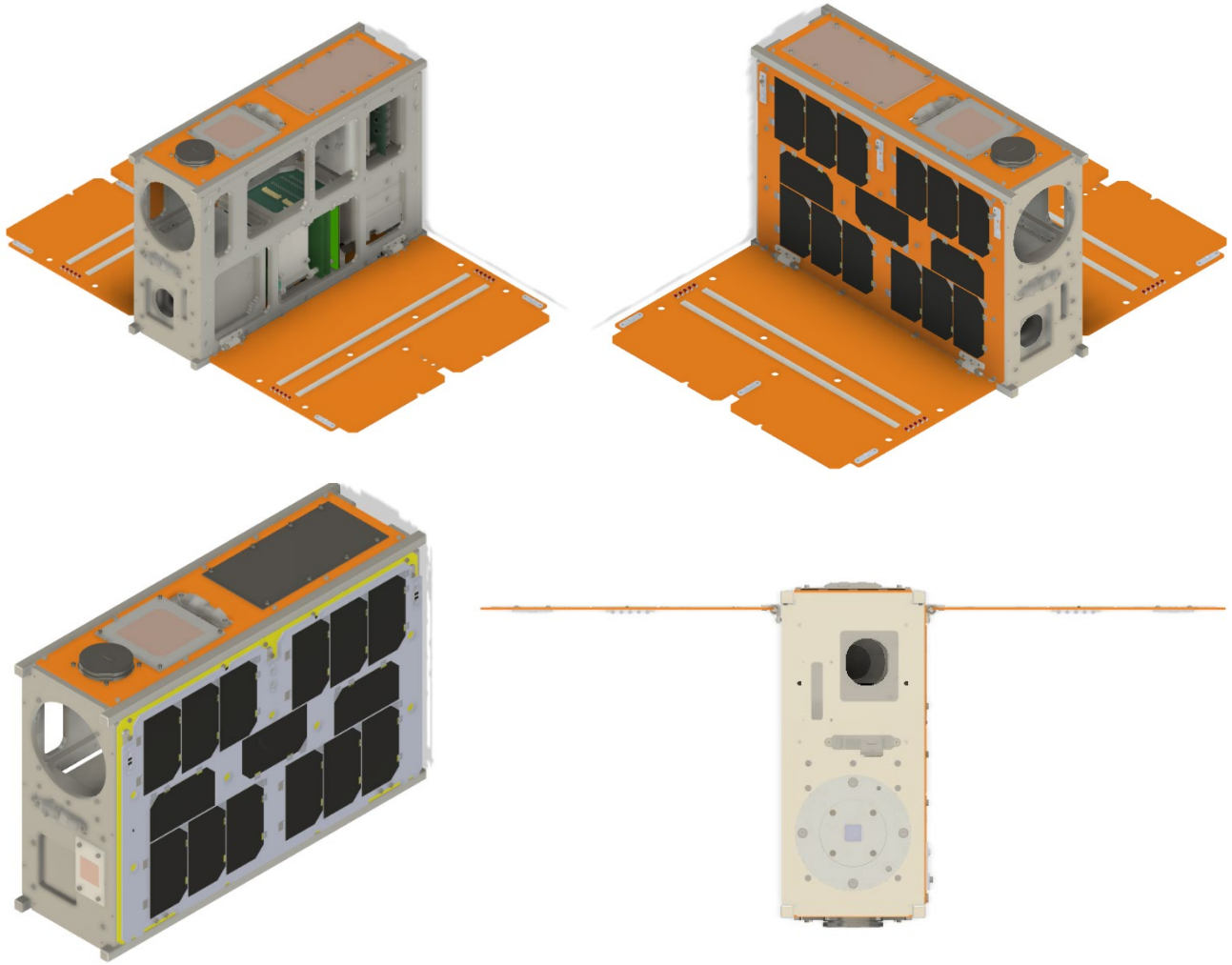
おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

付録　6U衛星STMの振動試験・衝撃試験

振動試験・衝撃試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施

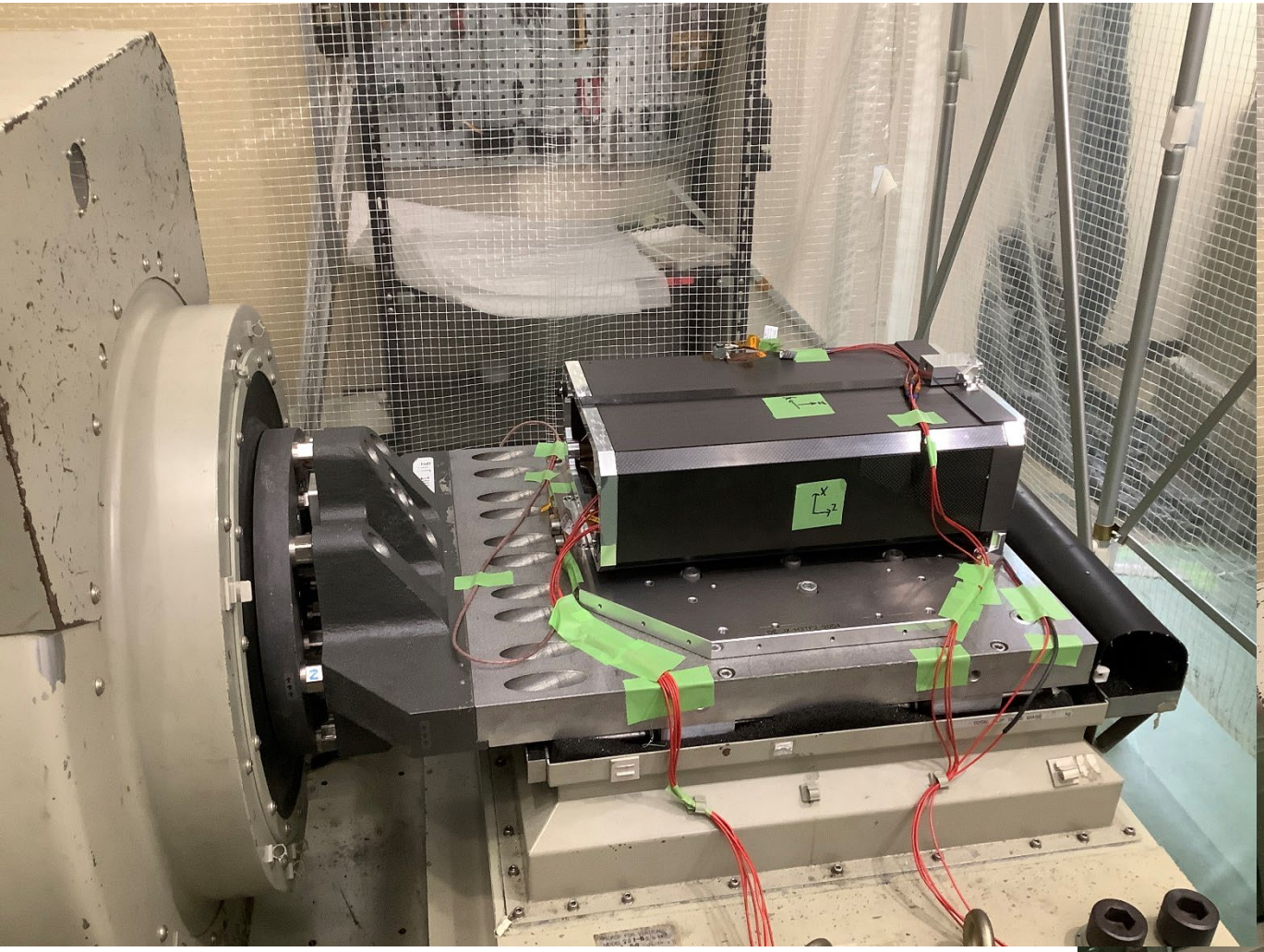


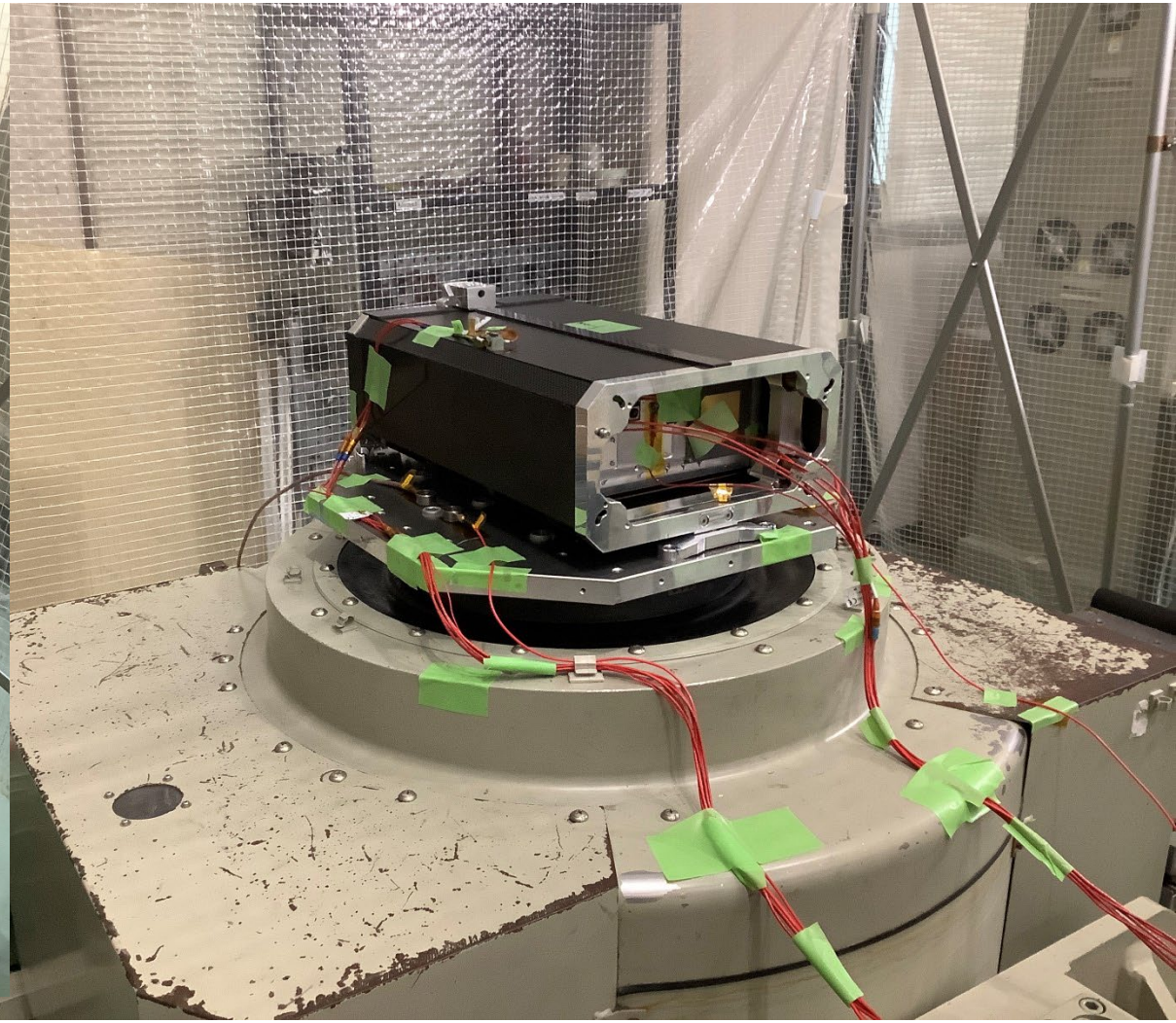
STM(Structure-Thermal Model)の振動試験と衝撃試験を実施。ただし、ペイロード部(望遠鏡)は一部を除いてダミー・・・。

　目的は、「打ち上げ振動・衝撃に構体が耐えられるかを確認すること」と、「望遠鏡部に加わる加速度を確認すること」。

振動試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施



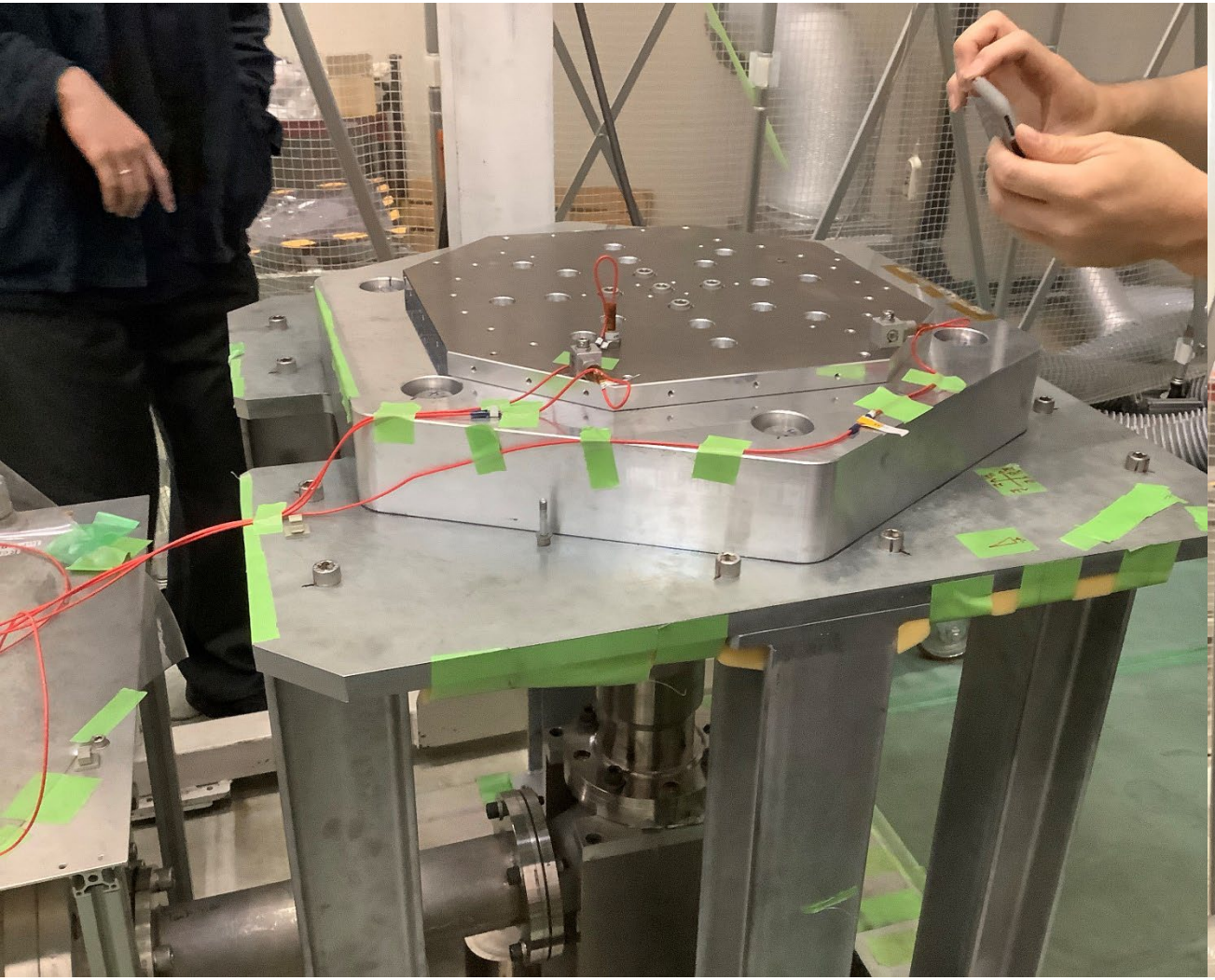


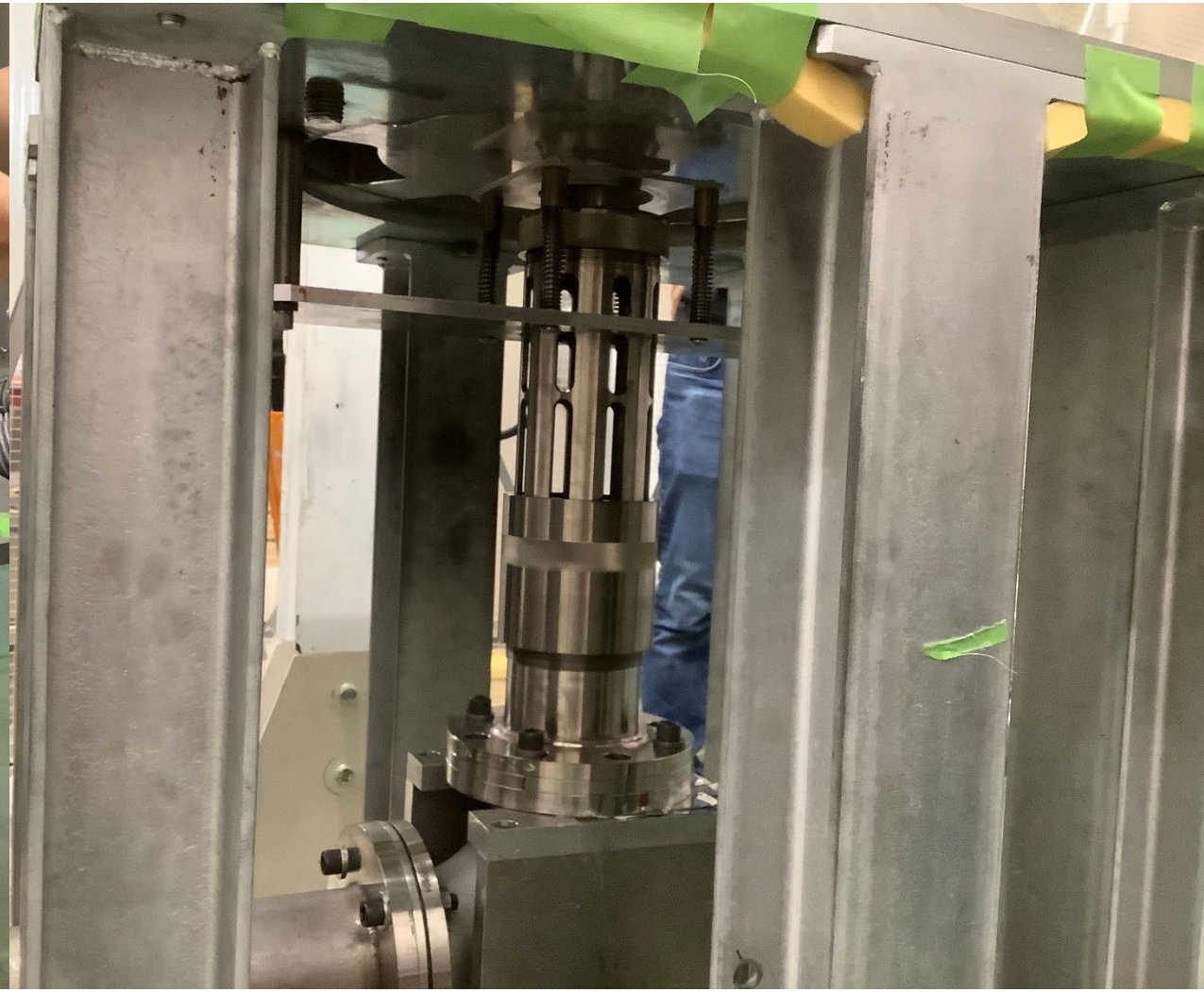
衝撃試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施

衝撃試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施



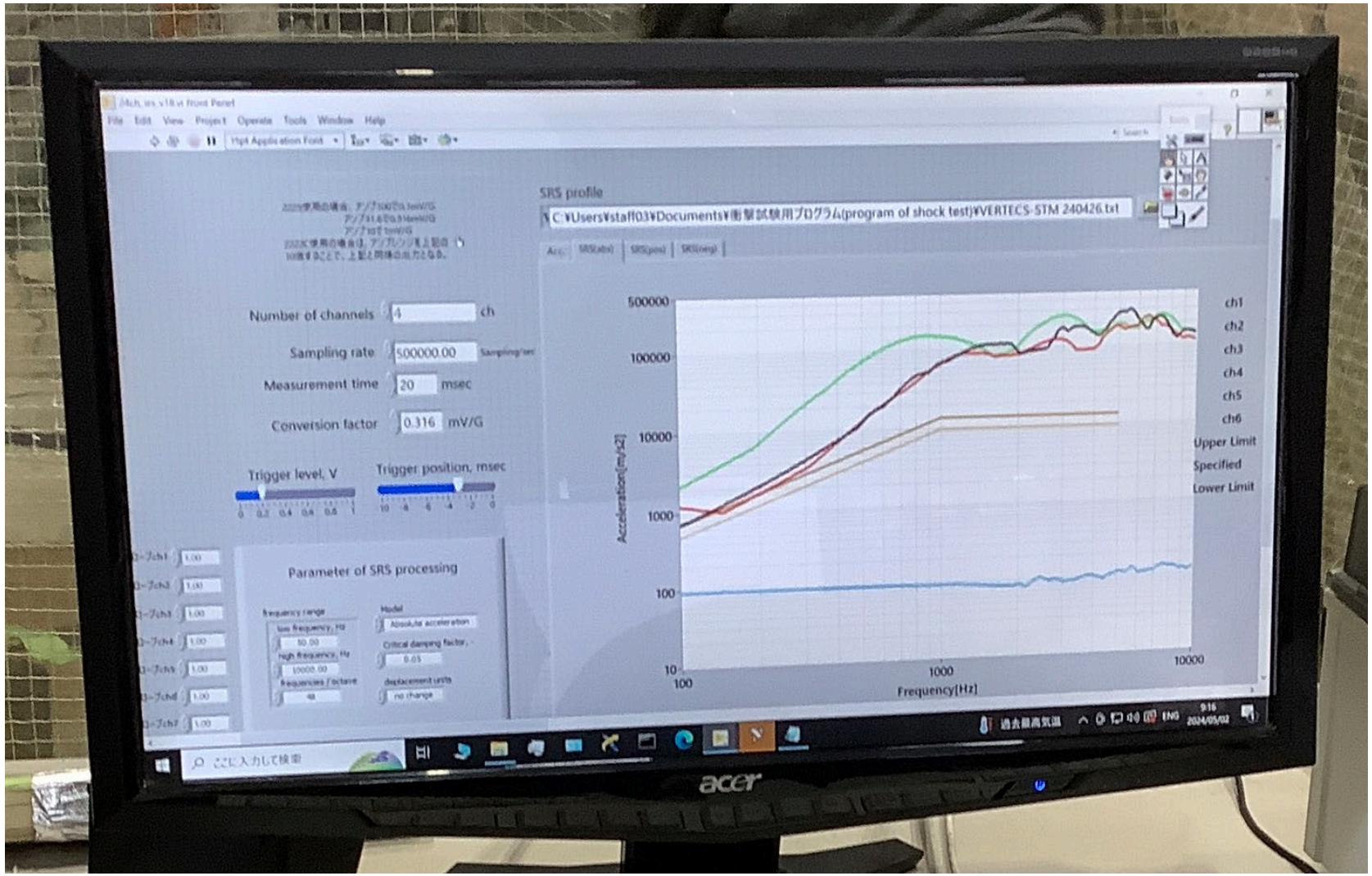


衝撃試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施

衝撃試験

★九工大の超小型衛星試験センターにて実施



振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

本講義の構成

1自由度線形運動の復習

- 第1回 序論
- 第2回 1自由度線形振動
- 第3回 任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移
- 第4回 宇宙機の設計・開発における振動解析

強制振動と共振

- 第5回 1自由度線形振動系の強制振動と共振
- 第6回 減衰のない2自由度線形振動系の自由振動
- 第7回 2自由度線形振動系の強制振動
- 第8回 振動絶縁と動吸振器

多自由度系の振動

- 第9回 モード法の基礎
- 第10回 刺激係数と有効質量
- 第11回 パワースペクトル密度
- 第12回 ランダム振動

試験による評価

- 第13回 ランダム加振される物体に作用する荷重
- 第14回 振動に対する耐性の評価法
- 第15回 衝撃に対する耐性の評価法

第5回の学修目標

- ★ 強制加振されるバネ・マス・ダンパー系の運動を 解くことができる。
- ★ 応答倍率について説明することができる。
- ★ 強制振動における加振振動数と応答倍率との関係を説明することができる。
- ★ 強制振動における加振振動数と位相差との関係を説明することができる。
- ★ 共振について説明することができる。

第5回の全体構成

第1章　過渡応答と定常振動状態

第2章　応答倍率と位相差

第3章　共振

第4章　ボード線図とその特徴

第5章　Q値

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月12日(月)2限

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

第1章　過渡応答と定常振動状態

第1章の学修目標

★ 土台が強制的に正弦波加振される場合の バネ・マス・ダンパー系の運動方程式を導くことができる。

★ 強制加振されるバネ・マス・ダンパー系の運動を 過渡応答と定常振動で説明することができる。

強制振動(強制加振)問題

★対象物を強制的に振動させる問題

1） 質点に加振力を直接加える場合

質点に加振力$F = F_o \cos \omega t$を加えると、運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \cos \omega t \tag{5.1.1}$$

2）土台を加振する場合

土台を

$$y = y_o \cos \omega t \tag{5.1.2}$$

で強制的に変位させると、バネやダンパーの伸びuは

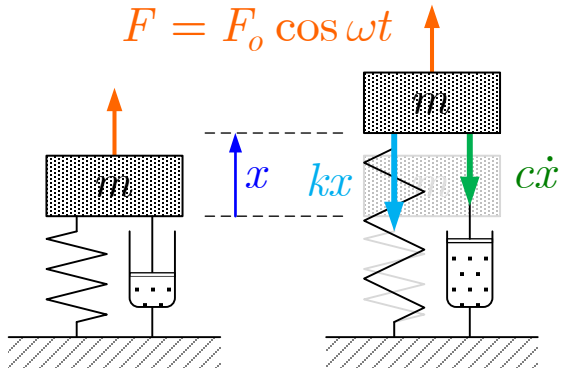
$$u = x - y \tag{5.1.3}$$

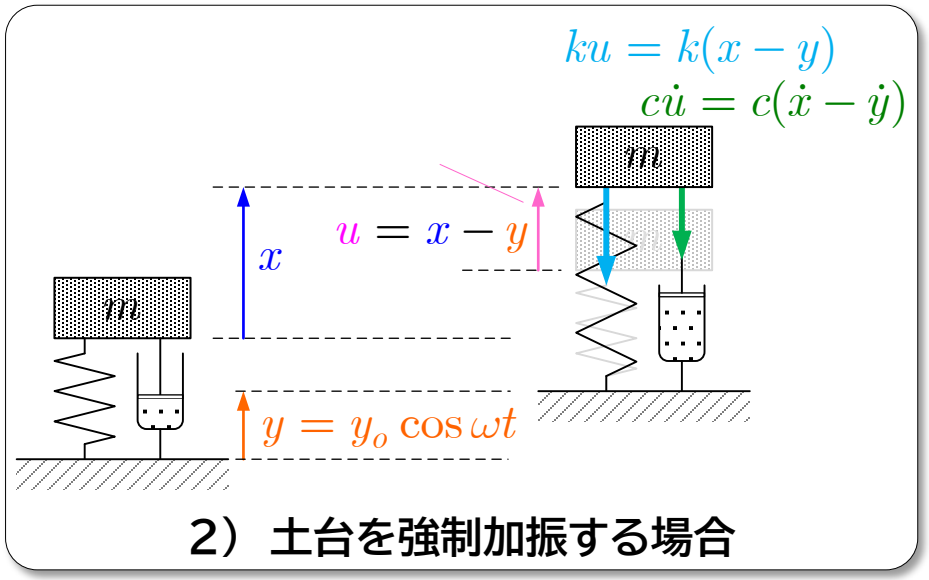
であるので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -ku - c\dot{u} \tag{5.1.4}$$

式(5.1.4)に式(5.1.2)と(5.1.3)を代入すると、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky_o \cos \omega t - cy_o\omega \sin \omega t \tag{5.1.5}$$



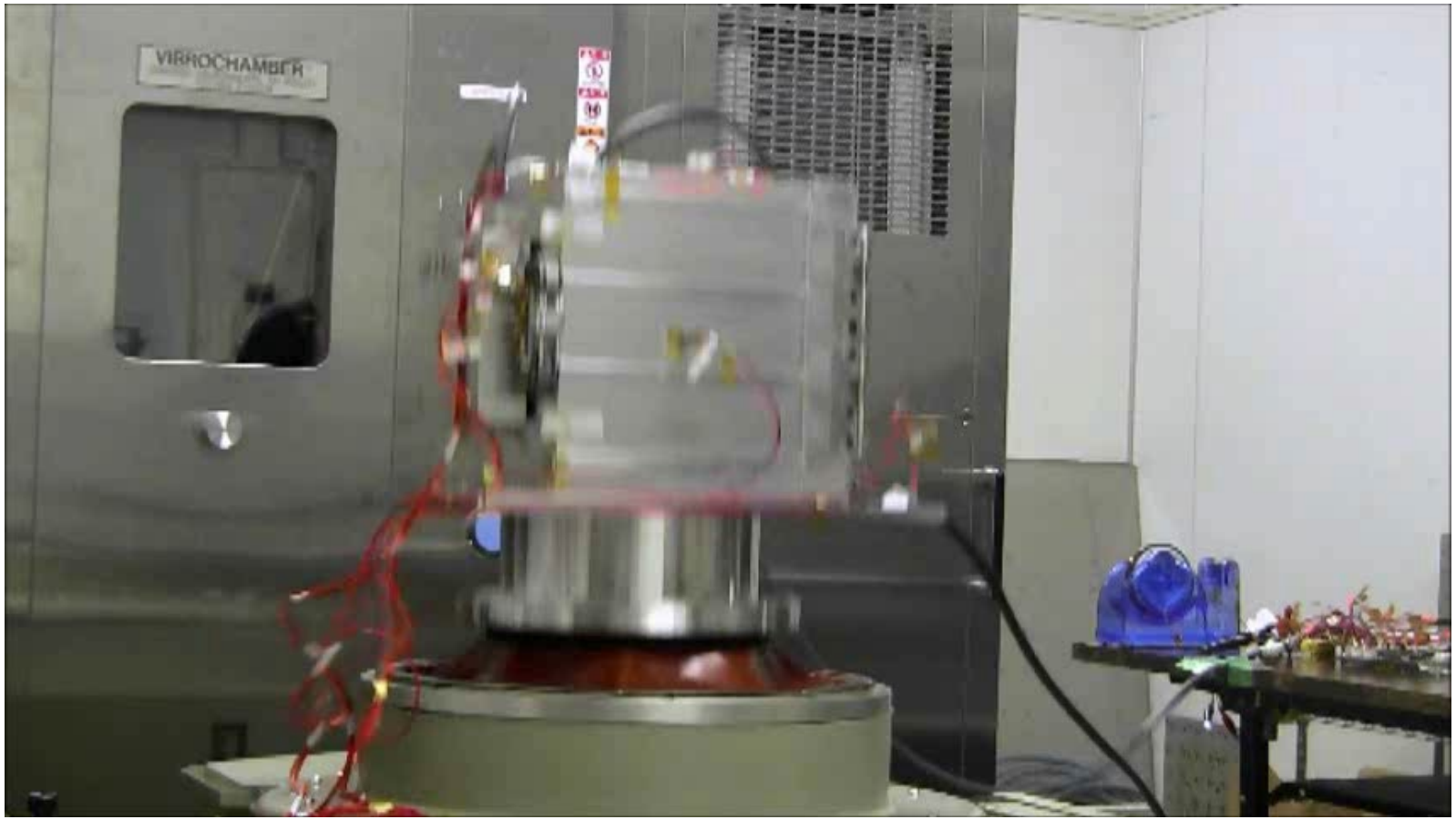


2） 土台を強制加振する場合

土台を強制加振する場合

★「土台を強制加振」＝「土台に強制変位を与える」

現実の問題は、こういった「強制変位」の問題が多い



超小型衛星SPROUTを収納したN-PODの振動試験

土台の強制加振問題の運動方程式

★特殊解

解くべき方程式は式(5.1.5)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky_o \cos\omega t - cy_o\omega \sin\omega t \tag{5.1.5}$$

両辺をmで割ると、

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + {\omega_o}^2 x = {\omega_o}^2 y_o \cos\omega t - 2\zeta\omega_o\omega y_o \sin\omega t \tag{5.1.6}$$

この微分方程式の特殊解を求めると、

$$x^* = \frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \cos(\omega t) + \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \sin(\omega t) \tag{5.1.7}$$

となる。ただし、ηは加振角振動数ωを固有角振動数 ω_oで無次元化したもの(無次元加振振動数)である:

$$\eta \equiv \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o} \tag{5.1.8}$$

※ 式(5.1.7)の導出:

式(5.1.6)の特殊解は

$$x^* = P\cos\omega t + Q\sin\omega t \tag{5.1.9}$$

の形をしていると考えられるので、 これを式(5.1.6)に代入すると、

$$\begin{aligned} &-\omega^2 P\cos\omega t - \omega^2 Q\sin\omega t \\ &\quad + 2\zeta\omega_o\left(-\omega P\sin\omega t + \omega Q\cos\omega t\right) \\ &\quad + {\omega_o}^2\left(P\cos\omega t + Q\sin\omega t\right) \\ &\quad = {\omega_o}^2 y_o\cos\omega t - 2\zeta\omega_o\omega y_o\sin\omega t \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

左辺と右辺を比較すると、

$$\begin{cases} \left(-\omega^2+{\omega_o}^2\right)P + 2\zeta\omega_o\omega Q = {\omega_o}^2 y_o \\ -2\zeta\omega_o\omega P + \left(-\omega^2+{\omega_o}^2\right)Q = -2\zeta\omega_o\omega y_o \end{cases} \tag{5.1.11}$$

つまり、

土台の強制加振問題の運動方程式

★特殊解

$$\begin{cases}(1-\eta^2)P+2\zeta\eta Q=y_o \\ -2\zeta\eta P+(1-\eta^2)Q=-2\zeta\eta y_o\end{cases} \tag{5.1.12}$$

これを解くと、

$$P=\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\,,\quad Q=\frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} \tag{5.1.13}$$

となって、式(5.1.7)

$$x^*=\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\cos(\omega t)+\frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\sin(\omega t) \tag{5.1.7}$$

を得る。

★解

一般解は斉次解と特殊解の和であるので、

$$\begin{aligned}x\ =&\ e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)+C_2\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right]\\&+\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\cos(\omega t)\\&+\frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\sin(\omega t)\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

したがって、例えば、初期条件が

$$x(0)=x_0\quad,\quad \dot{x}(0)=v_0 \tag{5.1.19}$$

であったとしたら、積分定数C_1およびC_2は、

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{v_0+\zeta\omega_o x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o}\\ \qquad\quad+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\dfrac{1-\eta^2+2\eta^4+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\\ C_2=x_0-\dfrac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\end{cases} \tag{5.1.20}$$

土台の強制加振問題の運動方程式

★解

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] \\
&\quad + \frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \cos(\omega t) \\
&\quad + \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \sin(\omega t) \qquad (5.1.18)
\end{aligned}
$$

この式をよく見ると、 斉次解は時間が経つにつれて減衰していき、しばらくすると，ほぼ0になる。 そのとき、解は特殊解とほぼ一致する。また、この特殊解は定常振動を表している。

そこで、 斉次解の部分は「過渡応答成分」と呼ばれ、特殊解の部分は定常成分（定常振動成分）と呼ばれる。

第1章のまとめ

- 固有角振動数がω_o、粘性減衰比がζでバネ・マス・ダンパー系の土台を角振動数ω、振幅y_oで加振するとき、過渡応答成分と定常成分の和になる。

$$
\begin{aligned}
x \;=\; & e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_o t\right)\right] \\
& + \frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\, y_o \cos(\omega t) \\
& + \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2}\, y_o \sin(\omega t)
\end{aligned}
\tag{5.1.18}
$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月12日(月)2限

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

第2章　応答倍率と位相差

第2章の学修目標

★ 土台を強制的に正弦波加振される バネ・マス・ダンパー系の応答倍率と位相差について説明できる。

土台の強制加振問題の定常解

★見栄えをよくすると・・・

定常振動解は以下の通りであった。

$$x = \frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \cos(\omega t) + \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \sin(\omega t) \tag{5.1.7}$$

右辺は次のように変形できる。

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.1}$$

ただし、

$$\xi = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

$$\begin{cases} \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1-(1-4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \end{cases} \tag{5.2.3}$$

つまり、質点は振幅ξy_oで振動する。土台の振動の振幅はy_oであったので、ξは土台と質点の振幅の比であることがわかる。また、土台の強制振動に対する質点の“応答”の倍率を表しているとも受け取れる。　そこで、ξは「振幅比」、あるいは、「応答倍率」、「振動伝達率」などと呼ばれる。また、ϕは「位相差」と呼ばれる。

※　式(5.2.2)、(5.2.3)の導出：

式(5.1.7)、(5.2.1)より、

$$\xi y_o = \sqrt{\left[\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o\right]^2 + \left[\frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o\right]^2} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{cases} \xi y_o \cos\phi = \dfrac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \\ \xi y_o \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \end{cases} \tag{5.2.5}$$

土台の強制加振問題の定常解

★見栄えをよくすると・・・

$$\xi y_o = \sqrt{\left[\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\right]^2+\left[\frac{2\zeta\eta^3}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o\right]^2} \tag{5.2.4}$$

実際に計算すると、

$$\begin{aligned}
&\xi y_o \\
&= \sqrt{\frac{1+(-2+8\zeta^2)\eta^2+(1-8\zeta^2+16\zeta^4)\eta^4+4\zeta^2\eta^6}{\left[(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2\right]^2}{y_o}^2} \\
&= \sqrt{\frac{(1+4\zeta^2\eta^2)\left[(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2\right]}{\left[(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2\right]^2}{y_o}^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}}y_o
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

となって、式(5.2.2)

$$\xi = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

を得る。また、

$$\begin{cases}
\xi y_o \cos\phi = \dfrac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o \\
\xi y_o \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}y_o
\end{cases} \tag{5.2.5}$$

より、

$$\begin{cases}
\cos\phi = \dfrac{\dfrac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}}{\xi} \\
\sin\phi = -\dfrac{\dfrac{2\zeta\eta^3}{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}}{\xi}
\end{cases} \tag{5.2.7}$$

これに式(5.2.2)を代入すると、式(5.2.3)を得る。

土台の強制加振問題の定常解

★位相差の意味

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.1}$$

ここで、

$$\sin\phi = -\frac{2\zeta\eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.3}$$

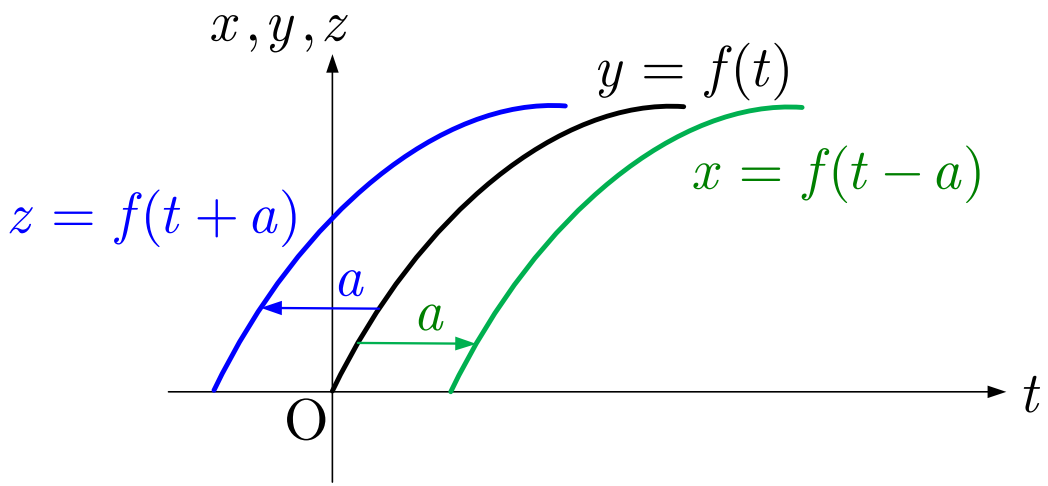
であるので、

$$-\pi < \phi \leq 0 \tag{5.2.8}$$

である。土台の振動は $y = y_o \cos\omega t$ であり，質点は

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) = \xi y_o \cos\left[\omega\left(t - \frac{-\phi}{\omega}\right)\right] \tag{5.2.9}$$

となるので、xのグラフはyのグラフに比べて $-\phi / \omega$ だけ遅れることになる。



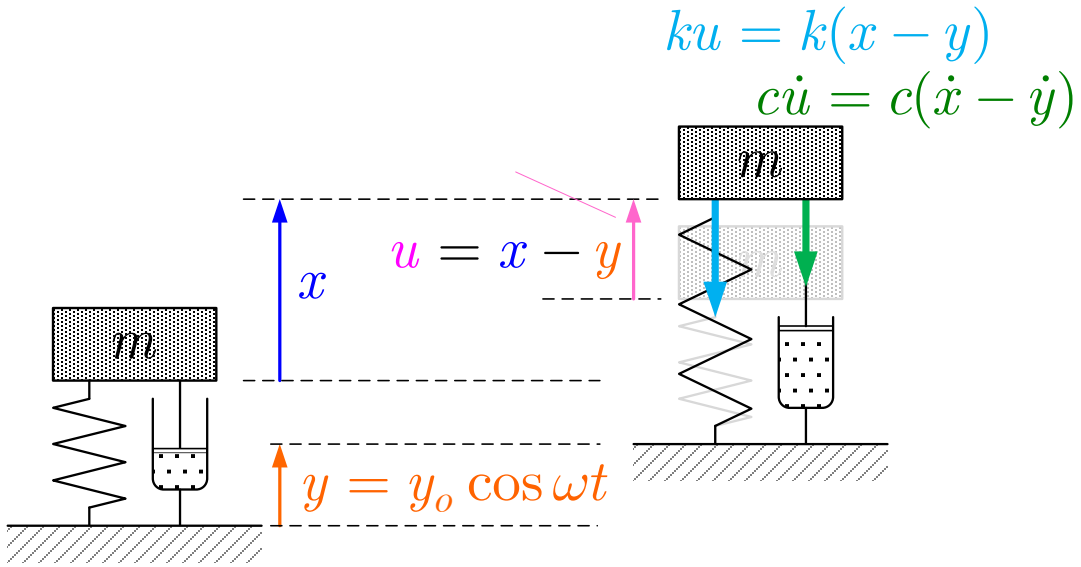
土台の強制加振問題の定常解

★複素数を用いると定常解(特殊解)は比較的簡単に求まる

まとめると、土台を

$$y = y_o \cos \omega t \tag{5.1.2}$$

で加振した場合、バネとダッシュポットで繋がれた質点の応答は、



加振振動数 f とバネ・マス系の固有振動数 f_o との比を η

$$\eta \equiv \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o} \tag{5.1.8}$$

として、

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.1}$$

ただし、ξ は質点の振幅と土台の振幅との比(応答倍率)であり、次式で与えられる。

$$\xi = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

また、位相差 ϕ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1 + 4\zeta^2\eta^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1 - (1 - 4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1 + 4\zeta^2\eta^2}} \end{cases} \tag{5.2.3}$$

ξ も ϕ も ζ と η のみの関数になる。

土台の強制加振問題の定常解

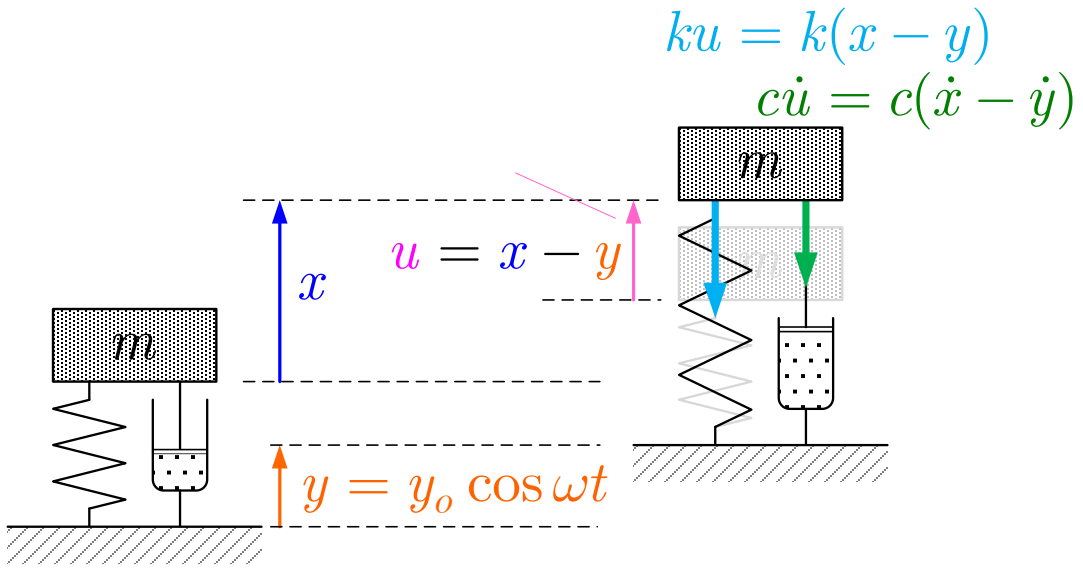
★複素数を用いると定常解(特殊解)は比較的簡単に求まる

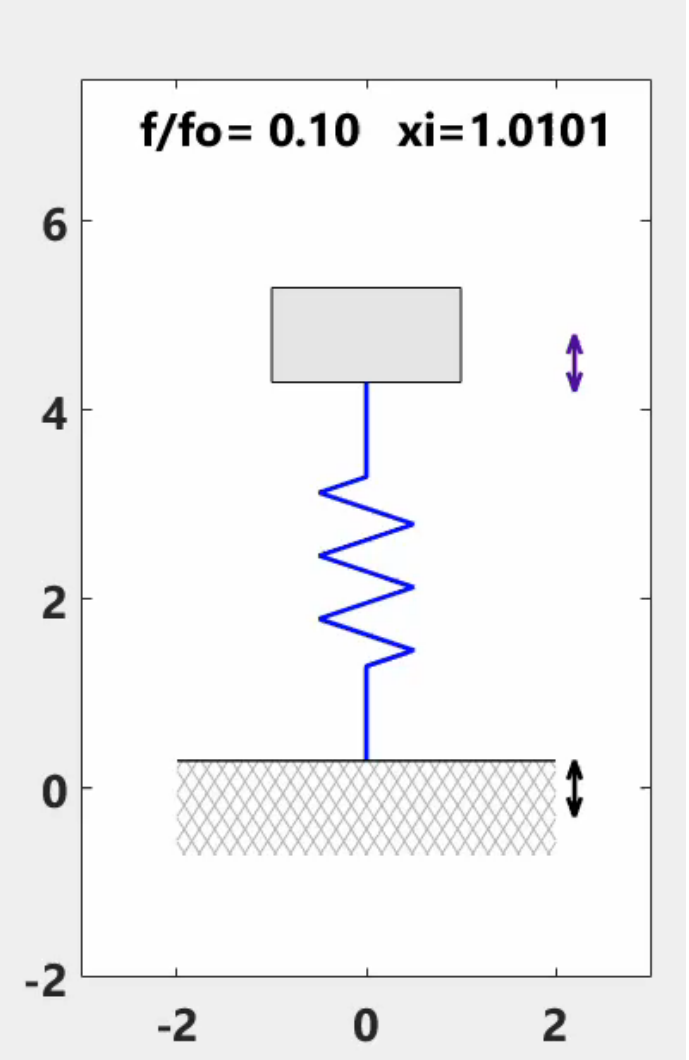
まとめると、土台を

$$y = y_o \cos \omega t \tag{5.1.2}$$

で加振した場合、バネとダッシュポットで繋がれた質点の応答は、

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.1}$$





第2章のまとめ

- バネ・マス・ダンパー系の強制加振には、質点に加振力を直接加える場合と、土台に強制的に振動変位を与える場合の2種類がある。
- 土台の強制加振において、 土台の振幅に対する質点の振幅の比(倍率)ξは振幅比、応答倍率, あるいは、振動伝達率などと呼ばれる。
- また、土台の振動の位相と、質点の振動の位相にはずれがあり、その値ϕは位相差と呼ばれる。
- 一般に位相差ϕの値は負である。
- 応答倍率ξや位相差ϕは、加振振動数とバネ・マス系の固有振動数との比(無次元加振振動数)ηと減衰比ζの関数になっている。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月12日(月)2限

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

第3章　応答倍率と共振

第3章の学修目標

★ 土台の強制加振問題における加振振動数と応答倍率との関係の特徴について説明できる。

★ 土台の強制加振問題における共振について説明できる。

★ 土台の強制加振問題における加振振動数と位相差との関係の特徴について説明できる。

土台の強制加振問題の解

★振動数比と応答倍率との関係にはいくつかの特徴がある

土台を

$$y = y_o \cos \omega t \tag{5.1.2}$$

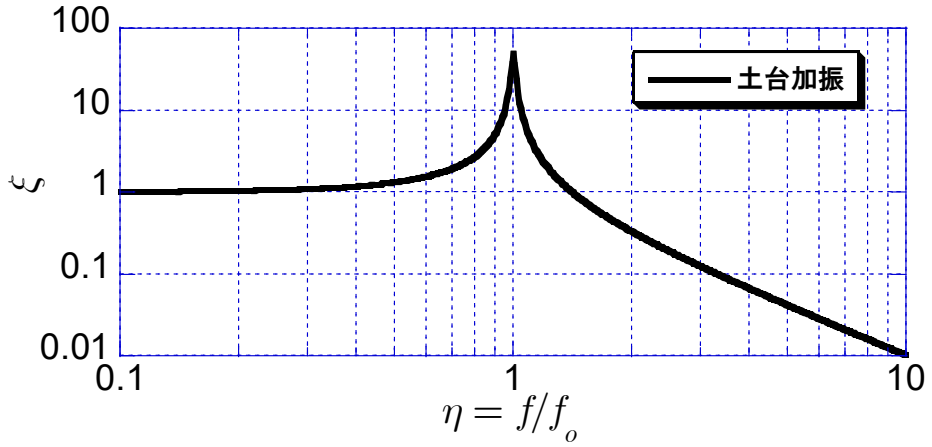
で振動させた場合、バネ・マス・ダッシュポット系の質点の振動は、

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.1}$$

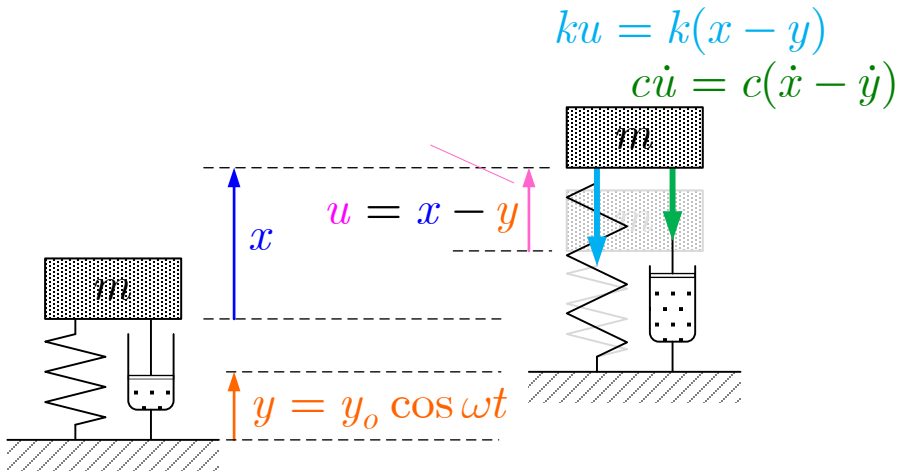
ただし、応答倍率ξは、無次元加振振動数$\eta = f \,/\, f_o$と減衰比ζの関数で表される：

$$\xi = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

グラフにすると、右上図のようになる。

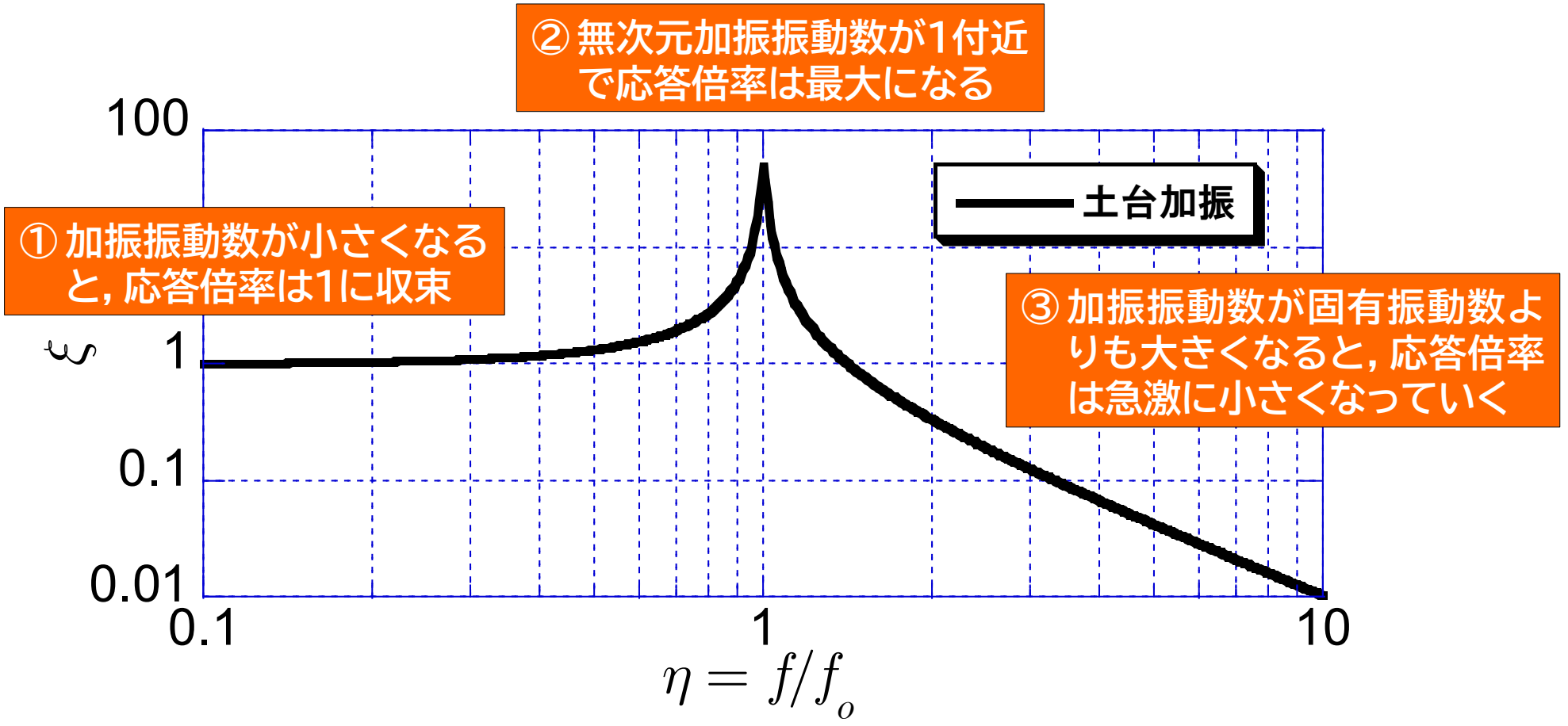


無次元加振振動数と応答倍率との関係（$\zeta = 0.01$）



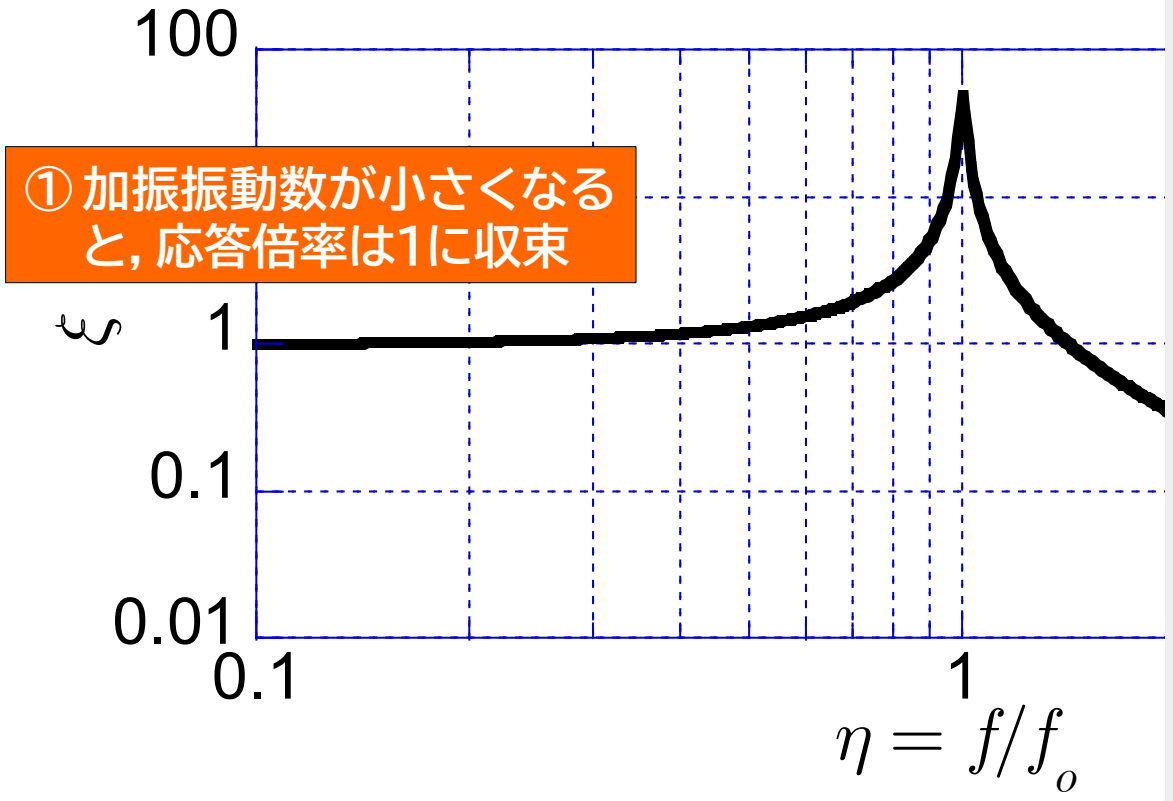
土台の強制加振問題の解

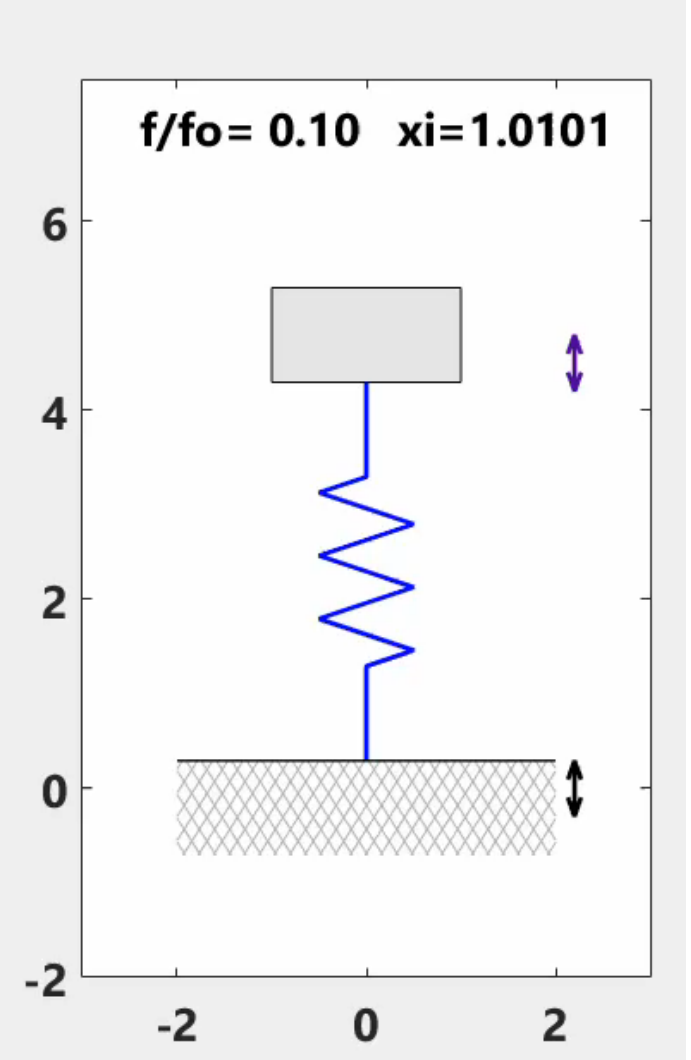
★振動数比と応答倍率との関係にはいくつかの特徴がある



土台の強制加振問題の解

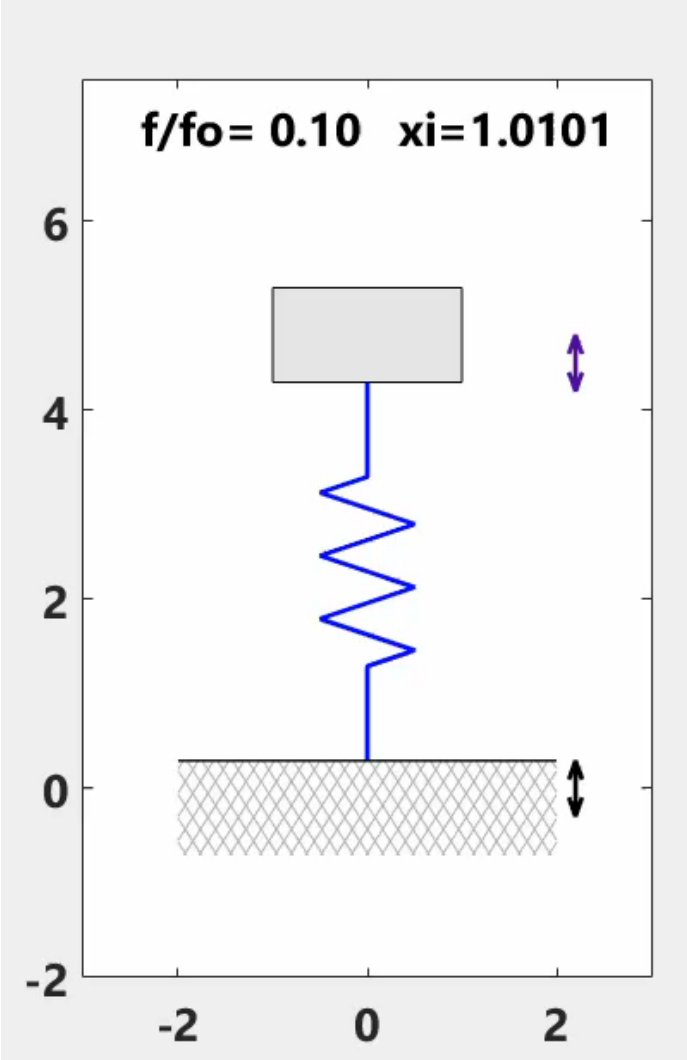
★振動数比と応答倍率との関係にはいくつかの特徴がある

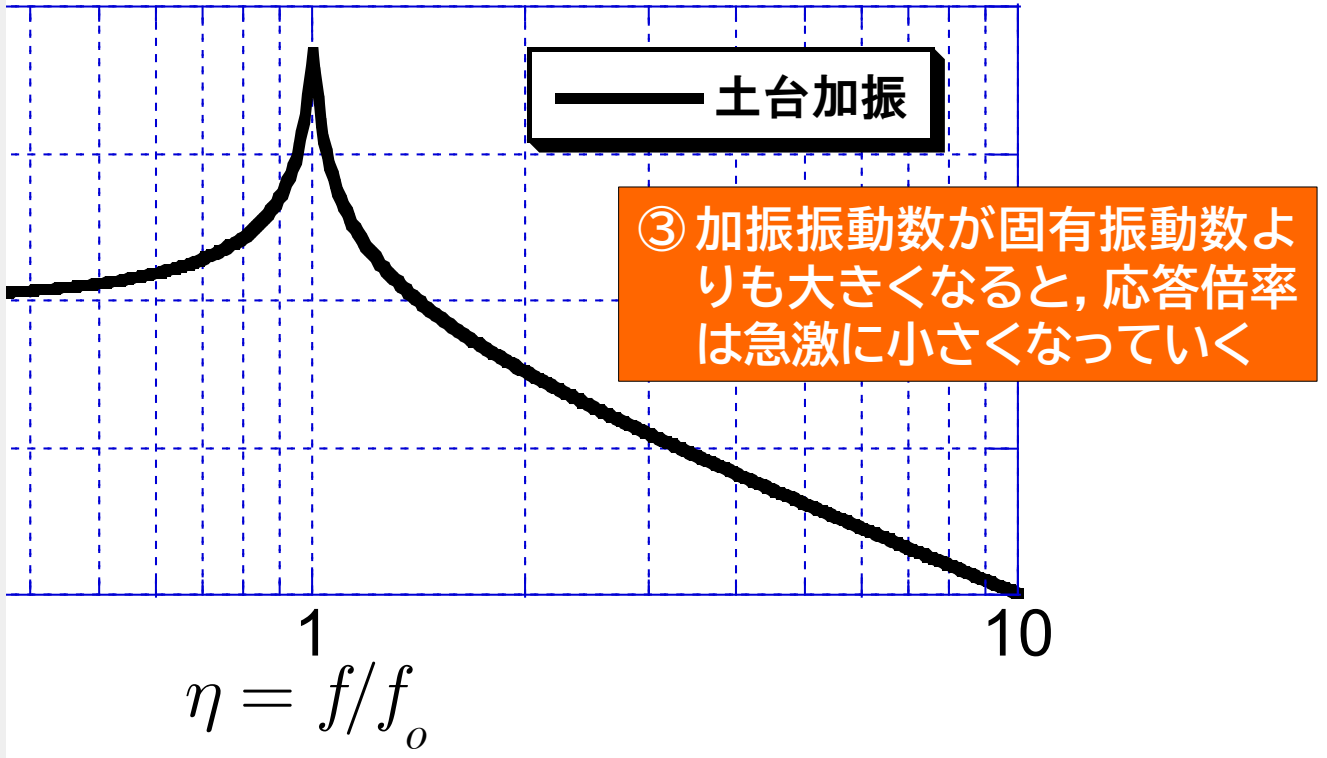




土台の強制加振問題の解

★振動数比と応答倍率との関係にはいくつかの特徴がある

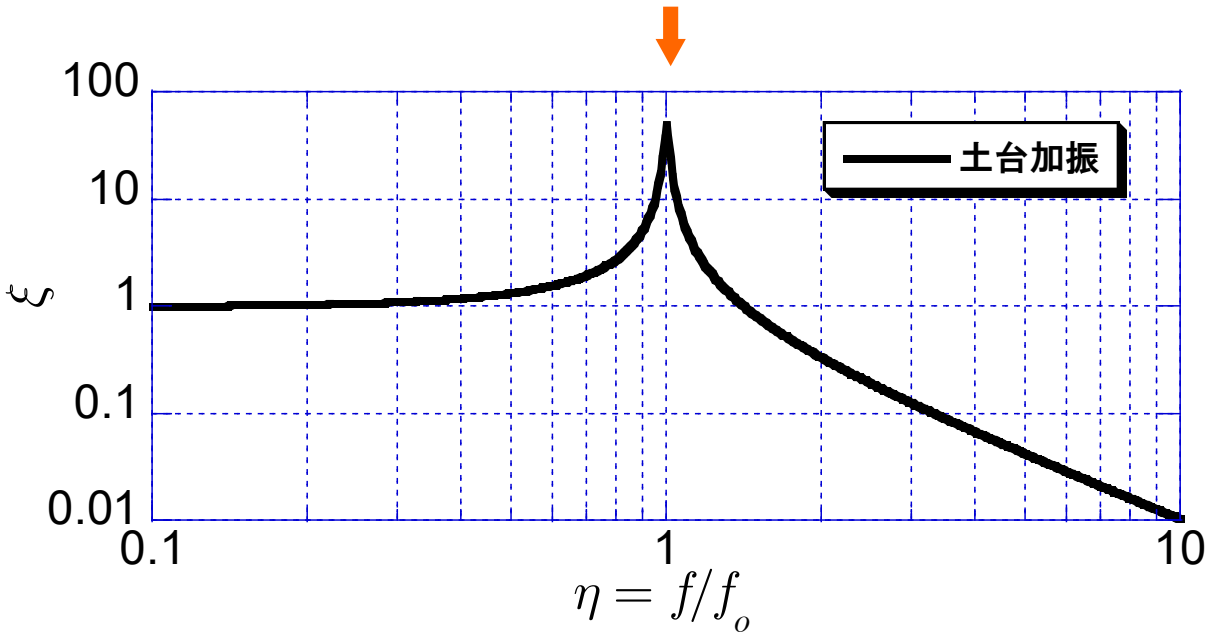




③加振振動数が固有振動数よりも大きくなると，応答倍率は急激に小さくなっていく

土台の強制加振問題の解

★共振



無次元加振振動数と応答倍率との関係($\zeta = 0.01$)

加振振動数がある値になると、振幅が急激に大きくなる現象は共振(resonance)と呼ばれる。このときの加振振動数を共振振動数と呼ぶ。

共振振動数を求めるには、応答倍率ξが最大となる無次元加振振動数ηを求めればよい。つまり、

$$\xi = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

において、

$$d\xi \,/\, d\eta = 0 \tag{5.3.1}$$

より、

$$2\zeta^2\eta^4 + \eta^2 - 1 = 0 \tag{5.3.2}$$

この式を満たすηをη_rと書くと、

$$\eta_r = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{4\zeta^2}} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}} \le 1 \tag{5.3.3}$$

このときの応答倍率ξは共振倍率と呼ばれ、これをξ_rと書くと、

$$\xi_r = \cdots = \frac{1}{2\zeta}\frac{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}\right)}} \tag{5.3.4}$$

なお, 減衰比ζが小さければ,

$$\eta_r \approx 1-\zeta^2 \quad , \quad \xi_r \approx \frac{1}{2\zeta} \tag{5.3.5}$$

土台の強制加振問題の解

★共振振動数と共振倍率の導出

※ 式(5.3.4)の導出

η_r は式(5.3.2)の解、すなわち、

$$2\zeta^2{\eta_r}^4+{\eta_r}^2-1=0 \tag{5.3.6}$$

を観たすが、このときの応答倍率の値

$$\xi_r=\frac{\sqrt{1+4\zeta^2{\eta_r}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_r}^2)^2+4\zeta^2{\eta_r}^2}} \tag{5.3.7}$$

を計算すると、

$$\xi_r=\frac{1}{2\zeta}\frac{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}\right)}} \tag{5.3.8}$$

となることを証明する。まず、式(5.3.6)より、

$$1-{\eta_r}^2=2\zeta^2{\eta_r}^4 \tag{5.3.9}$$

であるので、式(5.3.7)の右辺の分母の根号の中は

$$\begin{aligned}(1-{\eta_r}^2)^2+4\zeta^2{\eta_r}^2&=4\zeta^4{\eta_r}^8+4\zeta^2{\eta_r}^2\\&=4\zeta^2{\eta_r}^2(\zeta^2{\eta_r}^6+1)\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

となるので、式(5.3.7)は

$$\xi_r=\frac{\sqrt{1+4\zeta^2{\eta_r}^2}}{\sqrt{4\zeta^2{\eta_r}^2(\zeta^2{\eta_r}^6+1)}}=\frac{1}{2\zeta\eta_r}\sqrt{\frac{1+4\zeta^2{\eta_r}^2}{\zeta^2{\eta_r}^6+1}} \tag{5.3.11}$$

ここで、式(5.3.6)より、

$$\zeta^2=\frac{1-{\eta_r}^2}{2{\eta_r}^4} \tag{5.3.12}$$

であるので、これを式(5.3.13)の根号の中に代入すると

$$\begin{aligned}\xi_r&=\frac{1}{2\zeta\eta_r}\sqrt{\frac{1+4\dfrac{1-{\eta_r}^2}{2{\eta_r}^4}{\eta_r}^2}{\dfrac{1-{\eta_r}^2}{2{\eta_r}^4}{\eta_r}^6+1}}=\frac{1}{2\zeta\eta_r}\sqrt{\frac{1+2\dfrac{1-{\eta_r}^2}{{\eta_r}^2}}{\dfrac{1-{\eta_r}^2}{2}{\eta_r}^2+1}}\\&=\frac{1}{2\zeta{\eta_r}^2}\sqrt{\frac{2(2-{\eta_r}^2)}{2+{\eta_r}^2-{\eta_r}^4}}=\frac{1}{2\zeta{\eta_r}^2}\sqrt{\frac{2(2-{\eta_r}^2)}{(2-{\eta_r}^2)(1+{\eta_r}^2)}}\\&=\frac{1}{2\zeta{\eta_r}^2}\sqrt{\frac{2}{1+{\eta_r}^2}}\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

これに、式(5.3.3)を代入すると、

土台の強制加振問題の解

★共振振動数と共振倍率の導出

$$\xi_r = \frac{1}{2\zeta\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}}\sqrt{\frac{2}{1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}}} = \frac{1}{2\zeta}\frac{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}\right)}} \tag{5.3.14}$$

※ 式(5.3.5)の導出

次に、ζが小さい時、

$$\eta_r \approx 1-\zeta^2 \quad , \quad \xi_r \approx \frac{1}{2\zeta} \tag{5.3.5}$$

となることを証明する。まず、式(5.3.3)

$$\eta_r = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}} \tag{5.3.3}$$

より、ζが小さい時には

$$\sqrt{1+8\zeta^2} = \left(1+8\zeta^2\right)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 8\zeta^2 = 1+4\zeta^2 \tag{5.3.15}$$

となるので、

$$\eta_r \approx \sqrt{\frac{2}{1+1+4\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\zeta^2}} = \left(1+2\zeta^2\right)^{-1/2} \approx 1-\frac{1}{2}\cdot 2\zeta^2 = 1-\zeta^2 \tag{5.3.16}$$

また、式(5.3.14)において、ζが微小であるとき、

$$\frac{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}\right)}} \approx \frac{1+\sqrt{1+8\times 0}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{2}{1+\sqrt{1+8\times 0}}\right)}} = 1 \tag{5.3.17}$$

となるので、

$$\xi_r \approx \frac{1}{2\zeta}\times 1 = \frac{1}{2\zeta} \tag{5.3.18}$$

よって, 式(5.3.16)と(5.3.18)より、 確かに式(5.3.5)が成り立つことがわかる。

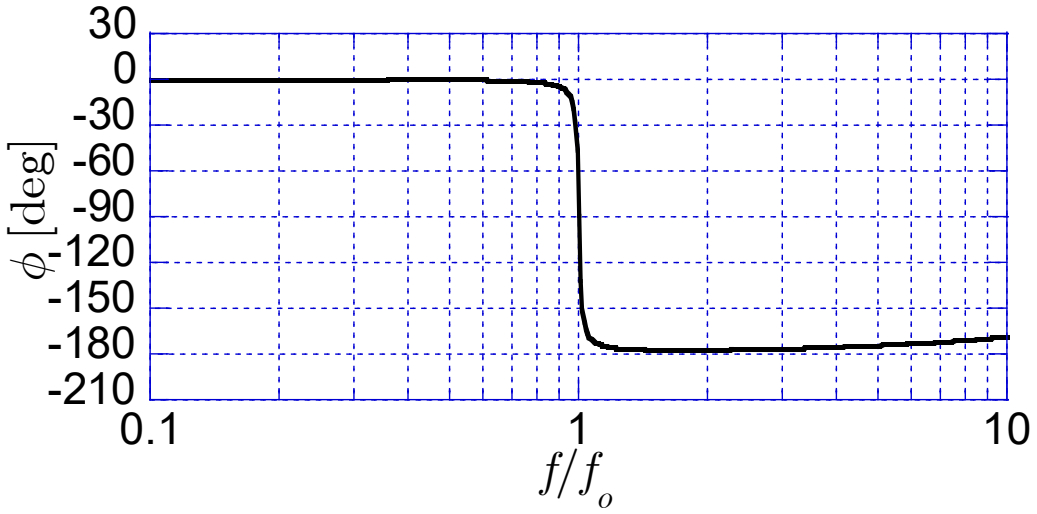
土台の強制加振問題の解

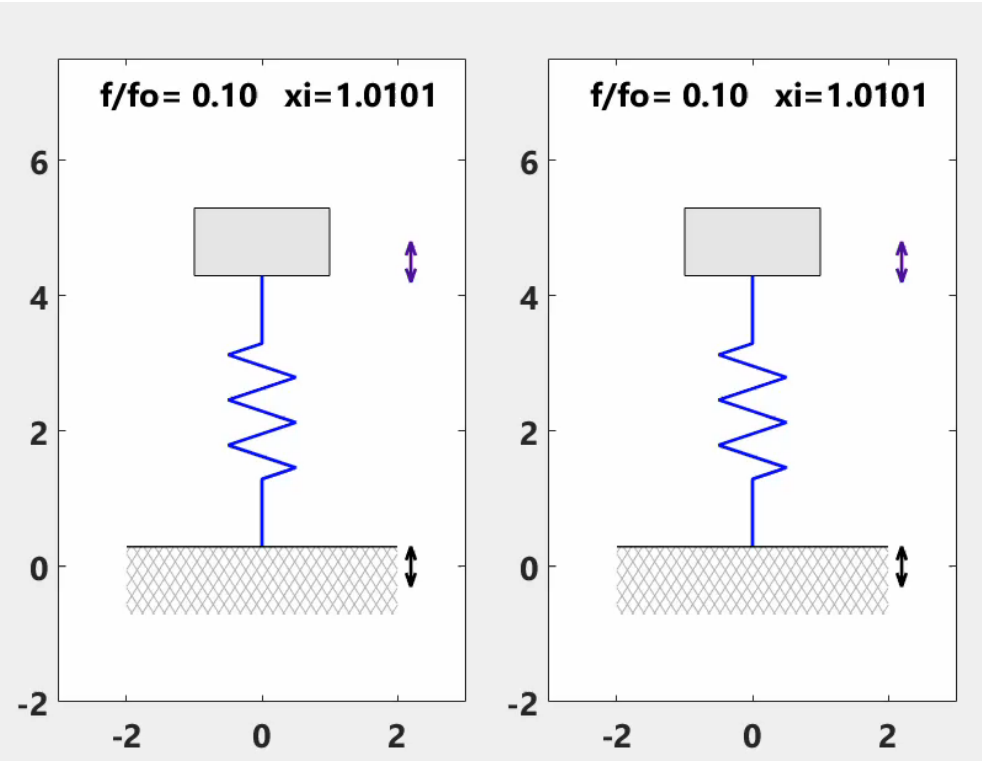
★位相差

位相差ϕは

$$\begin{cases} \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1-(1-4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \end{cases} \tag{5.2.3}$$

グラフにすると、下図のようになり、**共振の前後で位相が反転する**（180°近く変化する）ことがわかる。





第3章のまとめ

- 土台の強制加振問題における加振振動数と 応答倍率との関係 には以下のような特徴がある。
  - 加振振動数が小さいと、質点は土台とほぼ同じ振幅 （で、かつ、ほぼ同じ位相）で振動する。
  - 加振振動数が固有振動数付近で応答倍率は最大となる。
  - 加振振動数がさらに大きくなると、 応答倍率は急激に減少していく。
- 減衰比が小さい場合、土台を強制加振すると、加振振動数が固 有振動数付近で応答倍率が急激に大きくなる。この現象は共振と呼ばれる。
- 土台の強制加振問題において、加振振動数を大きくしていくと、 共振前の位相は土台とほぼ同じであるが、共振振動数を超えると、位相は ほぼ180°遅れる（位相がほぼ反転する）。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月12日(月)2限

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

第4章　ボード線図とその特徴

第4章の学修目標

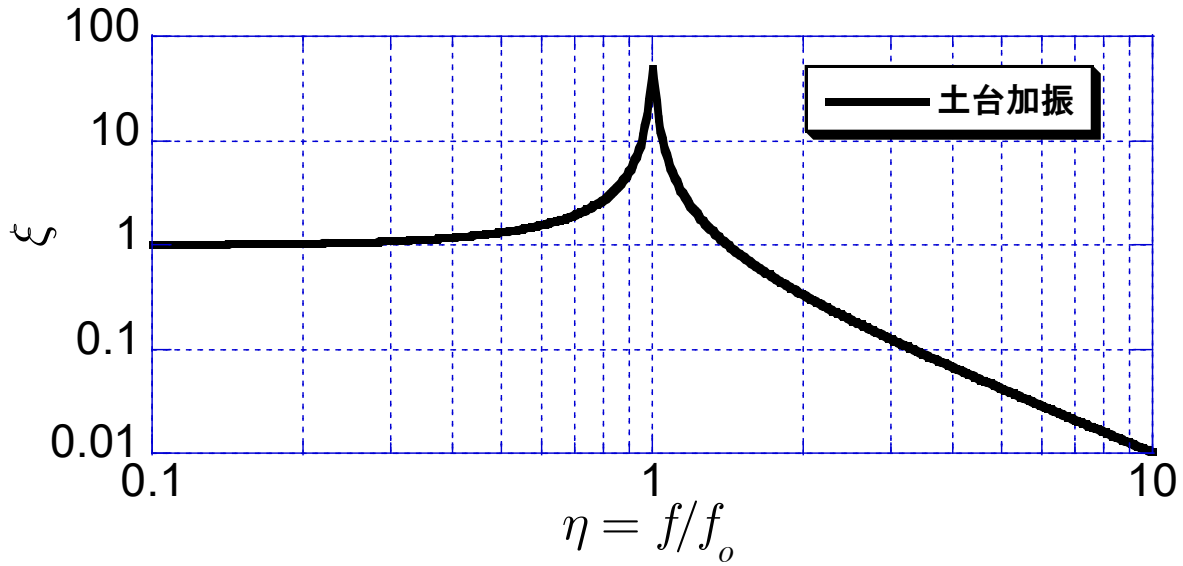
★ ボード線図について説明できる。

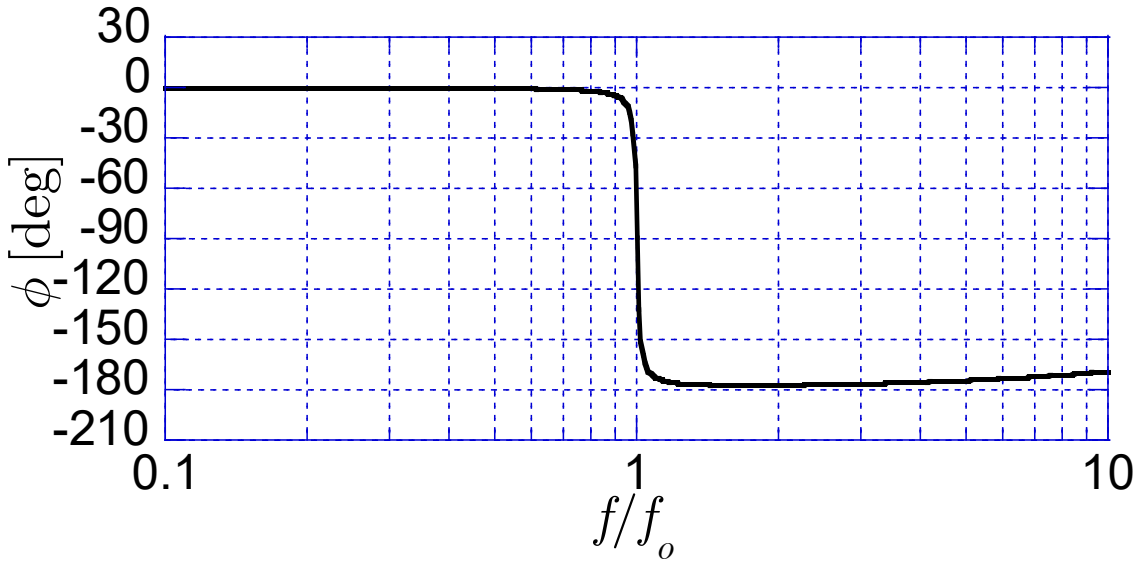
★ 減衰比が応答倍率に与える影響について、 ボード線図を用いて説明できる。

★ 周波数応答について説明できる。

ボード線図

★応答倍率のグラフと位相差のグラフのセット（横軸は加振振動数）

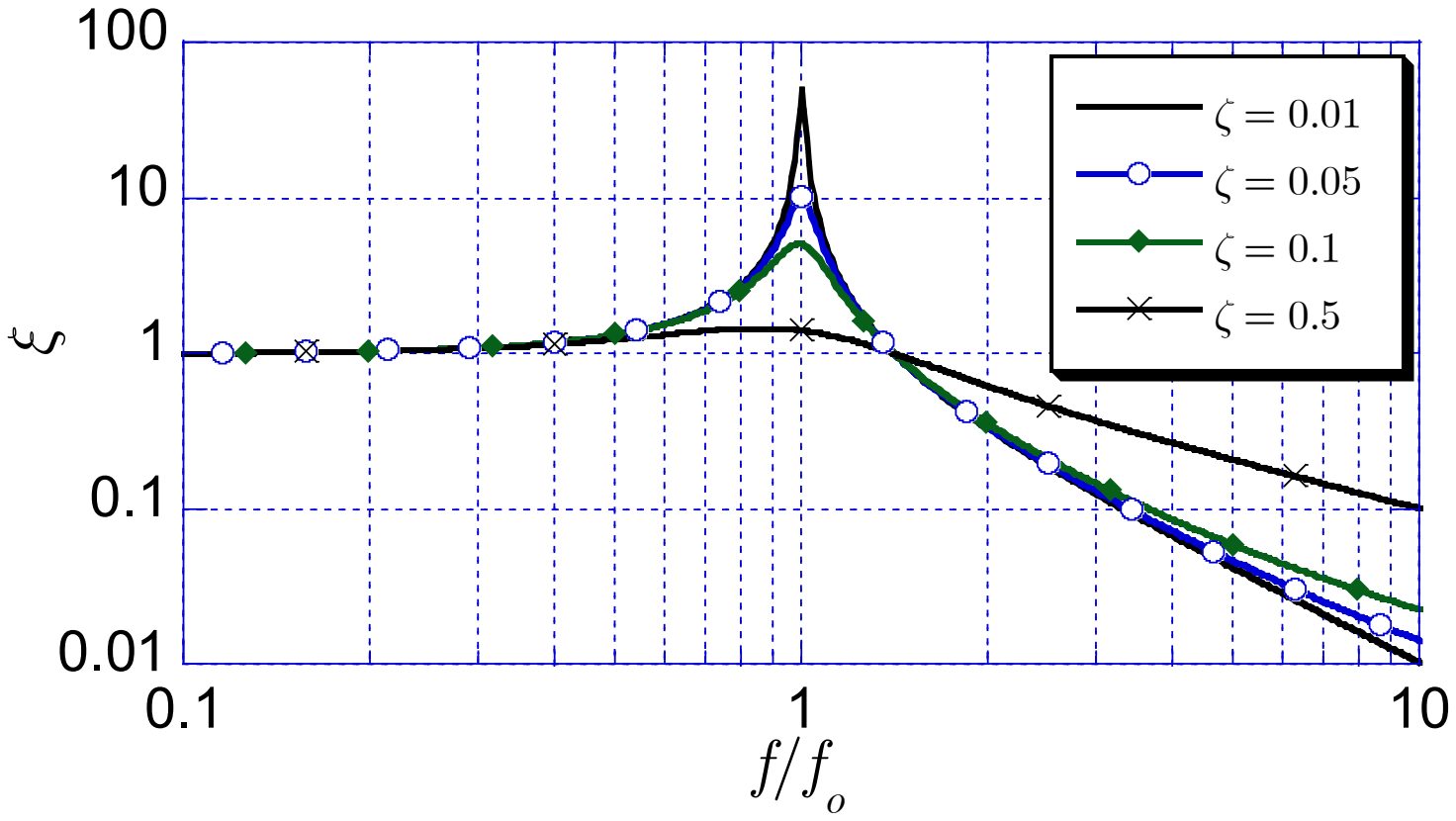




減衰比が応答倍率に及ぼす影響

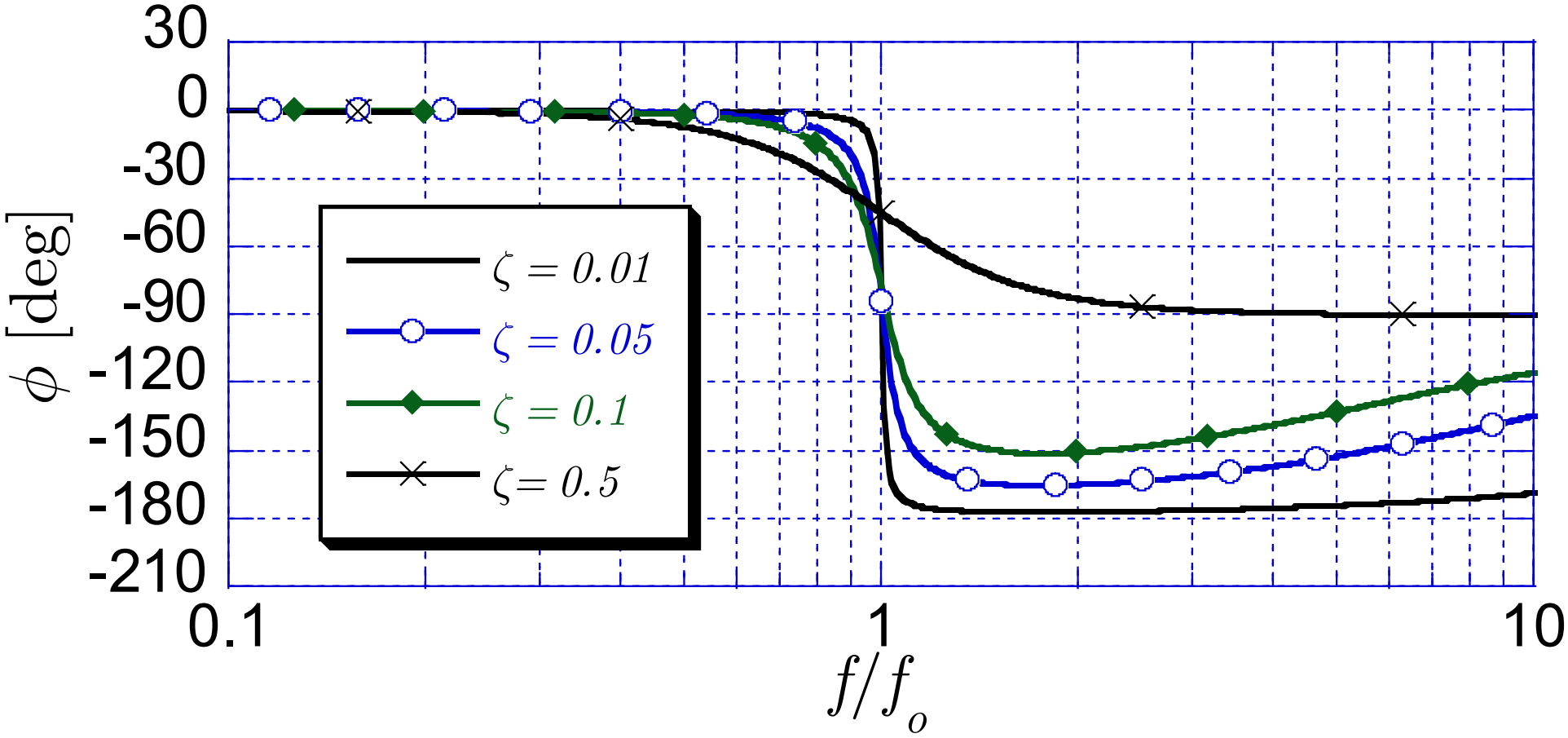
★減衰比が大きければいいわけでもない？

- 減衰比が大きくなると、共振点での応答倍率は小さくなる。
- しかし、振動数が大きくなっても、あまり減衰しなくなる（ダンパの設計はなかなか難しい・・・）。



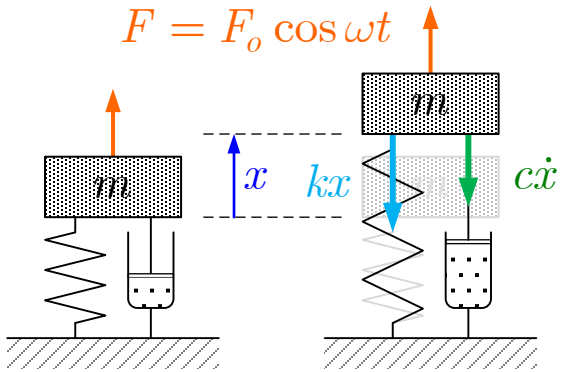
減衰比が位相差に及ぼす影響

★減衰比が大きいと，共振前後での位相の変化が小さくなる



ちなみに，外力加振の場合は

★周波数応答：単位振幅の外力による応答

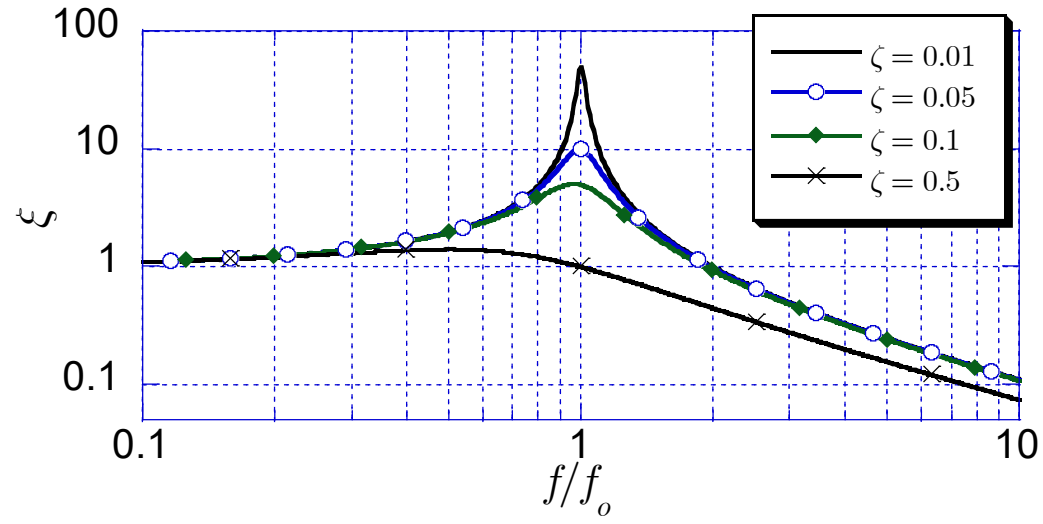


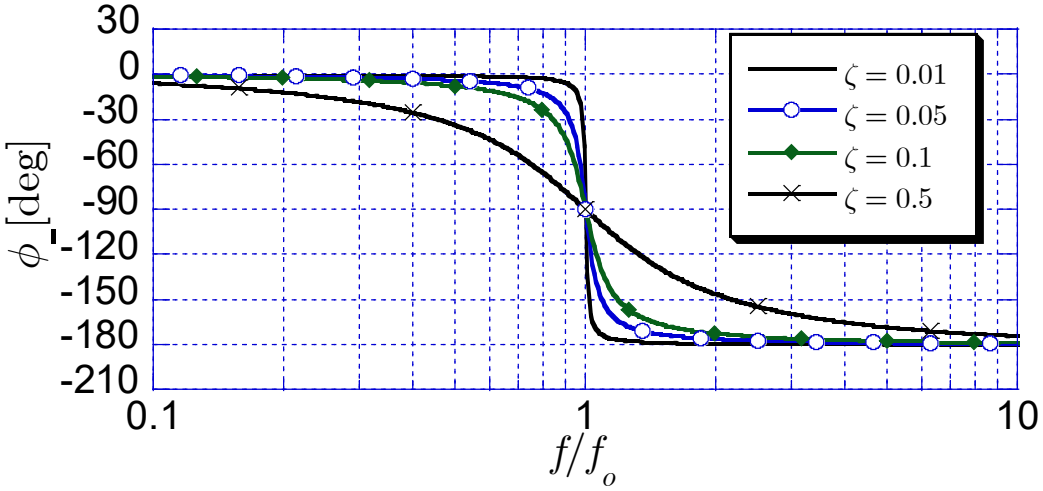
結果だけ示すと、応答倍率ξおよび位相差ϕは、

$$\xi \equiv \frac{a_o \omega^2}{F_o \,/\, m} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.4.1}$$

$$\begin{cases} \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1-\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \end{cases} \tag{5.4.2}$$

減衰が大きくなると、どの振動数でも応答倍率は小さくなる。





第4章のまとめ

- 加振振動数と応答倍率との関係のグラフと、加振振動数と位相差との関係のグラフのセットはボード線図と呼ばれる。
- 土台の強制加振問題において、減衰比が大きいほど、共振時の応答倍率は小さくなるが、 加振振動数が大きくなっても応答倍率があまり下がらなくなる。
- 周波数応答とは、対象物に直接、加振力を加えた際の応答（振幅および位相差）を指す。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月12日(月)2限

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

第5章　Q値

第5章の学修目標

★ 強制振動問題におけるQ値について説明できる。

★ 強制振動の実験データからQ値を求めることができる。

Q値

★共振倍率のこと

共振振動数 f_r は、

$$f_r = \eta_r \times f_o = f_o\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{2}} \approx (1-\zeta^2)f_o \quad (5.5.1)$$

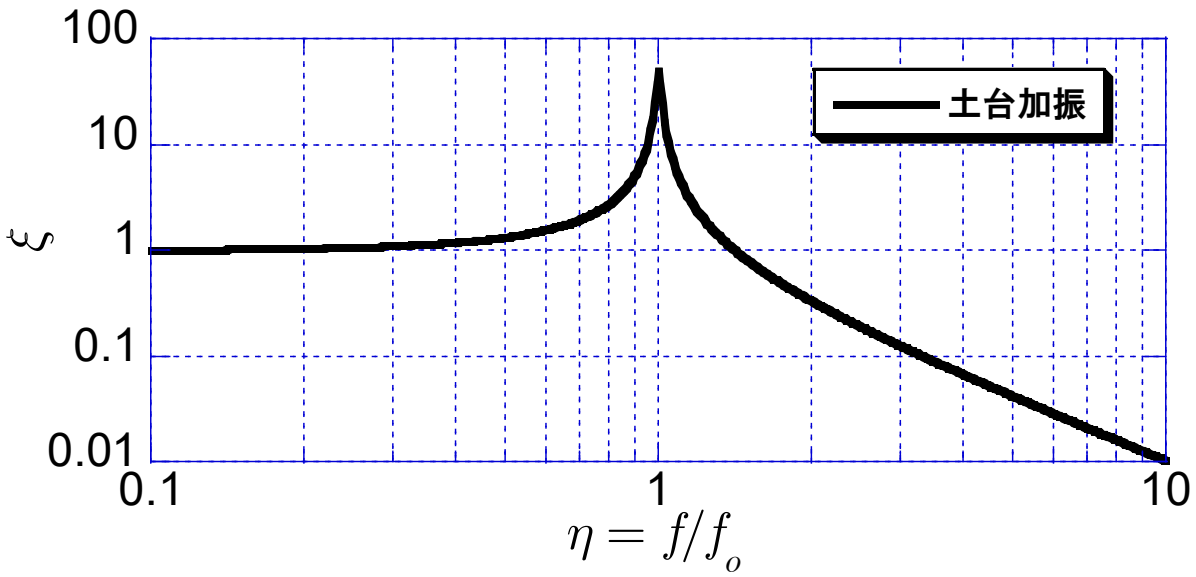
であり、共振時の振幅比、すなわち、共振倍率は、

$$\xi_r = \frac{1}{2\zeta}\frac{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}{\sqrt{2\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{1+8\zeta^2}}\right)}} \approx \frac{1}{2\zeta} \quad (5.5.2)$$

であった。 この共振倍率はQ値（Q factor）とも呼ばれる。したがって、Q値が求まれば、

$$\zeta \approx \frac{1}{2Q} \quad (5.5.3)$$

により、減衰比 ζ が求まる。

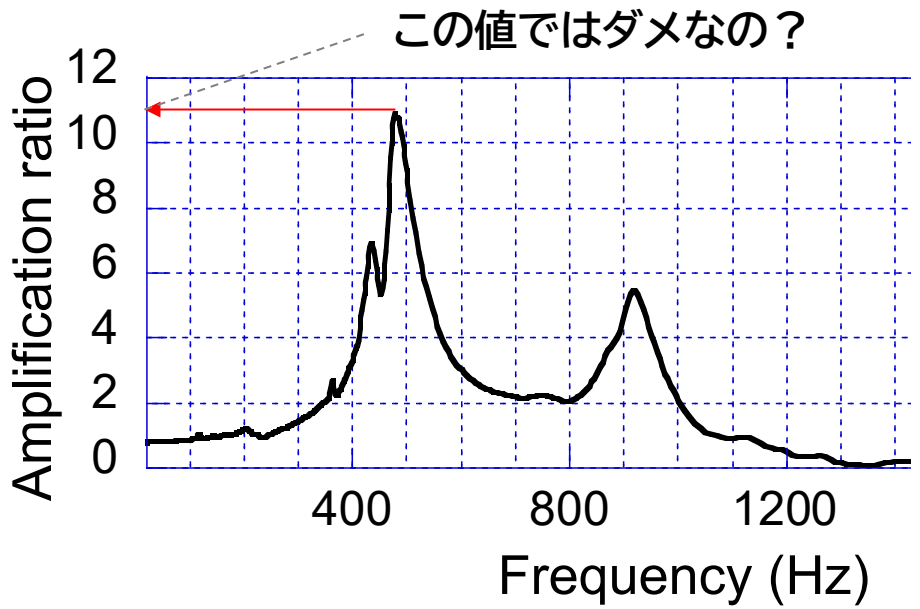


無次元加振振動数と応答倍率との関係（$\zeta = 0.01$）

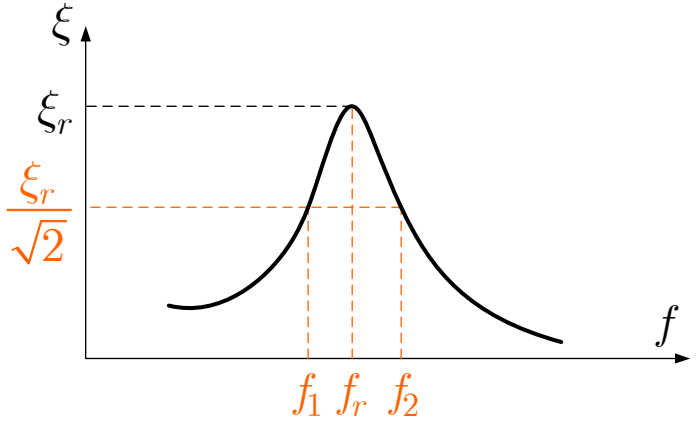
実験データからQ値を求める方法

★実験データには誤差が含まれるので注意する必要がある

実験データのピーク値を「Q値」とするのではなく、 別の方法で求めることも多い（ピーク値を用いることが絶対にダメというわけではないが、ピーク値をぴったりと計測することは容易ではなく、誤差が入りやすいので、別の方法で求めることが多い）。



結果だけ示すと、加振振動数 f と応答倍率 ξ との関係のデータが得られたとき、まず、共振振動数 f_r のときの応答倍率、すなわち、共振倍率 ξ_r を $\sqrt{2}$ で割った値を求める。そして、応答倍率がその値に等しくなるときの加振振動数をグラフから求める。そのような振動数は2つあるはずで、それぞれ f_1 および f_2 とする。



このとき、ζ が小さければ, Q値は次式で求められる。

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{5.5.4}$$

実験データからQ値を求める方法

★Q値の近似式の求め方

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{5.5.4}$$

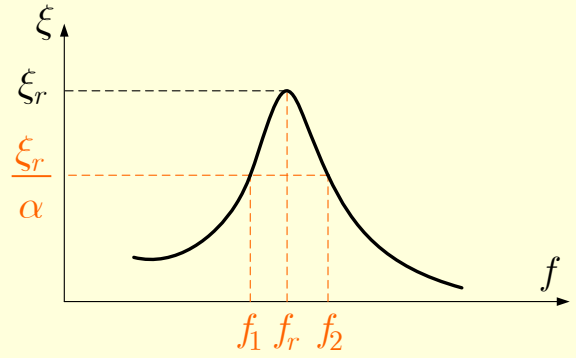
※ 式(5.5.4)の導出

以下、共振付近のある加振振動数 f_c における応答倍率が ξ_c であるとする。このとき、応答倍率が ξ_c / α となる加振振動数を f_1 および f_2 としたときに、

$$\frac{f_c}{f_2 - f_1} = \xi_c \tag{5.5.5}$$

となる α を求めてみる。まず、減衰比 ζ が小さければ、

$$\xi_c = \frac{1}{2\zeta} + \delta \quad , \quad \delta \ll 1 \tag{5.5.6}$$



である。求めるべきは、以下を満たす α である。

$$\frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} = \frac{\xi_c}{\alpha} \quad (\alpha > 1) \tag{5.5.7}$$

いま、$\eta^2 \equiv x$ とおくと、

$$\frac{\sqrt{1+4\zeta^2 x}}{\sqrt{(1-x)^2+4\zeta^2 x}} = \frac{\xi_c}{\alpha} \equiv \frac{1}{p}, \quad p \equiv \frac{\alpha}{\xi_c} \tag{5.5.8}$$

整理すると、

$$x^2 - 2[1 - 2\zeta^2(1-p^2)]x + 1 - p^2 = 0 \tag{5.5.9}$$

ζ が小さいときには、$\xi_c \approx 1/2\zeta$ であるので、

$$p = O(\zeta) \tag{5.5.10}$$

であり、

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2\zeta^2(1-p^2) \pm \sqrt{[1-2\zeta^2(1-p^2)]^2 - 1 + p^2} \\ &\approx 1 \pm \sqrt{p^2 - 4\zeta^2} \end{aligned} \tag{5.5.11}$$

したがって、

実験データからQ値を求める方法

★Q値の近似式の求め方

$$\eta = \sqrt{x} \approx \sqrt{1 \pm \sqrt{p^2 - 4\zeta^2}} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4\zeta^2} \quad (5.5.12)$$

よって、

$$\begin{cases} f_1 \approx f_o\left(1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4\zeta^2}\right) \\ f_2 \approx f_o\left(1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4\zeta^2}\right) \end{cases} \quad (5.5.13)$$

また、ζが小さいときは、

$$f_c = f_o(1 - \zeta^2 + \Delta) \quad , \quad \Delta \ll 1 \quad (5.5.14)$$

であったので、以上より、

$$\frac{f_c}{f_2 - f_1} \approx \frac{f_o(1 - \zeta^2 + \Delta)}{f_o\sqrt{p^2 - 4\zeta^2}} \approx \frac{1 + \Delta}{\sqrt{p^2 - 4\zeta^2}} \quad (5.5.15)$$

ここで、

$$p \equiv \frac{\alpha}{\xi_c} \quad (5.5.16)$$

であったので、

$$\frac{f_c}{f_2 - f_1} \approx \frac{(1 + \Delta)\xi_c}{\sqrt{\alpha^2 - 4{\xi_c}^2\zeta^2}} \quad (5.5.17)$$

したがって、

$$\alpha^2 - 4{\xi_c}^2\zeta^2 = (1 + \Delta)^2 \quad (5.5.18)$$

となるようにαを決めれば、

$$\frac{f_c}{f_2 - f_1} \approx \xi_c \quad (5.5.5)$$

となる。ここで、

$$\xi_c = \frac{1}{2\zeta} - \delta \quad , \quad \delta \ll 1 \quad (5.5.6)$$

であったので、式(5.1.18)より、

$$\alpha = \sqrt{(1 + \Delta)^2 + (1 - 2\zeta\delta)^2} \quad (5.5.19)$$

とすればよい。例えば、実験で共振点を求めると、

$$\Delta \approx 0 \quad , \quad \delta \approx 0 \quad (5.5.20)$$

となるはずなので、式(5.5.19)より、

$$\alpha = \sqrt{2} \quad (5.5.21)$$

実験データからQ値を求める方法

★Q値の近似式の求め方

とすればよいことがわかる。なお、式(5.5.19)より、

$$\alpha \approx \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\Delta-\zeta\delta\right) \approx \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{2\xi_r}\delta\right) \quad (5.5.22)$$

となるので、計測誤差Δ、δの値がわかれば、αをどのくらい調整すればよいかがわかる。結論から述べると、よほど計測誤差が大きくない限り、$\alpha=\sqrt{2}$として問題ない。実際、実験計測における応答倍率の最大値をξ_c、そのときの加振振動数をf_cとすれば、

$$\Delta=\frac{f_c-f_r}{f_r} \quad , \quad \delta=\xi_r-\xi_c \quad (5.5.23)$$

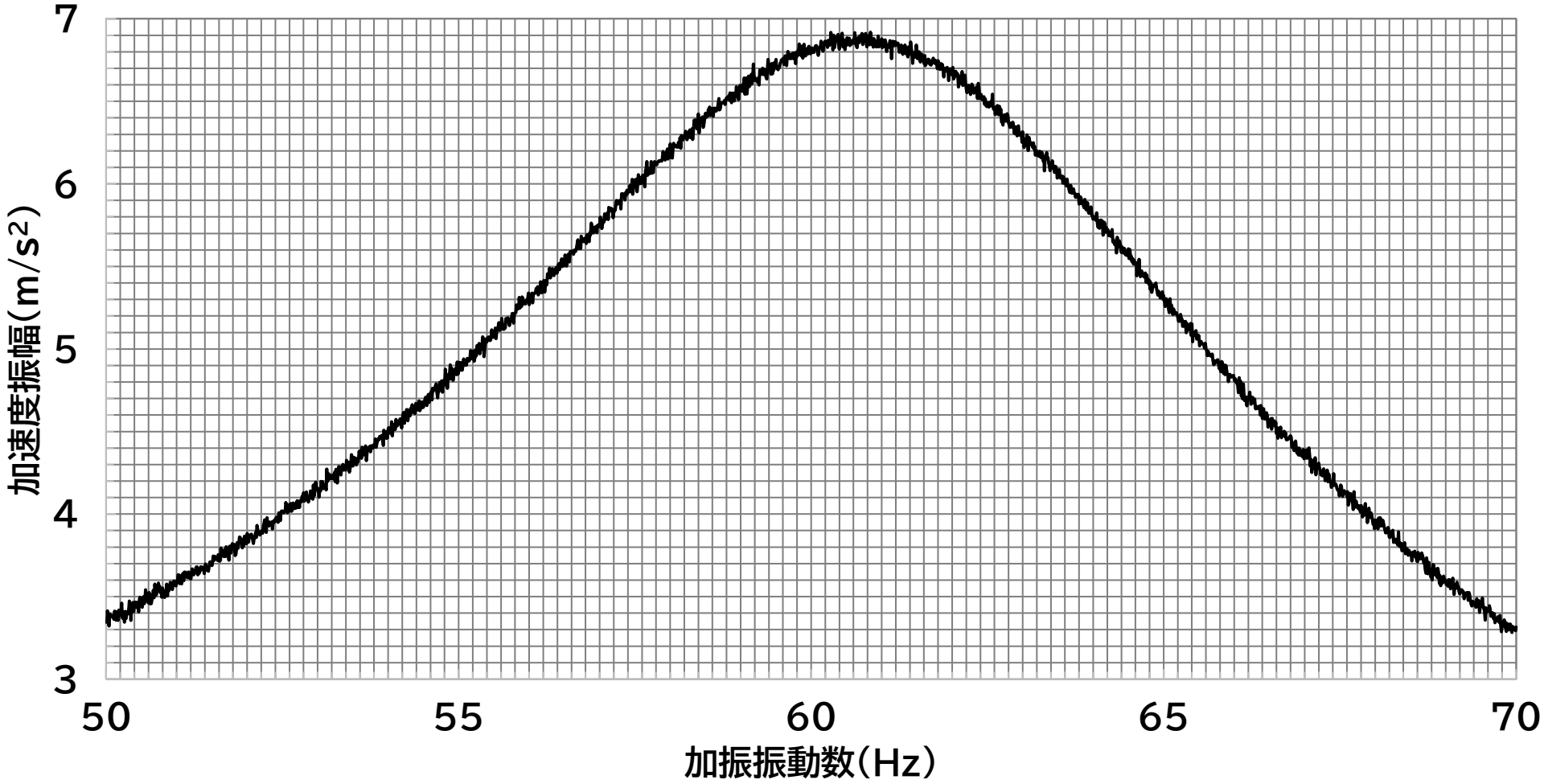
とすればよく、実験結果からΔやδを計算してみると、思いのほか、小さな値であることがわかるだろう。
いずれにしても、Q値は

$$Q=\frac{f_c}{f_2-f_1} \quad , \quad \xi(f_1)=\xi(f_2)=\frac{\xi_c}{\alpha} \quad (5.5.24)$$

により求められることとなる。

実験データからQ値を求める方法

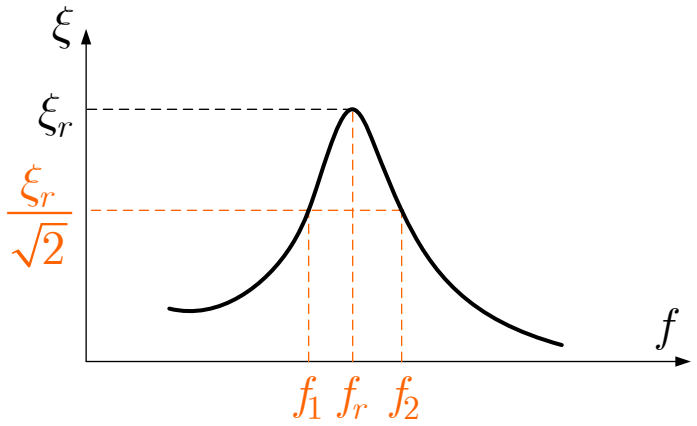
【例題5.5.1】ある実験で、加振振動数を変化させて、応答データから応答倍率を計算してプロットしたところ、下図のようになった。Q値を求めなさい。



第5章のまとめ

- 共振倍率は、Q値とも呼ばれる。
- 加振実験では、計測誤差等を考慮し、 ピーク値 ξ_r そのものをQ値としない場合もある。
- 例えば、ピーク時の振幅比 ξ_r と、 そのときの加振振動数（共振振動数）f_r から、式 $(5.5.4)$ によりQ値を求めることができる。

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{5.5.4}$$



振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

2025年5月12日(月)2限

課題

2025年5月18日(日)18時00分締切

[1] 土台をある一定の振動数で強制加振させたときの、 土台と質点の加速度をそれぞれ加速度計で計測したところ、エクセルファイル「振動工学2025_第5回_課題01.xlsx」のようになった。加振振動数、応答倍率、位相差をそれぞれ求めなさい(それぞれ1点で、計3点)。

[2] 一自由度振動系の物体の土台を5Hzから80Hzの範囲で強制加振したところ、 加振振動数と応答倍率との関係は、エクセルファイル「振動工学2025_第5回_課題02.xlsx」のようになった。この実験計測の問題点を指摘するとともに、この系の1次の共振点のQ値を推定しなさい(2点)。

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振

おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

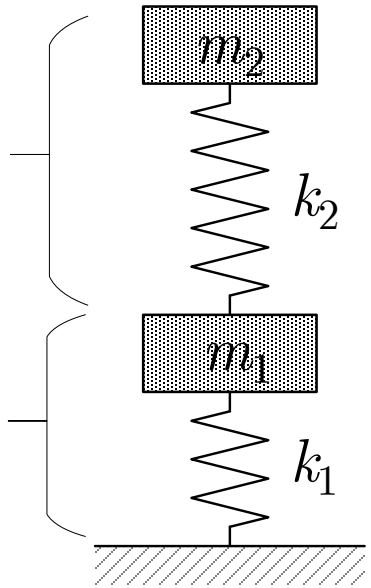
― 線形振動の基礎 ―

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第6回の学修目標

- ★ 2自由度バネ・マス系の固有振動数と固有振動モードの導出法について説明できる。
- ★ 2自由度バネ・マス系の固有振動数について説明できる。
- ★ 固有振動モードの直交性について説明できる。
- ★ 固有振動モードの完全性について説明できる。
- ★ モードの正規化について説明できる。
- ★ 剛体モードについて説明できる。



第6回の全体構成

第1章　2自由度バネ・マス系の運動方程式とその解

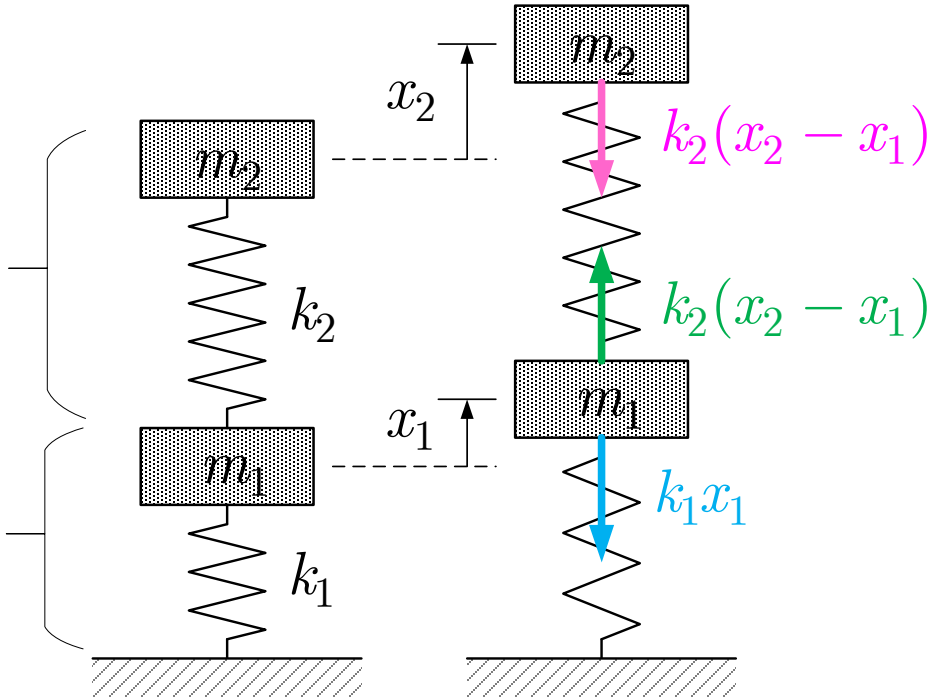
第2章　固有振動モード

第3章　モードの直交性・完全性

第4章　モードの正規化

第5章　剛体モード

感想、宿題



振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

第1章　2自由度バネ・マス系の運動方程式とその解

第1章の学修目標

★ 2自由度バネ・マス系が自由振動するときの 運動方程式を定式化できる。

★ 2自由度バネ・マス系の固有振動数を導出できる。

2自由度バネ・マス系の自由振動

★固有値問題を解く

質点1の運動方程式は、

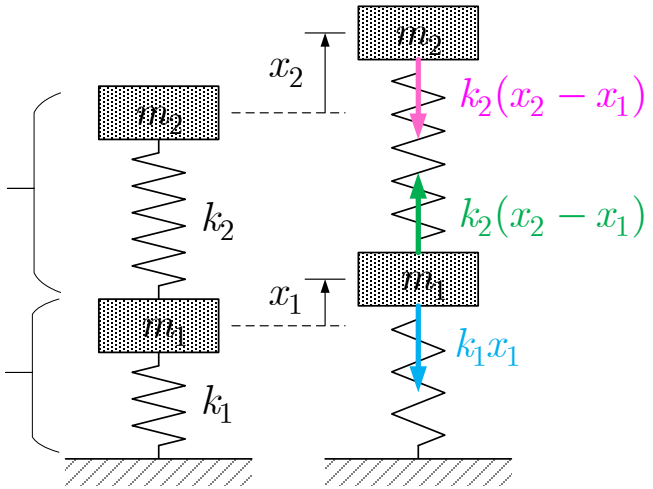
$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \tag{6.1.1}$$

質点2の運動方程式は、

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \tag{6.1.2}$$

式(6.1.1)、(6.1.2)をまとめると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1.3}$$



ここで，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} \equiv \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6.1.4}$$

と定義すれば、式(6.1.3)は次のように書ける。 ここで、$\boldsymbol{M}$は質量マトリクス、$\boldsymbol{K}$は剛性マトリクスと呼ばれる。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.5}$$

式(6.1.5)の解を次のようにおくと，Ωが2自由度系の固有角振動数。

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{z}e^{i\Omega t}\right) \quad , \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{6.1.6}$$

つまり、

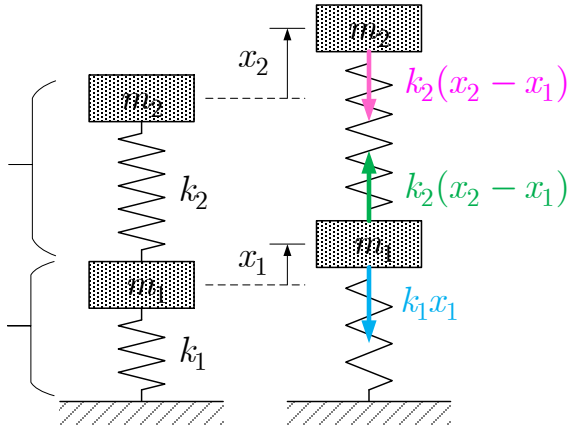
$$x_1 = \mathrm{Re}\left(pe^{i\omega t}\right) \quad , \quad x_2 = \mathrm{Re}\left(qe^{i\omega t}\right) \tag{6.1.6}'$$

2自由度バネ・マス系の自由振動

★固有値問題を解く

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.5}$$

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{z}e^{i\Omega t}\right) \quad , \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{6.1.6}$$



式(6.1.6)を(6.1.5)に代入すると

$$-\Omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = -(\Omega^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.7}$$

つまり、

$$\begin{bmatrix} m_1\Omega^2 - k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & m_2\Omega^2 - k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1.8}$$

ここで、系1と系2の固有角振動数をそれぞれω_1、ω_2 とする。

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \ , \ \omega_2 \equiv \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{6.1.9}$$

そして、 系1の質量や固有角振動数で以下のように無次元量μ、κ、ν、αを定義する。

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1} \ , \ \kappa \equiv \frac{k_2}{k_1} \ , \ \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \ , \ \alpha \equiv \frac{\Omega}{\omega_1} \tag{6.1.10}$$

つまり、ここでは、**系1の物理量を使って他の物理量を無次元化する**ことにする。

このとき、式(6.1.8)は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - 1 - \mu\nu^2 & \mu\nu^2 \\ \nu^2 & \alpha^2 - \nu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1.11}$$

したがって、特性方程式は、

$$\alpha^4 - \left[1 + (1+\mu)\nu^2\right]\alpha^2 + \nu^2 = 0 \tag{6.1.12}$$

2自由度バネ・マス系の自由振動

★固有値問題を解く

$$\alpha^4 - \left[1 + (1+\mu)\nu^2\right]\alpha^2 + \nu^2 = 0 \tag{6.1.12}$$

これを解くと，

$$\gamma \equiv 1 + (1+\mu)\nu^2 = 1 + \kappa + \frac{\kappa}{\mu} \tag{6.1.13}$$

として，

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}}\ , \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} \tag{6.1.14}$$

そして，

$$\Omega_1 = \alpha_1\omega_1\ , \quad \Omega_2 = \alpha_2\omega_1 \tag{6.1.15}$$

★2つの固有振動数の特徴

系2のパラメータをどう調整しても（系1にどんなバネ・マス系を取り付けたとしても，必ず次式が成り立つ。

$$\begin{cases} \Omega_1 < \dfrac{\omega_1}{\sqrt{1+\mu}} & , \quad \omega_1 < \Omega_2 \\ \Omega_1 < \omega_2 & , \quad \omega_2 < \Omega_2 \end{cases} \tag{6.1.16}$$

つまり、低い方の固有角振動数 Ω_1 は必ずもとの固有角振動数 ω_1 よりも小さくなり、 系2の質量が大きくなるほど上限値は小さくなる。

また、取り付けたバネ・マス系の固有角振動数 ω_2 よりも小さくなる。

高い方の固有角振動数 Ω_2 は必ず もとの固有角振動数 ω_1 よりも大きくなり、かつ、 取り付けたバネ・マス系の固有角振動数 ω_2 よりも大きくなる。

2自由度バネ・マス系の自由振動

★固有値問題を解く

【例題6.1.1】質量が$3\mathrm{kg}$、固有振動数が$50\mathrm{Hz}$のバネ・マス系に，質量が$20\mathrm{g}$、固有振動数が$180\mathrm{Hz}$ のバネ・マス系を取り付けた．この2自由度系の固有振動数を求めなさい。

系1の物理量で無次元化すると，

$$\begin{cases} \mu \equiv \dfrac{m_2}{m_1}, \quad \kappa \equiv \dfrac{k_2}{k_1}, \quad \nu \equiv \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\dfrac{\kappa}{\mu}} \\ \alpha_1 \equiv \dfrac{\Omega_1}{\omega_1}, \quad \alpha_2 \equiv \dfrac{\Omega_2}{\omega_1} \end{cases} \tag{6.1.10}$$

$$\gamma \equiv 1 + (1+\mu)\nu^2 = 1 + \kappa + \frac{\kappa}{\mu} \tag{6.1.13}$$

として，

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} \tag{6.1.14}$$

【略解】

$$\mu = \frac{20\times10^{-3}}{3} \approx 0.006667 \quad , \quad \nu = \frac{180}{50} = 3.6 \tag{1}$$

よって、式$(6.1.13)$で定義されるγの値は、

$$\gamma = 1 + (1 + 0.006667)\times 3.6^2 \approx 14.0464 \tag{2}$$

無次元固有振動数は

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{14.0464 - \sqrt{14.0464^2 - 4\times 2.6^2}}{2}} \approx 0.99641 \tag{3}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{14.0464 + \sqrt{14.0464^2 - 4\times 2.6^2}}{2}} \approx 3.61297 \tag{4}$$

よって、1次および2次の固有振動数は

$$f_1 = 0.99641\times 50 \approx 49.82\,\mathrm{Hz} \tag{5}$$

$$f_2 = 3.61297\times 50 \approx 180.65\,\mathrm{Hz} \tag{6}$$

2自由度バネ・マス系の自由振動

★無次元化の方法を変えると・・・

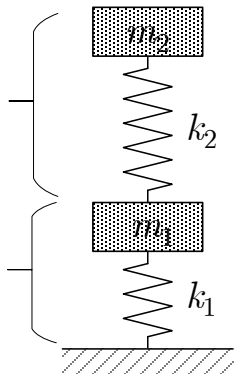
系2の物理量で無次元化すると、

$$\begin{cases} \tilde{\mu} \equiv \dfrac{m_1}{m_2}, \quad \tilde{\kappa} \equiv \dfrac{k_1}{k_2}, \quad \tilde{\nu} \equiv \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\dfrac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\mu}}} \\ \tilde{\alpha}_1 \equiv \dfrac{\Omega_1}{\omega_2}, \quad \tilde{\alpha}_2 \equiv \dfrac{\Omega_2}{\omega_2} \end{cases} \tag{6.1.17}$$

$$\tilde{\gamma} \equiv 1 + \tilde{\mu} + \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2 = 1 + \tilde{\mu} + \tilde{\kappa} \tag{6.1.18}$$

として、

$$\tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} - \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 4\tilde{\nu}^2}}{2\tilde{\mu}}}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 4\tilde{\nu}^2}}{2\tilde{\mu}}} \tag{6.1.19}$$



第1章のまとめ

- 2自由度系(多自由度系)の自由振動の運動方程式の固有値問題を解くことで、固有振動数を求めることができる。
- 2自由度系の固有振動数は2つある。
- 2自由度系の2つの固有振動数の一方は 系1、2の固有振動数よりも小さく、他方は大きい。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年5月19日(月)2限

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

第2章　固有振動モード

第2章の学修目標

★ 2自由度バネ・マス系の固有振動モードの導出法を説明できる。

★ 2自由度バネ・マス系の固有振動モードの特徴について説明できる。

★ 固有振動モードの物理的意味について説明できる。

2自由度バネ・マス系の固有振動モードベクトル

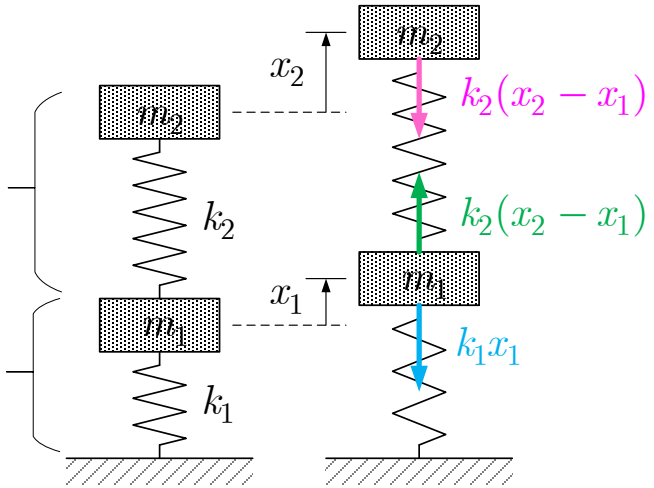
★固有値問題の固有ベクトルは？

第1章では、2自由度系の定常振動を

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{z}e^{i\Omega t}\right) \quad , \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{6.1.6}$$

とおいて、固有角振動数Ωを求めた。　そのときの解くべき式は次のようであった。

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - 1 - \mu\nu^2 & \mu\nu^2 \\ \nu^2 & \alpha^2 - \nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1.11}$$



つまり、ベクトル$\boldsymbol{z} = [p, q]^T$は、 この固有値問題の固有ベクトルであり，式(6.1.11)より、$\Omega = \Omega_1$および$\Omega = \Omega_2$に対応した固有ベクトル$\boldsymbol{z}_1$ および$\boldsymbol{z}_2$はそれぞれ次のように書ける。

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

あるいは、次のようにも書けるが、見た目の簡潔さから以下では式(6.2.1)を用いることとする。

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \mu\nu^2 \\ 1 + \mu\nu^2 - {\alpha_1}^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \mu\nu^2 \\ 1 + \mu\nu^2 - {\alpha_2}^2 \end{bmatrix} \tag{6.2.2}$$

このとき、定常振動の一般解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathrm{Re}\left(P_1\boldsymbol{z}_1 e^{i\Omega_1 t} + P_2\boldsymbol{z}_2 e^{i\Omega_2 t}\right) = \cdots \\ &= \boldsymbol{z}_1(B_1 \cos\Omega_1 t + C_1 \sin\Omega_1 t) \\ &\quad + \boldsymbol{z}_2\left(B_2 \cos\Omega_2 t + C_2 \sin\Omega_2 t\right) \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

2自由度バネ・マス系の固有振動モードベクトル

★固有値問題の固有ベクトルは？

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \mathrm{Re}\left(P_1 \boldsymbol{z}_1 e^{i\Omega_1 t} + P_2 \boldsymbol{z}_2 e^{i\Omega_2 t}\right) = \cdots \\ &= \boldsymbol{z}_1 (B_1 \cos \Omega_1 t + C_1 \sin \Omega_1 t) \\ &\quad + \boldsymbol{z}_2 \left(B_2 \cos \Omega_2 t + C_2 \sin \Omega_2 t\right) \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

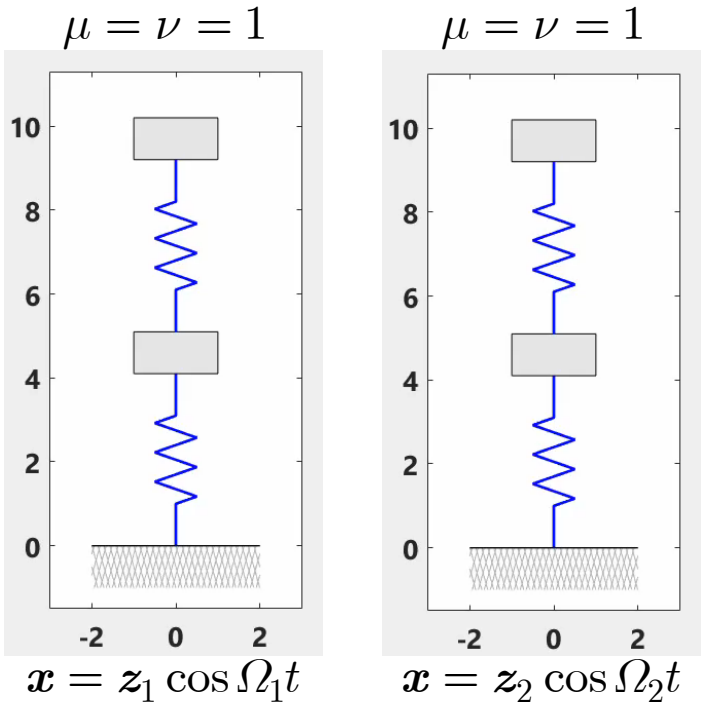
この式からわかる通り、z_1 は角振動数 Ω_1 での振動のパターンを、z_2 は角振動数 Ω_2 での振動のパターンを表している。実際、それぞれの振動の様子をみてみると・・・

z_1 は1次の固有振動モードベクトル、z_2 は2次の固有振動モードベクトルと呼ばれる。

1次モードでは質点1と2が同位相で振動し、2次モード2では逆位相で振動する。実際、

$${\alpha_1}^2 < \nu^2 \quad , \quad \nu^2 < {\alpha_2}^2 \tag{6.2.4}$$

であるので、1次モードは同位相、2次モードは逆位相であることがわかる。



元の形状に　固有振動モードベクトルを加えたときの図は固有振動モード形状とも呼ばれる。

2自由度バネ・マス系の固有振動モードベクトル

★固有値問題の固有ベクトルは？

※ $\alpha_1{}^2 < \nu^2$ 、$\nu^2 < \alpha_2{}^2$ となることの証明：

α_1 、α_2 は、

$$\gamma \equiv 1 + (1+\mu)\nu^2 = 1 + \mu\nu^2 + \nu^2 \tag{6.1.13}$$

として，

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}}\,, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} \tag{6.1.14}$$

であり、まず、

$$\begin{aligned} \gamma^2 - 4\nu^2 &> \left[1 + \mu\nu^2 + \nu^2\right]^2 - 4(1+\mu\nu^2)\nu^2 \\ &= \left[1 + \mu\nu^2 - \nu^2\right]^2 \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

であるので、α_1 については、

$$\begin{aligned} \alpha_1{}^2 &= \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2} \\ &< \frac{1 + (1+\mu)\nu^2 - (1 + \mu\nu^2 - \nu^2)}{2} = \nu^2 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

また、α_2 については、

$$\begin{aligned} \alpha_2{}^2 &= \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2} > \frac{\gamma + \gamma}{2} = \gamma \\ &= 1 + \mu\nu^2 + \nu^2 > \nu^2 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

2自由度バネ・マス系の固有振動モードベクトル

★固有値問題の固有ベクトルは？

【例題6.2.1】例題6.1.1において、固有振動モードベクトルを求めなさい。

【略解】　式(6.2.1)より、固有振動モードベクトルは

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0464^2 - 0.99641^2 \\ 0.99641^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0464^2 - 3.61297^2 \\ 0.99641^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \tag{2}$$

【例題6.2.2】例題6.1.1において、初期条件が

$$\begin{cases} x_1(0) = 0\,\mathrm{mm}\ ,\ x_2(0) = 10.0\,\mathrm{mm} \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0\,\mathrm{mm}\ /\ \mathrm{sec} \end{cases} \tag{6.2.8}$$

のとき、20秒後の変位を求めなさい。

【略解】　定常振動の一般解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = {} & \boldsymbol{z}_1(B_1 \cos \Omega_1 t + C_1 \sin \Omega_1 t) \\ & + \boldsymbol{z}_2 \left(B_2 \cos \Omega_2 t + C_2 \sin \Omega_2 t\right) \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

であったので、速度ベクトルは

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} = {} & \boldsymbol{z}_1 \Omega_1 (-B_1 \sin \Omega_1 t + C_1 \cos \Omega_1 t) \\ & + \boldsymbol{z}_2 \Omega_2 \left(-B_2 \sin \Omega_2 t + C_2 \cos \Omega_2 t\right) \end{aligned} \tag{1}$$

あとは、初期条件を用いて積分定数 B_1、B_2、C_1、C_2 を求めればよい。いま、式(6.2.3)より、

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = B_1 \boldsymbol{z}_1 + B_2 \boldsymbol{z}_2 \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \Omega_1 \boldsymbol{z}_1 + C_2 \Omega_2 \boldsymbol{z}_2 \tag{3}$$

ここで、例題6.1.1、6.2.1より、

$$\boldsymbol{z}_1 \approx \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 \approx \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2自由度バネ・マス系の固有振動モードベクトル

★固有値問題の固有ベクトルは？

$$\begin{cases} \Omega_1 = 2\pi f_1 \approx 2\pi \times 49.82048 \approx 313.0313 \\ \Omega_2 = 2\pi f_2 \approx 3\pi \times 180.6486 \approx 1135.049 \end{cases} \tag{5}$$

であるので、これらを式(2)、(3)に代入すると、

$$\begin{cases} 11.97 \times B_1 - 0.09357 \times B_2 = 0 \\ 12.96 \times B_1 + 12.96 \times B_2 = 10.0 \times 10^{-3} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 11.97 \times 313.0313 \times C_1 \\ \qquad - 0.09357 \times 1135.049 \times C_2 = 0 \\ 12.96 \times 313.0313 \times C_1 \\ \qquad + 12.96 \times 1135.049 \times C_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

よって、

$$B_1 \approx 5.986 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \quad , \quad B_2 \approx 0.7656 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \tag{8}$$

$$C_1 = C_2 = 0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{sec} \tag{9}$$

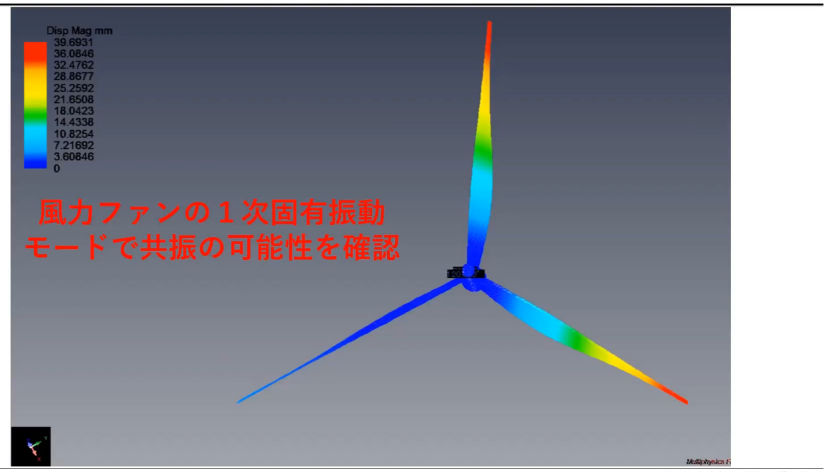
したがって、$t = 20\,\mathrm{sec}$のときの変位は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z}_1(B_1 \cos \Omega_1 t + C_1 \sin \Omega_1 t) \\ &\quad + \boldsymbol{z}_2 \left(B_2 \cos \Omega_2 t + C_2 \sin \Omega_2 t\right) \\ &= \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5986 \times 10^{-6} \times \cos(313.0313 \times 20) \\ +0 \times \sin(313.0313 \times 20) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7656 \times 10^{-3} \times \cos(313.0313 \times 20) \\ +0 \times \sin(313.0313 \times 20) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix} \times 1.678 \times 10^{-6} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \times (-7.627 \times 10^{-4}) \\ &= \begin{bmatrix} 9.145 \times 10^{-5} \\ -9.863 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \mathrm{m} = \begin{bmatrix} 0.09145 \\ 9.863 \end{bmatrix} \mathrm{mm} \end{aligned} \tag{10}$$

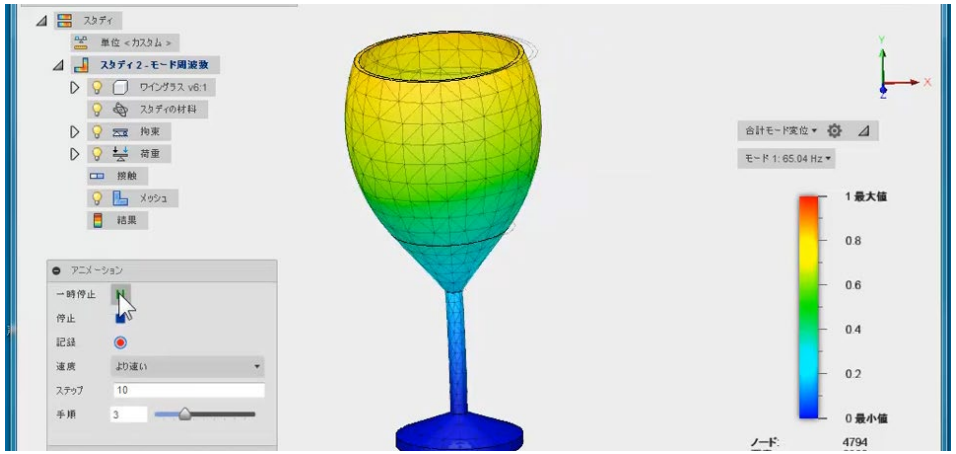
固有振動モードの例

★自由振動のパターンを表しているのが固有振動モード

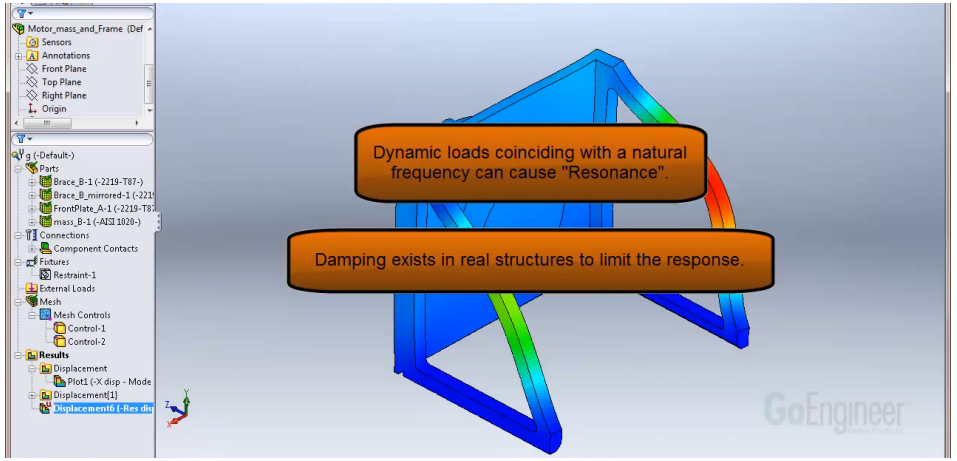
IRONCAD　風力発電ファン固有振動モード



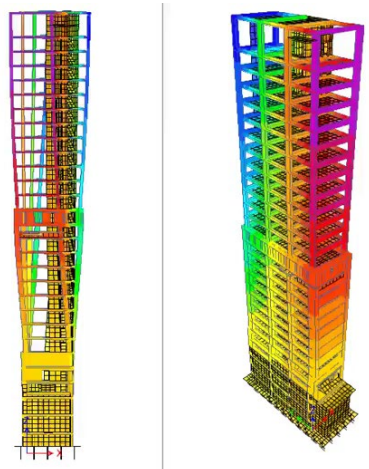
https://youtu.be/joxyCEMgNHE



https://youtu.be/aBU84NMDoqw



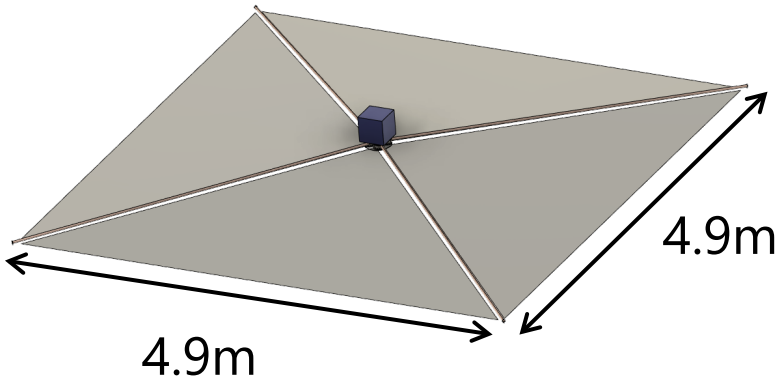
https://youtu.be/VIlBI6nrnRc

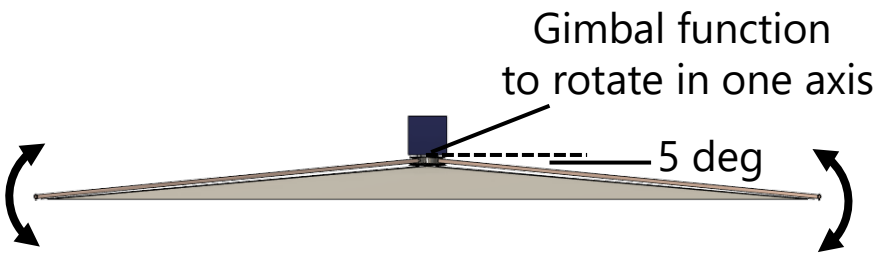


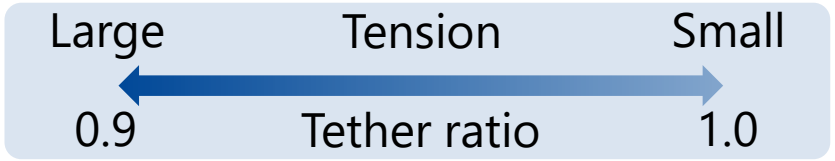
https://www.facebook.com/Mony.Structure/videos/995993557174131/

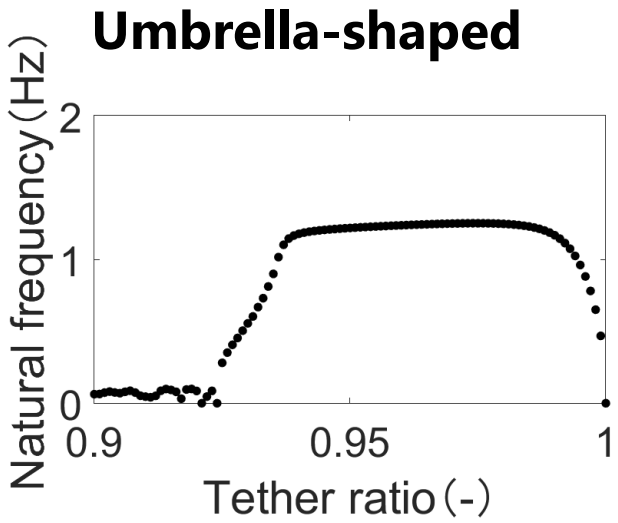
固有振動モードの例

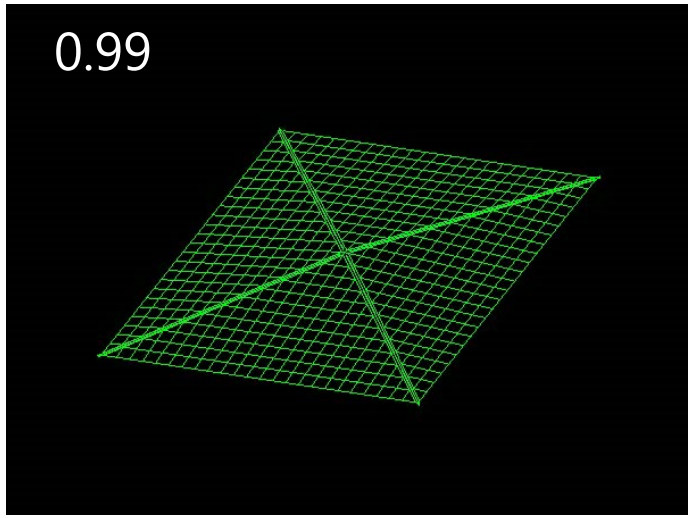
★自由振動のパターンを表しているのが固有振動モード

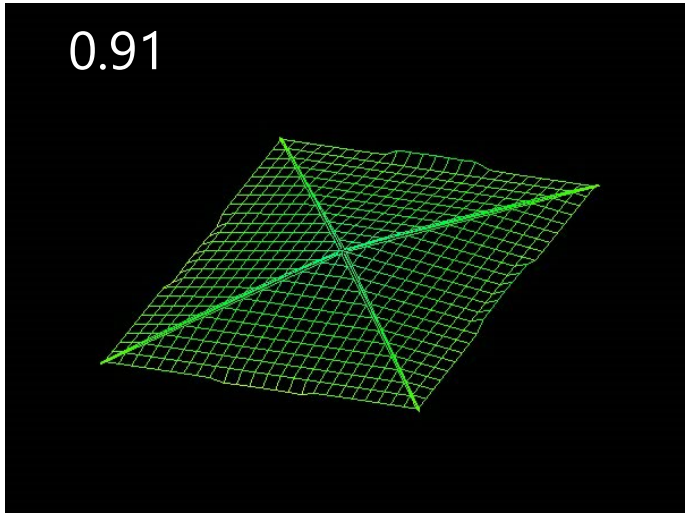






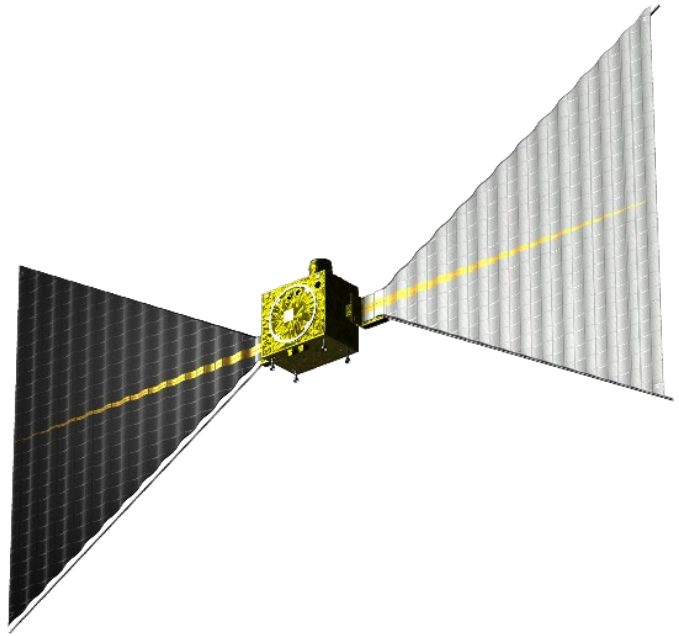


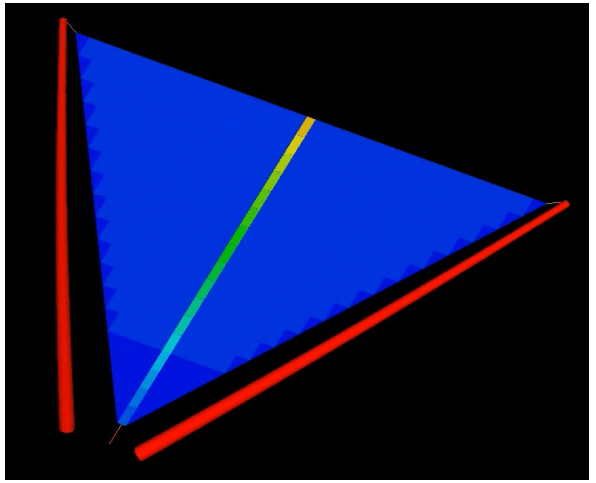




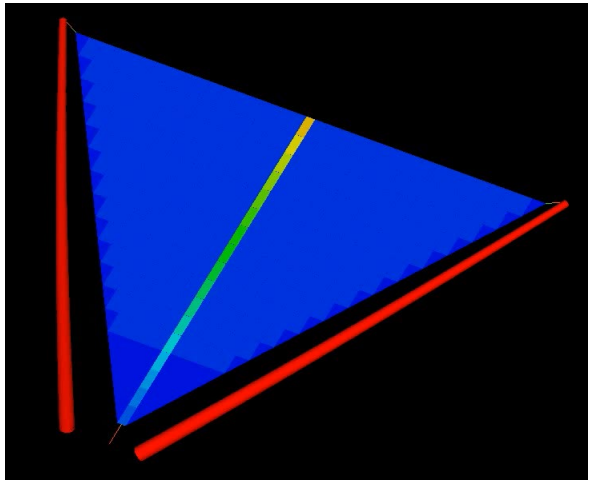
固有振動モードの例

★自由振動のパターンを表しているのが固有振動モード

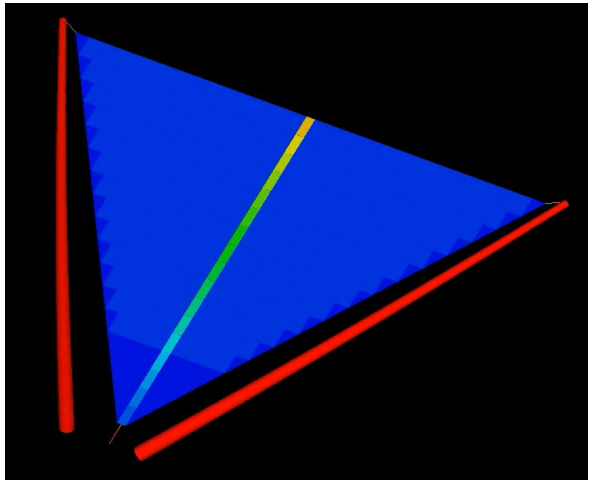




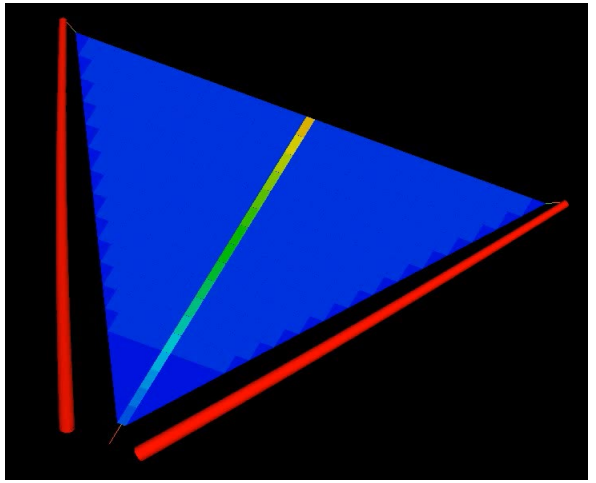
1次



3次



15次



26次

第2章のまとめ

- 自由振動の固有値問題の固有ベクトルは固有振動モードベクトル、あるいは固有振動モードと呼ばれる。
- 固有振動モードとは、変位の自由振動の“パターン”を表している。
- 任意の自由振動はこの“パターン”の線形和で表される。
- 固有振動モードを図にしたものは固有振動モード形状とも呼ばれる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年5月19日(月)2限

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

第3章　モードの直交性・完全性

第3章の学修目標

★ 固有振動モードの直交性について説明できる。

★ 固有振動モードの完全性について説明できる。

固有振動モードの直交性・完全性

★質量マトリクス・剛性マトリクスの特徴

一般に，減衰のない自由運動の運動方程式は

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.1}$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{K}$ は次の性質を持つ。

1) $\boldsymbol{M}$ は対称行列：

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M} \\ \forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{p} \end{cases} \tag{6.3.2}$$

2) $\boldsymbol{K}$ は対称行列：

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}^T = \boldsymbol{K} \\ \forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{p} \end{cases} \tag{6.3.3}$$

3) $\boldsymbol{M}$ は正定値行列： $\forall \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{p} > 0$ (6.3.4)

4) $\boldsymbol{K}$ は半正定値行列： $\forall \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{p} \geq 0$ (6.3.5)

★モードの直交性

いま、i 次の固有振動モードベクトルを $\boldsymbol{z}_i$ と書くと、$i \neq j$ のとき、次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{z}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_j = 0\,, \quad \boldsymbol{z}_i{}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_j = 0 \tag{6.3.6}$$

つまり、任意の異なる固有振動モードベクトル$\boldsymbol{z}_i$ と$\boldsymbol{z}_j$とは$\boldsymbol{M}$を介して「直交」している。また、$\boldsymbol{K}$を介して「直交」している。

★モードの完全性

一般に、$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ であれば、固有振動モードベクトル $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^N$は$N$個存在する。ここで、$\boldsymbol{z}_1$～$\boldsymbol{z}_N$は互いに線形独立である。

もともと，$\mathbb{R}^N$ の基底ベクトルはN個しか存在し得ないので、$\boldsymbol{z}_1$～$\boldsymbol{z}_N$ は $\mathbb{R}^N$の基底ベクトルを成すことができる（$\mathbb{R}^N$を完全に張る）ことがわかる。つまり、$\boldsymbol{z}_1$～$\boldsymbol{z}_N$のセットは完全性を有する。

固有振動モードの直交性の証明

★質量マトリクスと剛性マトリクスが有している特徴が“鍵”

第1章で学んだ通り、次式が成り立つ。

$$-\Omega^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = -(\Omega^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.7}$$

2自由度以上の系の場合、これを満たすΩやzは複数あるので、そのうちの任意の2つに着目すると、

$$\Omega_i{}^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{0} \tag{6.3.7}$$

$$\Omega_j{}^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0} \tag{6.3.8}$$

いま、式(6.3.7)に左から$\boldsymbol{z}_j{}^T$をかけると、

$$\Omega_1{}^2 \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.9}$$

同様に、式(6.3.8)に左から$\boldsymbol{z}_i{}^T$をかけると、

$$\Omega_j{}^2 \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_j = 0 \tag{6.3.10}$$

ここで,$\boldsymbol{K}$は対称行列であるので、

$$\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_j \tag{6.3.11}$$

よって、式(6.3.9),(6.3.10)より、

$$\Omega_i{}^2 \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i = \Omega_j{}^2 \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_j \tag{6.3.12}$$

ここで、Mは対称行列であるので、

$$\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i \tag{6.3.13}$$

よって、

$$\Omega_i{}^2 \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i = \Omega_j{}^2 \boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i \tag{6.3.14}$$

つまり、

$$(\Omega_i{}^2 - \Omega_j{}^2)\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.15}$$

ここで、通常、$\Omega_i \neq \Omega_j$であるので、

$$\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.16}$$

つまり、固有振動モードベクトルz_iとz_jとはMを介して「直交」している。

式(6.3.9)と(6.3.16)より、

$$\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.17}$$

したがって、固有振動モードベクトルz_iとz_jとはKを介しても「直交」している。

固有振動モードの完全性の証明

★質量マトリクスと剛性マトリクスが有している特徴が“鍵”

固有ベクトルz_1～z_Nのセットが完全性を有することを証明するには、 これらが互いに線形独立であることを証明すればよい。その証明は以下の通り。

実際、もし、線形従属だったとすると

$$z_p = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_{p-1} z_{p-1} + \alpha_{p+1} z_{p+1} + \cdots + \alpha_N z_N \quad (6.3.18)$$

と書けて、両辺に左から${z_p}^T M$を掛けると、

$${z_p}^T M z_p = \alpha_1 {z_p}^T M z_1 + \cdots + \alpha_{p-1} {z_p}^T M z_{p-1} + \alpha_{p+1} {z_p}^T M z_1 + \cdots + \alpha_N {z_p}^T M z_N \quad (6.3.19)$$

となるが、z_pとz_iはMを介して直交するので、

$${z_p}^T M z_i = 0 \quad \text{（ただし, } p \neq i\text{）} \quad (6.3.20)$$

したがって、式(6.3.19)より、

$${z_p}^T M z_p = 0 \quad (6.3.21)$$

となって、Mが正定値であることに反してしまう。よって、z_1～z_Nは互いに線形独立である。

第3章のまとめ

- 固有振動モードは質量マトリクスを介して直交する。

$$\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.16}$$

- 固有振動モードは剛性マトリクスを介して直交する。

$$\boldsymbol{z}_j{}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{z}_i = 0 \tag{6.3.17}$$

- 固有振動モードベクトルは自由度空間全体を張る基底ベクトルとなる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年5月19日(月)2限

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

第4章　モードの正規化

第4章の学修目標

★ 固有振動モードの正規化の方法について説明できる。

固有振動モードの正規化

★直交性と同様、“質量マトリクスを介して”正規化

固有振動モード z_i が

$$\Omega_i{}^2 \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{K} \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{0} \tag{6.4.1}$$

を満たすとしたら、その任意のスカラー倍 αz_i もこの式を満たす. したがって、 このままでは固有振動モードに任意性が残ってしまう（1つには定まらない）。

そこで、z_iを1つ求めたら、

$$\boldsymbol{\phi}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i}} \boldsymbol{z}_i \tag{6.4.2}$$

とした ϕ_i だけを固有振動モードと呼ぶことにする。 この方法であれば、最初に求めた z_i がどんなものであっても、ϕ_i は符合を除き,1つに定まる。

実際、式(6.4.2)の z_i を αz_i に置き換えたとしても、

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \alpha \boldsymbol{z}_i}} \alpha \boldsymbol{z}_i = \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i}} \boldsymbol{z}_i = \pm \boldsymbol{\phi}_i \tag{6.4.3}$$

となって、符合以外は ϕ_i と一致する。

このとき、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i}} \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i}} \boldsymbol{z}_i \\ &= \frac{1}{\boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i} \boldsymbol{z}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_i = 1 \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

であり、したがって, 式(6.4.1)の z_i に ϕ_i を代入し、式(6.4.4)を用いると、

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \Omega_i{}^2 \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i = \Omega_i{}^2 \tag{6.4.5}$$

一般にベクトル a の長さは $\sqrt{a^T a}$ であるが, 式(6.4.4)、(6.4.5)より, M を介した ϕ_i の長さは1 、K を介した長さは Ω_i である。

$$\sqrt{\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i} = 1 \quad , \quad \sqrt{\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_i} = \Omega_i \tag{6.4.6}$$

【例題6.4.1】例題6. 1. 1、例題6.2.1において、正規化された固有振動モードベクトルを求めなさい。

固有振動モードの正規化

★直交性と同様、“質量マトリクスを介して”正規化

【例題6.4.1】例題6.1.1において、正規化された固有振動モードベクトルを求めなさい。

【略解】　例題(6.2.1)より、 正規化されていない固有振動モードベクトルは、

$$z_1 \approx \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix}, \quad z_2 \approx \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \tag{1}$$

質量マトリクスMは、

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \tag{2}$$

したがって、

$$z_1{}^T M z_1 = \begin{bmatrix} 11.97 & 12.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix} = 432.998562 \tag{3}$$

$$z_2{}^T M z_2 = \begin{bmatrix} -0.09357 & 12.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} = 3.385496913 \tag{4}$$

よって、正規化された固有振動モードベクトルは

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{z_1{}^T M z_1}} z_1 = \frac{1}{\sqrt{432.998562}} \begin{bmatrix} 11.97 \\ 12.96 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.575106 \\ 0.622819 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{z_2{}^T M z_2}} z_1 = \frac{1}{\sqrt{3.385496913}} \begin{bmatrix} -0.09357 \\ 12.96 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.050853 \\ 7.043586 \end{bmatrix} \tag{6}$$

第4章のまとめ

- 固有振動モードベクトルを、質量マトリクスを介して正規化すると、 剛性マトリクスを介した「長さ」は固有角振動数の値と一致する。

$$\sqrt{\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i} = 1 \quad , \quad \sqrt{\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_i} = \Omega_i \tag{6.4.6}$$

※ 正規化については, 第10回「刺激係数と有効質量」で使うので, おさえておいてください.

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年5月19日(月)2限

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

第5章　剛体モード

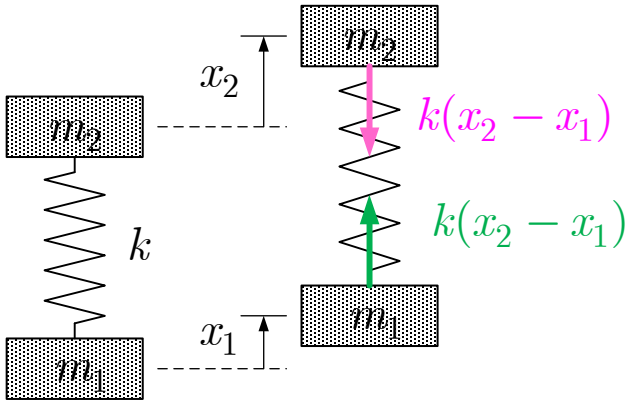
第5章の学修目標

★ 剛体モードについて説明できる。

★ 剛体モードと固有振動数との関係について説明できる。

剛体モードとは？

★宙に浮いているバネ・マス系の振動はどうなるか？



上図のように、質点１が土台に連結されていない場合について考えてみると、外力が作用しない場合の質点1の運動方程式は、

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \tag{6.5.1}$$

質点2の運動方程式は、

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \tag{6.5.2}$$

式(6.5.1)、(6.5.2)をまとめると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.5.3}$$

つまり、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{6.5.4}$$

とおけば、

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{6.5.5}$$

式(6.5.5)の解は

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{z}e^{i\Omega t}\right) \quad , \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{6.5.6}$$

とおけて、式(6.5.5)より、

$$-\Omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = -(\Omega^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{6.5.7}$$

つまり、特性方程式は

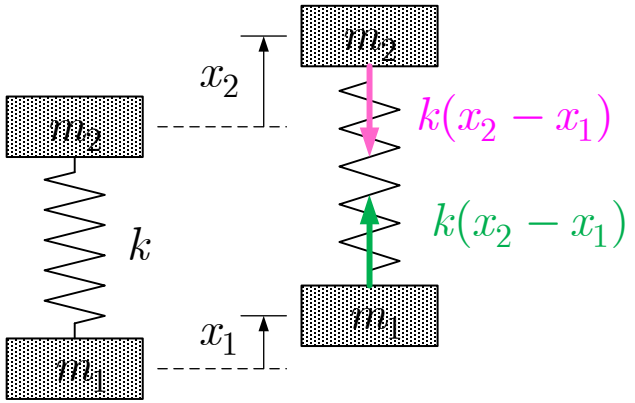
$$\det(\Omega^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{K}) = 0 \tag{6.5.8}$$

ここで、

$$\Omega^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} m_1\Omega^2 - k & k \\ k & m_2\Omega^2 - k \end{bmatrix} \tag{6.5.9}$$

剛体モードとは？

★宙に浮いているバネ・マス系の振動はどうなるか？



$$-\Omega^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} = -(\Omega^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{6.5.7}$$

$$\Omega^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} m_1\Omega^2 - k & k \\ k & m_2\Omega^2 - k \end{bmatrix} \tag{6.5.9}$$

したがって、

$$\begin{aligned}&(m_1\Omega^2 - k)(m_2\Omega^2 - k) - k^2 \\ &\quad = m_1 m_2 \Omega^4 - (m_1 + m_2)k\Omega^2 = 0\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

つまり、固有角振動数は

$$\Omega = 0\ ,\ \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}k} \tag{6.5.11}$$

となって、固有振動数が0のモードがある！

$\Omega = 0$のとき、式(6.5.7)は

$$\begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.5.12}$$

となって、

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.5.13}$$

とすればよいことがわかる。このモードは、全体が上方向に平行移動する（剛体移動する）モード。

一般に、系が宙に浮いているとき、剛性マトリクス$\boldsymbol{K}$は逆行列を持たず、固有値が 0 となる固有ベクトルを持つ。そして、その固有ベクトルは、系を剛体変位させるベクトル。なぜならば、$\boldsymbol{K}x$は系の 内部に作用する弾性力ベクトルであり、剛体変位をしても弾性力は生じない（伸び縮みしない限り、弾性力は生じないから）。ちなみに、剛体運動とは、並進運動と回転運動のこと。

剛体モードとは？

★整理すると

次式を満たす0でないrが存在する場合、rは剛体モードベクトルと呼ばれる。 例えば、 系が宙に浮いていて，どこにも固定されていない場合などは、このようなrがが存在する。

$$\boldsymbol{Kr} = \boldsymbol{0} \tag{6.5.14}$$

このとき、

$$(0 \times \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{6.5.15}$$

となるので、 このような系（剛体モードが存在する系）には、固有振動数が0 で固有振動モードがrとなるモードが存在する。

剛体モードとは、具体的には、系全体の並進運動、 および、回転運動を指す。

ちなみに、剛体モード以外の固有振動モードは「弾性モード」とも呼ばれる。

※「剛体モード」については 第10回「刺激係数と有効質量」でも言及することになるので、ここで理解しておいてください。

第5章のまとめ

- 宙に浮いている系など、剛体運動が可能な系には固有振動数が0である固有振動モードが存在する。
- そのモードは一般に「剛体モード」と呼ばれる。
- 剛体モードの運動は、剛体運動そのものであり、いわゆる振動ではない。
- 具体的には、剛体モードとは、系全体の並進運動、または，回転運動（および，それらの組み合わせ）である。
- 剛体モード以外の固有振動モードは、剛体モードと区別するために、弾性モードとも呼ばれる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年5月19日(月)2限

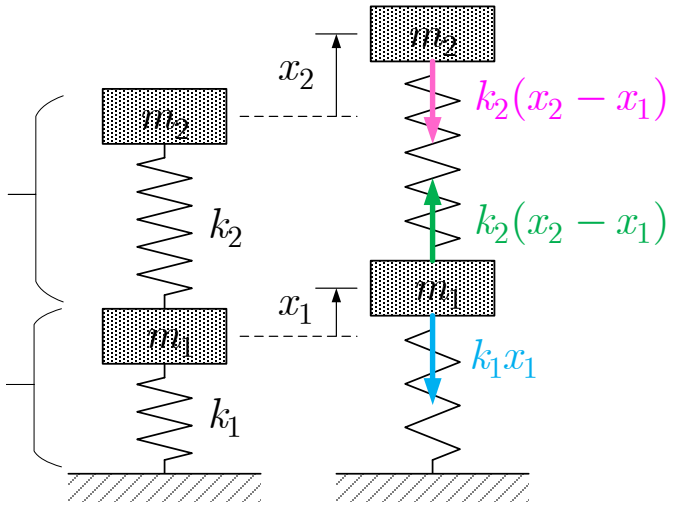
第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

課題

2025年5月25日(日)18時00分締切

[1] 下図のような2自由度バネ・マス系がある。系1の質点の質量は80kg、固有振動数は50Hzであり、 系２の質点の質量は5kg、固有振動数は160Hzである。この2自由度系の固有振動数および正規化された固有振動モードベクトルを求めなさい（2点）。

[2] 一端が固定された、質量が50kg、固有振動数が60Hzのバネ・マス系1の質点に、 別のバネ・マス系2を直列に取り付けたところ、この２自由度系の１次の固有振動数は45Hz、2次の固有振動数は90Hzとなった。 系2の質量およびバネ定数を推定しなさい（3点）。



振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動

おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

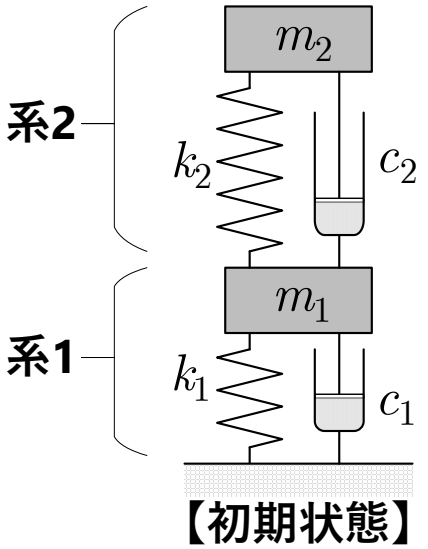
第7回の学修目標

★ 複素剛性および構造減衰係数について説明できる。

★ 複素剛性を用いて、 土台の強制加振を受ける1自由度系の応答倍率を求めることができる。

★ 複素剛性を用いて、土台の強制加振を受ける2自由度系の応答倍率を求めることができる。

★ 土台の強制加振を受ける2自由度系の加振振動数と応答倍率との関係をについて説明できる。



【初期状態】

第7回の全体構成

第1章　複素剛性と構造減衰係数

第2章　複素剛性を用いた1自由度系の強制振動解の導出

第3章　複素剛性を用いた2自由度系の強制振動解の導出

第4章　2自由度強制振動系の共振

第5章　加振振動数と応答倍率との関係

付録　人工衛星の振動に関するトピックス

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月26日(月)2限

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

第1章　複素剛性と構造減衰係数

第1章の学修目標

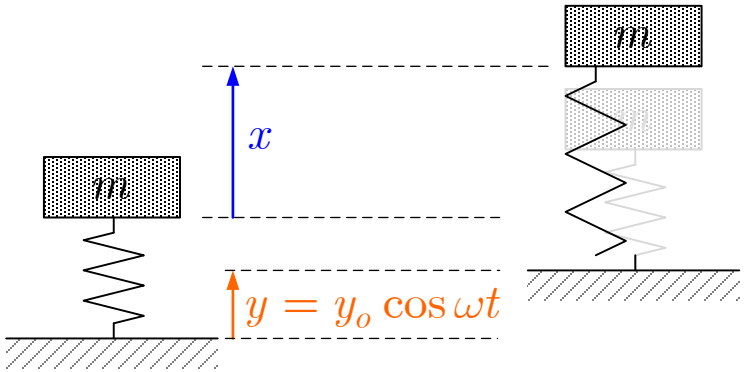
★ 剛性を複素数で表すことで減衰を考慮できることを 説明できる。

★ 構造減衰係数について説明できる。

★ 構造減衰係数と減衰比との関係について説明できる。

複素数を用いた強制振動の解法

★土台の強制変位と解を複素数で表す



バネ・マス系の土台の強制振動の運動方程式は

$$m\ddot{x} + k(x - y) = 0 \ , \quad y = y_o \cos \omega t \tag{7.1.1}$$

つまり、

$$m\ddot{x} + kx = ky_o \cos \omega t \tag{7.1.2}$$

ここで、x を

$$z = x + iw \tag{7.1.3}$$

に置き換え、右辺の $y_o \cos \omega t$ を $y_o e^{i\omega t}$ に置き換えると、

$$m\ddot{z} + kz = ky_o e^{i\omega t} \tag{7.1.4}$$

となるが、この式は

$$m\ddot{x} + kx = ky_o \cos \omega t \ , \quad m\ddot{w} + kw = ky_o \sin \omega t \tag{7.1.5}$$

となって、実部の式は式(7.1.2)と一致する。 つまり、式(7.1.4)を解いて z を求めて、

$$x = \mathrm{Re}(z) \tag{7.1.6}$$

とすれば、それが式(7.1.2)の解になっているのである。

そこで、

$$z = Ce^{i\omega t} \tag{7.1.7}$$

とおいて、式(7.1.4)に代入すると、

$$-m\omega^2 Ce^{i\omega t} + kCe^{i\omega t} = ky_o e^{i\omega t} \tag{7.1.8}$$

より、C が次のように求まる。

$$C = \frac{k}{-m\omega^2 + k} y_o \tag{7.1.9}$$

複素剛性とは

★バネ剛性を複素数で表す！

$$C = \frac{k}{-m\omega^2 + k} y_o \tag{7.1.9}$$

ここで、kを複素剛性$\tilde{k}$

$$\tilde{k} \equiv k(1 + i\varepsilon) = k + i\varepsilon k \tag{7.1.10}$$

に置き換えると、

$$\begin{aligned} C &= \frac{k(1+i\varepsilon)}{-m\omega^2 + k(1+i\varepsilon)} = \frac{\frac{k}{m}(1+i\varepsilon)}{-\omega^2 + \frac{k}{m}(1+i\varepsilon)} \\ &= \frac{{\omega_o}^2(1+i\varepsilon)}{-\omega^2 + {\omega_o}^2(1+i\varepsilon)} y_o = \frac{1+i\varepsilon}{-\frac{\omega^2}{{\omega_o}^2} + 1 + i\varepsilon} y_o \\ &= \frac{1+i\varepsilon}{1-\eta^2+i\varepsilon} y_o = \frac{(1+i\varepsilon)(1-\eta^2-i\varepsilon)}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o \\ &= \frac{1-\eta^2+\varepsilon^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o - i\frac{\varepsilon\eta^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

よって、

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(Ce^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1-\eta^2+\varepsilon^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o - i\frac{\varepsilon\eta^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o\right) \right. \\ &\qquad \left. \times\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]\right\} \\ &= \frac{1-\eta^2+\varepsilon^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon\eta^2}{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2} y_o \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

一方，バネ・マス・ダンパー系の定常振動解は、第5回1章より、

$$\begin{aligned} x = &\frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \cos(\omega t) \\ &+ \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

複素剛性とは

★バネ剛性を複素数で表す！

したがって、

$$\varepsilon = 2\zeta\eta = \frac{2\zeta}{\omega_o}\omega = \frac{2\left(c\,/\,2\sqrt{mk}\right)}{\sqrt{k\,/\,m}}\omega = \frac{c}{k}\omega \qquad (7.1.13)$$

であれば，　式$(7.1.12)$と$(5.1.7)$は完全に一致する。つまり、バネ剛性を複素数とすることで減衰を考慮することができる！

なお、εは無次元量であり、構造減衰係数と呼ばれる。

第1章のまとめ

- 剛性を複素数で表した場合、虚数項と実数項との比は構造減衰係数と呼ばれる。

$$\tilde{k} \equiv k(1 + i\varepsilon) = k + i\varepsilon k \tag{7.1.8}$$

- 減衰のない系において、剛性を複素数で表すことで、 減衰のある系と同一の解を得ることができる。
- 実際, 構造減衰係数を式$(7.1.11)$のようにおくと、両者の解は一致する。

$$\varepsilon = 2\zeta\eta = \frac{2\zeta}{\omega_o}\omega = \frac{c}{k}\omega \tag{7.1.11}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

第2章　複素剛性を用いた1自由度系の強制振動解の導出

第2章の学修目標

★ 複素剛性を用いて、 土台の強制加振を受ける1自由度系の応答倍率を求めることができる。

★ 構造減衰係数が加振振動数に依らない場合について、応答倍率の特徴を説明できる。

複素剛性を用いた応答倍率の表現

★振幅は複素数解の絶対値に等しい

複素数を用いて解を求める場合、複素数解 z の実数部が求めたい解 x であった。

$$z = Ce^{i\omega t} \quad , \quad x = \mathrm{Re}(z) \tag{7.2.1}$$

いま、

$$C = C_R + iC_I \tag{7.2.2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} z &= (C_R + iC_I)\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right] \\ &= C_R\cos(\omega t) - C_I\sin(\omega t) \\ &\quad + i\left[C_R\sin(\omega t) + C_I\cos(\omega t)\right] \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

であるので、

$$x = C_R\cos(\omega t) - C_I\sin(\omega t) \tag{7.2.4}$$

であり、振幅 a_o は

$$a_o = \sqrt{{C_R}^2 + {C_I}^2} = |C| \tag{7.2.5}$$

★応答倍率

よって，応答倍率は

$$\tilde{\xi} = \frac{|C|}{y_o} \tag{7.2.6}$$

構造減衰係数 ε を用いると、

$$C = \frac{1+i\varepsilon}{1-\eta^2+i\varepsilon}y_o \tag{7.1.9}$$

であったので、

$$|C| = \frac{|1+i\varepsilon|}{|1-\eta^2+i\varepsilon|}y_o = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2}}y_o \tag{7.2.7}$$

したがって、応答倍率は

$$\tilde{\xi} = \frac{|C|}{y_o} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2}} \tag{7.2.8}$$

減衰比が一定か？　構造減衰係数が一定か？

★何を一定と考えるかで解は異なる

$$\tilde{\xi} = \frac{|C|}{y_o} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2}} \tag{7.2.8}$$

そして，

$$\varepsilon = 2\zeta\eta = \frac{2\zeta}{\omega_o}\omega \tag{7.1.11}$$

であれば，応答倍率は減衰比ζ を用いて次のように書けた．

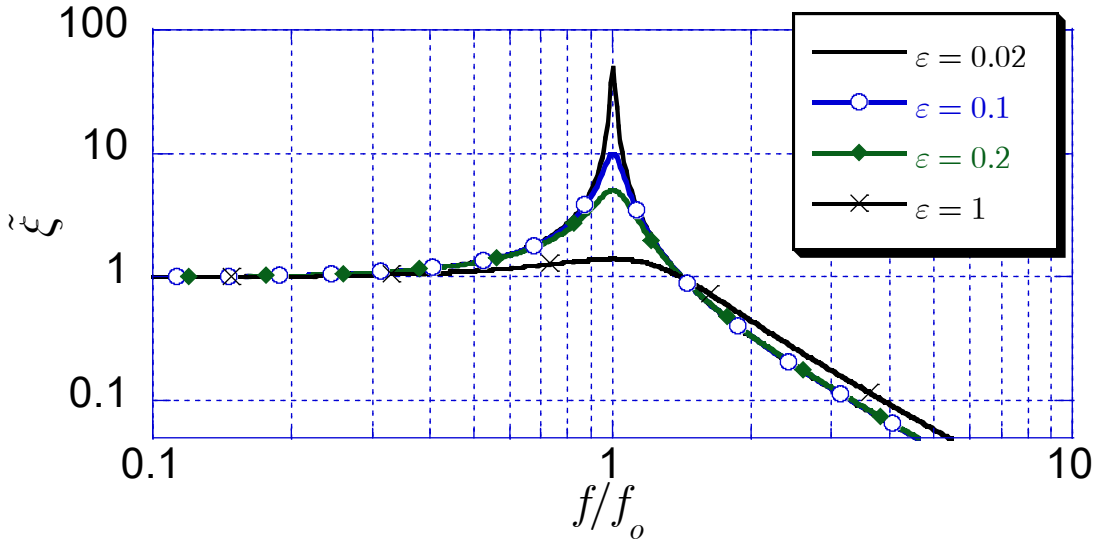
$$\xi = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.2}$$

これまでは，粘性減衰比ζは加振角振動数ωに依らず一定であるとしてきた．　もし，εがωに依らず一定であるとしたら，ζは一定ではないことになる．

ζとεのどちがら一定なのか，あるいは，　両方とも一定ではないのかは，対象としている構造，あるいは，　材料に依存する．

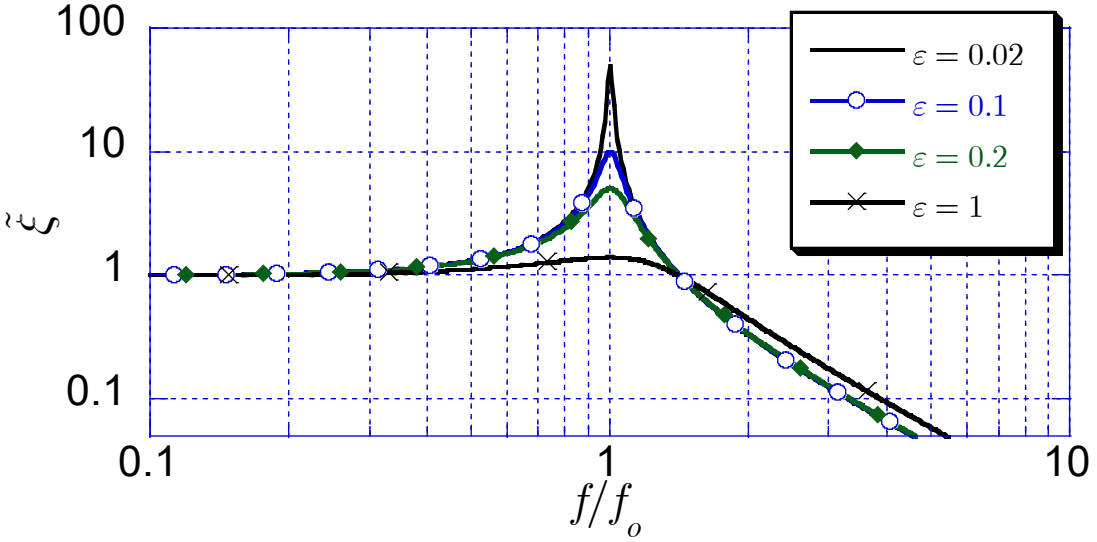
構造減衰係数が加振振動数に依存しない場合には、式(7.2.8)からわかる通り、共振は $\eta = 1$　のときに起こる。つまり、共振振動数は固有振動数と一致する。

εが一定の場合（ωに依存しない場合）、 ωと応答倍率ξとの関係は下図のようになる。



減衰比が一定か？　構造減衰係数が一定か？

★何を一定と考えるかで解は異なる



εが一定の場合とζが一定の場合とでは、高周波領域での応答倍率の振る舞いが少し違う。実際、前者の場合、

$$\tilde{\xi} = \frac{|C|}{y_o} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2}} \tag{7.2.8}$$

であったので、$\eta \to \infty$のとき

$$\tilde{\xi} \approx \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\eta^2} \tag{7.2.9}$$

となる。つまり、

$$\log\tilde{\xi} \approx -2\log\eta + \log\sqrt{1+\varepsilon^2} \tag{7.2.10}$$

となり、ηと$\tilde{\xi}$の両対数グラフは傾きが-2の直線に漸近する。

減衰比が一定か？　構造減衰係数が一定か？

★何を一定と考えるかで解は異なる

【例題7.1.1】 質量が$6\mathrm{kg}$、，バネ定数が$18000\mathrm{N}/\mathrm{m}$のバネを有し、構造減衰係数が一定の1自由度系がある。この系の土台を$10\mathrm{Hz}$ 、振幅$1\mathrm{mm}$で加振したところ、質点の振幅は$3\mathrm{mm}$であった。 構造減衰係数の値を求めなさい。

【略解】　構造減衰が一定の場合、 1自由度系の応答倍率を$\tilde{\xi}$とすれば、式$(7.2.8)$より，

$$\tilde{\xi} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+\varepsilon^2}} \tag{7.2.8}$$

ただし、εは構造減衰係数であり、ηは加振振動数（fとするを系の固有振動数（f_oとする）で割った値である。

$$\eta = \frac{f}{f_o} \tag{1}$$

式$(7.2.8)$より、

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1-\tilde{\xi}^2(1-\eta^2)^2}{\tilde{\xi}^2-1}} \tag{2}$$

よって、ηと$\tilde{\xi}$が与えられれば、εが求まる。 いま、問題文より、この系の質量mとバネ定数kは

$$m = 6\,\mathrm{kg} \quad , \quad k = 18000\,\mathrm{N}/\mathrm{m} \tag{3}$$

であるので、

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{18000}{6}} \approx 8.717275\,\mathrm{Hz} \tag{4}$$

であり、

$$f = 10\,\mathrm{Hz} \tag{5}$$

であるので、

$$\eta = \frac{10}{8.717275} \approx 1.147147 \tag{6}$$

また、応答倍率は

$$\tilde{\xi} = \frac{3\mathrm{mm}}{1\mathrm{mm}} = 3 \tag{7}$$

であるので、式(5)と(6)を(2)に代入すると、

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1-3^2(1-1.147147^2)^2}{3^2-1}} \approx 0.112692 \tag{8}$$

第2章のまとめ

- 角振動数ωで強制加振される一自由度系の振動は、 解を$z = Ce^{i\omega t}$とおくことで求めることができ、土台の振幅を y_o とすれば、応答倍率は次式で与えられる。

$$\tilde{\xi} = \frac{|C|}{y_o} \tag{7.2.6}$$

- 構造減衰係数εが加振振動数に依らず一定の場合と、粘性減衰比ζが一定の場合とでは、加振振動数と応答倍率との関係は異なる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

第3章　複素剛性を用いた2自由度系の強制振動解の導出

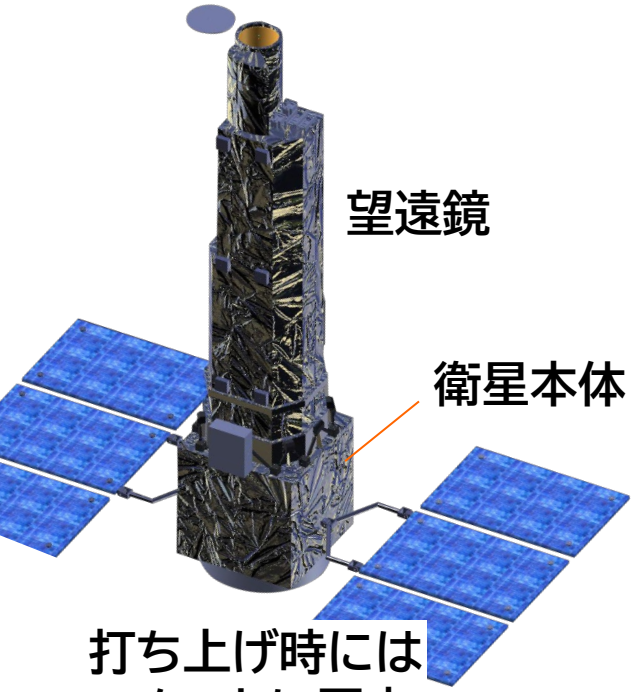
第3章の学修目標

★ 2自由度系の強制振動の応用例を語ることができる。

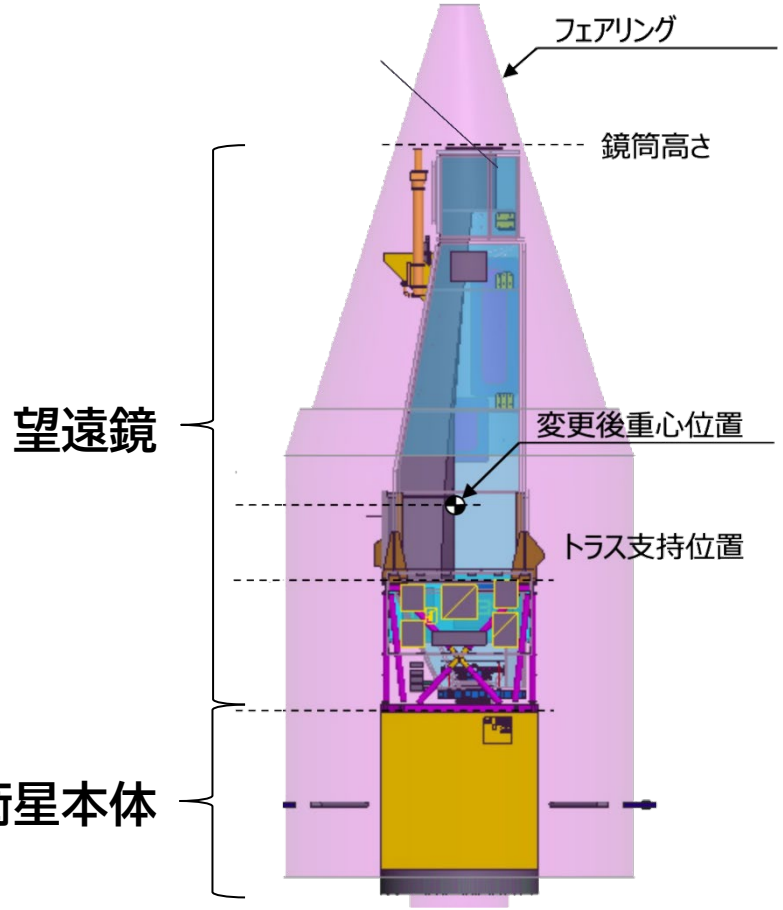
★ 複素剛性を用いて２自由度系の強制振動の解を導出する法について説明できる。

2自由度系の強制振動の例

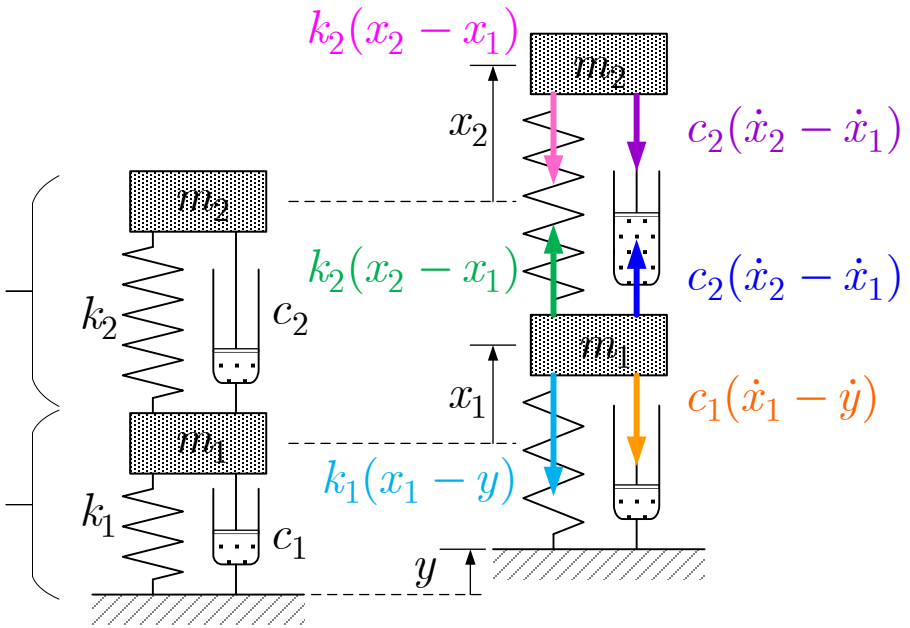
★ロケットー衛星本体ーミッション機器



打ち上げ時には
ロケットに固定



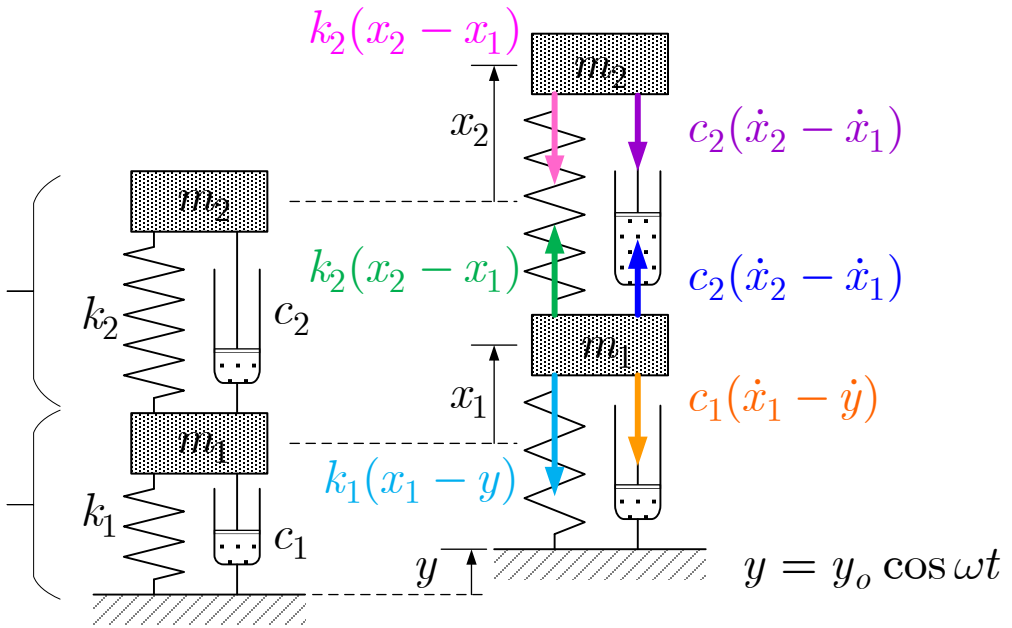
ロケットが振動



浦口, 他, 「Solar-C(EUVST):EUVST望遠鏡構造設計の進捗報告」, 第22回宇宙科学シンポジウム, 2022年1月.

2自由度系における土台の強制振動問題

★ベクトルとマトリクスを用いて整理できる



土台の変位をyとすると、運動方程式は、

$$m_1\ddot{x}_1 = c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-c_1(\dot{x}_1-\dot{y}) + k_2(x_2-x_1)-k_1(x_1-y) \tag{7.3.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_2(x_2-x_1) \tag{7.3.2}$$

つまり、

ここで、

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C} \equiv \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} \equiv \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7.3.3}$$

と定義すると、運動方程式は

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\dot{y} + \boldsymbol{K}y)\boldsymbol{e} \tag{7.3.4}$$

いま、土台が次のように振動するとする。

$$y = y_o\cos\omega t \tag{7.3.5}$$

これを、複素数を用いて

$$\tilde{y} = y_o e^{i\omega t} \tag{7.3.6}$$

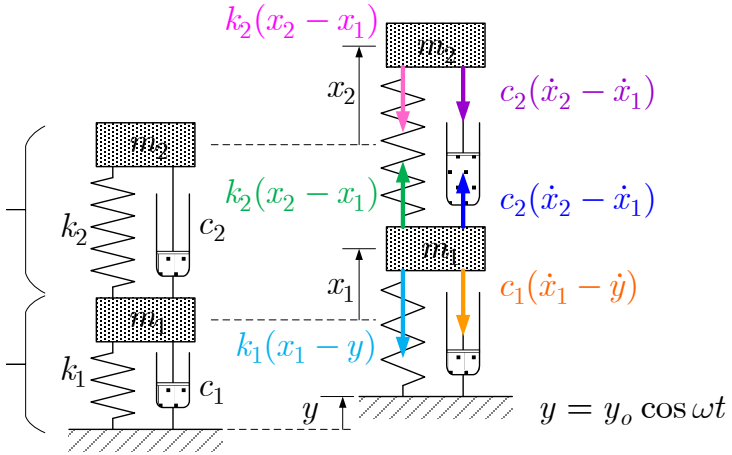
と表し、それに伴って、$\boldsymbol{x}$を

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = y_o\boldsymbol{w}e^{i\omega t}, \quad \boldsymbol{x} = \mathrm{Re}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = y_o\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{w}e^{i\omega t}) \tag{7.3.7}$$

と置き換えて、運動方程式(7.3.4)も書き換える。つまり、

2自由度系における土台の強制振動問題

★ベクトルとマトリクスを用いて整理できる



$$\tilde{y} = y_o e^{i\omega t} \tag{7.3.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = y_o \boldsymbol{w} e^{i\omega t}\ , \quad \boldsymbol{x} = \mathrm{Re}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = y_o\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{w}e^{i\omega t}) \tag{7.3.7}$$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{C}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{C}\dot{\tilde{y}} + \boldsymbol{K}\tilde{y})\boldsymbol{e} \tag{7.3.8}$$

従って、

$$\boldsymbol{M}(-\omega^2 y_o \boldsymbol{w} e^{i\omega t}) + \boldsymbol{C} i\omega y_o \boldsymbol{w} e^{i\omega t} + \boldsymbol{K} y_o \boldsymbol{w} e^{i\omega t} = (\boldsymbol{C} i\omega y_o e^{i\omega t} + \boldsymbol{K} y_o e^{i\omega t})\boldsymbol{e} \tag{7.3.9}$$

つまり、

$$(\boldsymbol{K} + i\omega\boldsymbol{C} - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{K} + i\omega\boldsymbol{C})\boldsymbol{e} \tag{7.3.10}$$

ここで、

$$\tilde{\boldsymbol{K}} \equiv \boldsymbol{K} + i\omega\boldsymbol{C} \tag{7.3.11}$$

とおいてみる。

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K} \equiv \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{7.3.3}$$

であったので、式(7.3.11)は、複素剛性 $\tilde{k}_1$ および $\tilde{k}_2$ を

$$\tilde{k}_1 \equiv k_1 + i\omega c_1\ , \quad \tilde{k}_2 \equiv k_2 + i\omega c_2 \tag{7.3.12}$$

と定義することに相当する。このとき、

$$\boldsymbol{w} = (\tilde{\boldsymbol{K}} - \omega^2\boldsymbol{M})^{-1}\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{e}\ ,\ \ \tilde{\boldsymbol{K}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{k}_1+\tilde{k}_2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \tag{7.3.13}$$

となって、バネ・マス系で考えることができる。

土台を強制加振される2自由度系の応答倍率

★複素剛性を用いて2自由度系の強制振動解を求めることができる

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = y_o \boldsymbol{w} e^{i\omega t}\ , \quad \boldsymbol{x} = \mathrm{Re}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = y_o\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{w}e^{i\omega t}) \tag{7.3.7}$$

$$\boldsymbol{w} = (\tilde{\boldsymbol{K}} - \omega^2 \boldsymbol{M})^{-1}\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{e} \tag{7.3.13}$$

ここで、$\boldsymbol{w} = [w_1\ w_2]^T$ とおくと、w_1、w_2 は複素数であり、

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_o w_1 e^{i\omega t} \\ y_o w_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{7.3.14}$$

であるので、土台の振幅に対する質点1および質点2の振幅の比 ξ_1 および ξ_2 は、

$$\xi_1 = \frac{y_o|w_1|}{y_o} = |w_1| \quad , \quad \xi_2 = \frac{y_o|w_2|}{y_o} = |w_2| \tag{7.3.15}$$

ここで、式(7.3.3)より、

$$\begin{cases} \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7.3.16}$$

であったので、式(7.3.13)の右辺は、

$$\tilde{\boldsymbol{K}} - \omega^2 \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \tag{7.3.17}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.3.18}$$

よって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\tilde{k}_1}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2}\begin{bmatrix} \tilde{k}_2 - m_2\omega^2 \\ \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

従って、系1および2の応答倍率は

$$\xi_1 = |w_1| = \left|\frac{\tilde{k}_1(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2)}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2}\right| \tag{7.3.20}$$

$$\xi_2 = |w_2| = \left|\frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_2}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2}\right| \tag{7.3.21}$$

土台を強制加振される2自由度系の応答倍率

★複素剛性を用いて2自由度系の強制振動解を求めることができる

$$\xi_1 = |w_1| = \left| \frac{\tilde{k}_1(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2)}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2} \right| \quad (7.3.20)$$

$$\xi_2 = |w_2| = \left| \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_2}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2} \right| \quad (7.3.21)$$

ここで、

$$\tilde{k}_1 \equiv k_1 + i\omega c_1 \,, \quad \tilde{k}_2 \equiv k_2 + i\omega c_2 \quad (7.3.12)$$

であったが、構造減衰係数を

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{c_1}{k_1}\omega \quad , \quad \varepsilon_2 \equiv \frac{c_2}{k_2}\omega \quad (7.3.22)$$

と定義すると、

$$\tilde{k}_1 = k_1(1 + i\varepsilon_1) \quad , \quad \tilde{k}_2 = k_2(1 + i\varepsilon_2) \quad (7.3.23)$$

と書ける。また，第6回と同様、無次元量 μ、ν、η を

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1} \,, \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} \,, \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \quad (7.3.24)$$

と定義すれば、

このとき、式(7.3.20)、(6.3.21)は次のように書ける。

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \quad (7.3.25)$$

ただし、

$$\begin{cases} D_1 = (1 + \varepsilon_1{}^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + \varepsilon_2{}^2\nu^4] \\ D_2 = (1 + \varepsilon_1{}^2)(1 + \varepsilon_2{}^2)\nu^4 \end{cases} \quad (7.3.26)$$

$$\begin{cases} R = (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)\nu^2 - [1 + (1 + \mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\nu^2 - [\varepsilon_1 + (1 + \mu)\varepsilon_2\nu^2]\eta^2 \end{cases} \quad (7.3.27)$$

ここで、系1の構造減衰係数と粘性減衰比との関係は

$$\varepsilon_1 = \frac{c_1}{m_1\omega_1{}^2}\omega = \frac{2\zeta_1\omega_1}{\omega_1{}^2}\omega = 2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_1} = 2\zeta_1\eta \quad (7.3.28)$$

同様に、系2の場合には、

$$\varepsilon_2 = 2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_2} = 2\zeta_2\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega}{\omega_1} = 2\zeta_2\eta \,/\, \nu \quad (7.3.29)$$

であるので、これらを式(7.3.26)、(7.3.27)に代入すると

土台を強制加振される2自由度系の応答倍率

★複素剛性を用いて2自由度系の強制振動解を求めることができる

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2+I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2+I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1+4\zeta_1{}^2\eta^2)[(\nu^2-\eta^2)^2+4\zeta_2{}^2\nu^2\eta^2] \\ D_2 = (1+4\zeta_1{}^2\eta^2)(\nu^2+4\zeta_2{}^2\eta^2)\nu^2 \end{cases} \tag{7.3.30}$$

$$\begin{cases} R = (\nu-4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu-[1+(1+\mu)\nu^2]\eta^2+\eta^4 \\ I = 2(\zeta_1\nu+\zeta_2)\nu\eta-2[\zeta_1+(1+\mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

【例題7.3.1】 質量が$6\mathrm{kg}$、バネ定数が$18000\mathrm{N/m}$のバネと減衰比が0.02のダンパーからなる系に、質量が$0.2\mathrm{kg}$、バネ定数が$9000\mathrm{N/m}$のバネと減衰比が0.03のダンパからなる系を連結した系の土台を$10\mathrm{Hz}$、振幅$2\mathrm{mm}$で加振すると、2つの質点の振幅は何mmになるか？

【略解】 問題文より、2つの系の質量とバネ定数、減衰比は

$$m_1 = 6\,\mathrm{kg} \quad , \ k_1 = 18000\,\mathrm{N/m} \ , \ \zeta_1 = 0.02 \tag{1}$$

$$m_2 = 0.2\,\mathrm{kg} \ , \ k_2 = 9000\,\mathrm{N/m} \quad , \ \zeta_2 = 0.03 \tag{2}$$

であり、固有振動数はそれぞれ、

$$f_{o1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \approx 8.717275\,\mathrm{Hz} \tag{3}$$

$$f_{o2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \approx 33.76186\,\mathrm{Hz} \tag{4}$$

よって、質量比μと固有振動数比νは、

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{0.2}{6} \approx 0.033333 \tag{5}$$

$$\nu = \frac{f_{o2}}{f_{o1}} \approx \frac{33.76186}{8.717275} \approx 3.872983 \tag{6}$$

土台を$f = 10\,\mathrm{Hz}$で加振するとき、無次元加振振動数を

土台を強制加振される2自由度系の応答倍率

★複素剛性を用いて2自由度系の強制振動解を求めることができる

$$\eta = \frac{f}{f_{o1}} \approx \frac{10}{8.717275} \approx 1.147147 \tag{7}$$

と定義すれば、式(7.3.25)より、質点1および2と土台との振幅比 ξ_1 および ξ_2 は、

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2+I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2+I^2}} \tag{7.3.25}$$

ただし、

$$\begin{aligned} D_1 &= (1+4\zeta_1{}^2\eta^2)[(\nu^2-\eta^2)^2+4\zeta_2{}^2\nu^2\eta^2] \\ &\approx 187.7188 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (1+4\zeta_1{}^2\eta^2)(\nu^2+4\zeta_2{}^2\eta^2)\nu^2 \\ &\approx 187.7188 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} R &= (\nu-4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu-[1+(1+\mu)\nu^2]\eta^2+\eta^4 \\ &\approx -4.99364 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} I &= 2(\zeta_1\nu+\zeta_2)\nu\eta-2[\zeta_1+(1+\mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \\ &\approx 0.531989 \end{aligned} \tag{11}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{D_1}{R^2+I^2}} \approx \sqrt{\frac{187.7188^2}{(-4.99364)^2+(0.531989)^2}} \\ &\approx 2.728259 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \sqrt{\frac{D_2}{R^2+I^2}} \approx \sqrt{\frac{187.7188^2}{(-4.99364)^2+(0.531989)^2}} \\ &\approx 2.990531 \end{aligned} \tag{13}$$

よって、土台の振幅が $y_o = 2\,\mathrm{mm}$ のとき、質点の振幅はそれぞれ、

$$x_{o1} = \xi_1 y_o \approx 2.728259 \times 2 \approx 5.456519\,\mathrm{mm} \tag{14}$$

$$x_{o2} = \xi_2 y_o \approx 2.990531 \times 2 \approx 5.981063\,\mathrm{mm} \tag{15}$$

第3章のまとめ(1/2)

- 2自由度線形振動系の応答倍率は、構造減衰係数を用いて次式のように表される。

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1 + {\varepsilon_1}^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + {\varepsilon_2}^2 \nu^4] \\ D_2 = (1 + {\varepsilon_1}^2)(1 + {\varepsilon_2}^2)\nu^4 \end{cases} \tag{7.3.26}$$

$$\begin{cases} R = (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)\nu^2 - [1 + (1 + \mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\nu^2 - [\varepsilon_1 + (1 + \mu)\varepsilon_2 \nu^2]\eta^2 \end{cases} \tag{7.3.27}$$

第3章のまとめ(2/2)

- 応答倍率を粘性減衰比を用いて表すと,

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + 4{\zeta_2}^2\nu^2\eta^2] \\ D_2 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)(\nu^2 + 4{\zeta_2}^2\eta^2)\nu^2 \end{cases} \tag{7.3.30}$$

$$\begin{cases} R = (\nu - 4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu - [1 + (1 + \mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = 2(\zeta_1\nu + \zeta_2)\nu\eta - 2[\zeta_1 + (1 + \mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年5月26日(月)2限

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

第4章　2自由度強制振動系の共振

第4章の学修目標

★ 2自由度強制振動系の共振について語ることができる。

2自由度系の共振

★系1と系2の共振振動数は異なるが、減衰がなければ一致し、固有振動数に等しい

質量比μ、固有振動数比ν、無次元加振振動数ηを

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \tag{7.3.24}$$

と定義すれば、2自由度系の応答倍率は

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + 4{\zeta_2}^2\nu^2\eta^2 \\ D_2 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)(\nu^2 + 4{\zeta_2}^2\eta^2)\nu^2 \end{cases} \tag{7.3.30}$$

$$\begin{cases} R = (\nu - 4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = 2(\zeta_1\nu + \zeta_2)\nu\eta - 2[\zeta_1 + (1+\mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

であった、 ξ_1とξ_2の式が異なるので、ぞれぞれが極大になるときのωの値、すなわち、共振角振動数は異なる。

※　共振振動数の厳密解を求めることは困難。

ただし、減衰がない、すなわち,$\zeta_1 = \zeta_2 = 0$の場合には

$$\begin{cases} D_1 = (\nu^2 - \eta^2)^2 \quad , \quad D_2 = \nu^4 \\ R = \nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \quad , \quad I = 0 \end{cases} \tag{7.4.1}$$

であるので、

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\left|\nu^2 - \eta^2\right|}{\left|\nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4\right|} \\ \xi_2 = \dfrac{\nu^2}{\left|\nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4\right|} \end{cases} \tag{7.4.2}$$

となり、 系1と2の共振振動数は一致し、無次元加振振動数は次式から求められることがわかる。

$$\nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 = 0 \tag{7.4.2}$$

この式は、無次元固有振動数αの式

$$\alpha^4 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\alpha^2 + \nu^2 = 0 \tag{6.1.12}$$

と一致する。つまり、減衰がない場合には、系1と系2の共振振動数は一致し、その値は固有振動数と等しい。また、このとき、共振倍率は無限大となる。

反共振

★減衰が無い場合、系2の固有振動数で加振すると系1が振動しない

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\left|\nu^2 - \eta^2\right|}{\left|\nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4\right|} \\ \xi_2 = \dfrac{\nu^2}{\left|\nu^2 - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4\right|} \end{cases} \tag{7.4.2}$$

この式から、$\eta = \nu$、すなわち、 $\omega = \omega_2$のとき、系1は振動しないことがわかる。この現象は反共振と呼ばれる。

第4章のまとめ

- ２自由度系の場合、系1の共振振動数と系2の共振振動数は必ずしも一致しないが、減衰がない場合には一致し、その値は固有振動数に等しい。
- また、そのとき、系1と系2の応答倍率はどちらも無限大となる。
- さらに、系2の固有振動数で加振すると、系1が振動しなくなる。この現象は反共振と呼ばれる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第7回　2自由度線形振動系の強制振動

第5章　加振振動数と応答倍率との関係

第5章の学修目標

★ ２自由度系の強制振動問題 における加振振動数と振幅比の関係について説明できる。

加振振動数と応答倍率との関係

★系1と2の質量比および固有振動数比と減衰比の4つがパラメータ

質量比μ、固有振動数比ν、無次元加振振動数ηを

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \tag{7.3.24}$$

と定義すれば、2自由度系の応答倍率は

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + 4{\zeta_2}^2\nu^2\eta^2 \\ D_2 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)(\nu^2 + 4{\zeta_2}^2\eta^2)\nu^2 \end{cases} \tag{7.3.30}$$

$$\begin{cases} R = (\nu - 4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = 2(\zeta_1\nu + \zeta_2)\nu\eta - 2[\zeta_1 + (1+\mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

ここで、例として、質量比と固有振動数比を

$$\mu = 1 \quad , \quad \nu = 1.2 \tag{7.5.1}$$

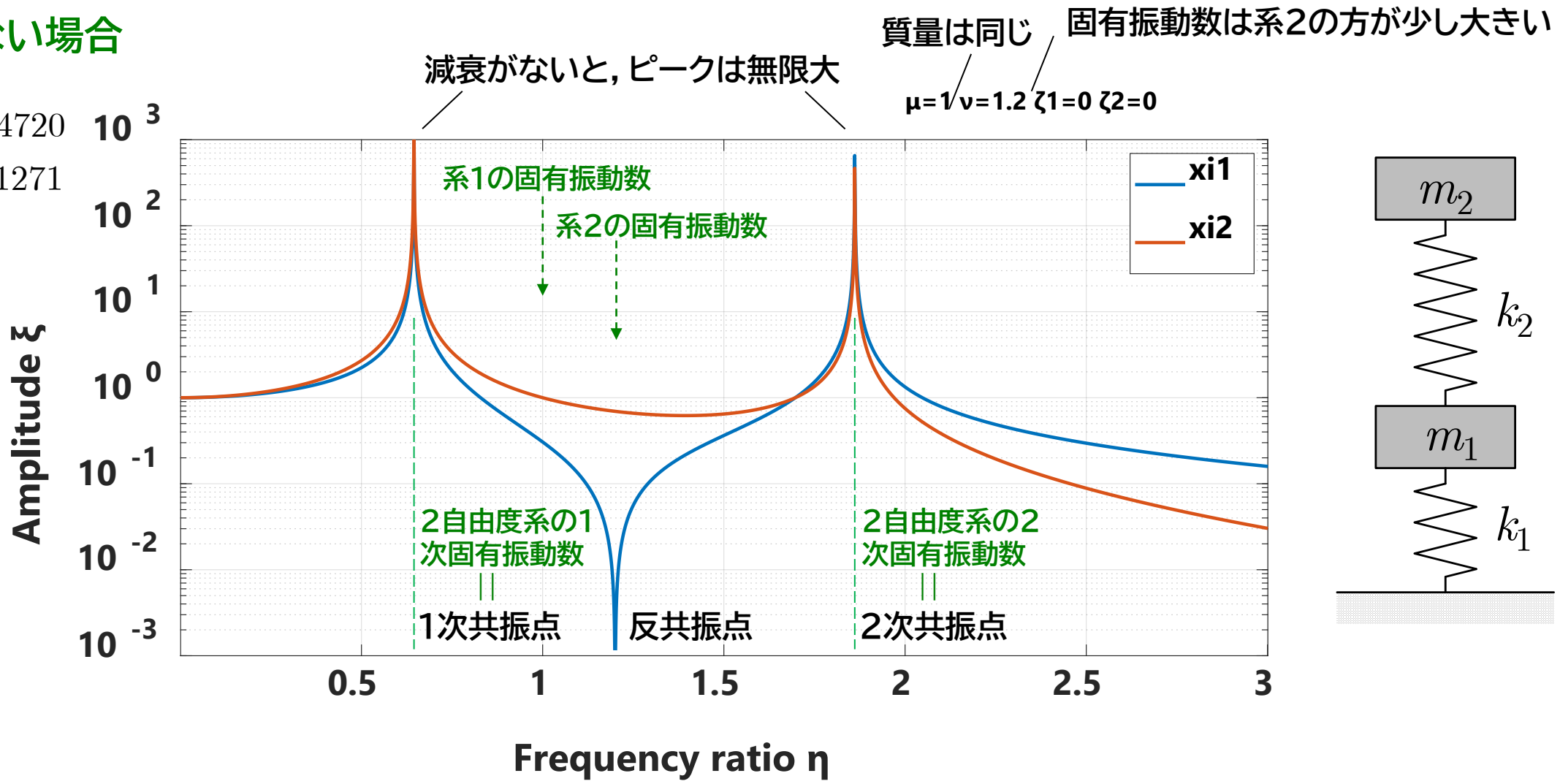
つまり、質点1と2の質量を同じにし、質点2の固有振動数を質点1の1.2倍に固定して、 減衰比の影響だけみてみると・・・

加振振動数と応答倍率との関係

★減衰比が小さい場合の特徴

減衰が全くない場合

$$\begin{cases} \eta_1^1 = \eta_1^2 = 0.644720 \\ \eta_2^1 = \eta_2^2 = 1.861271 \end{cases}$$



加振振動数と応答倍率との関係

★減衰比が小さい場合の特徴

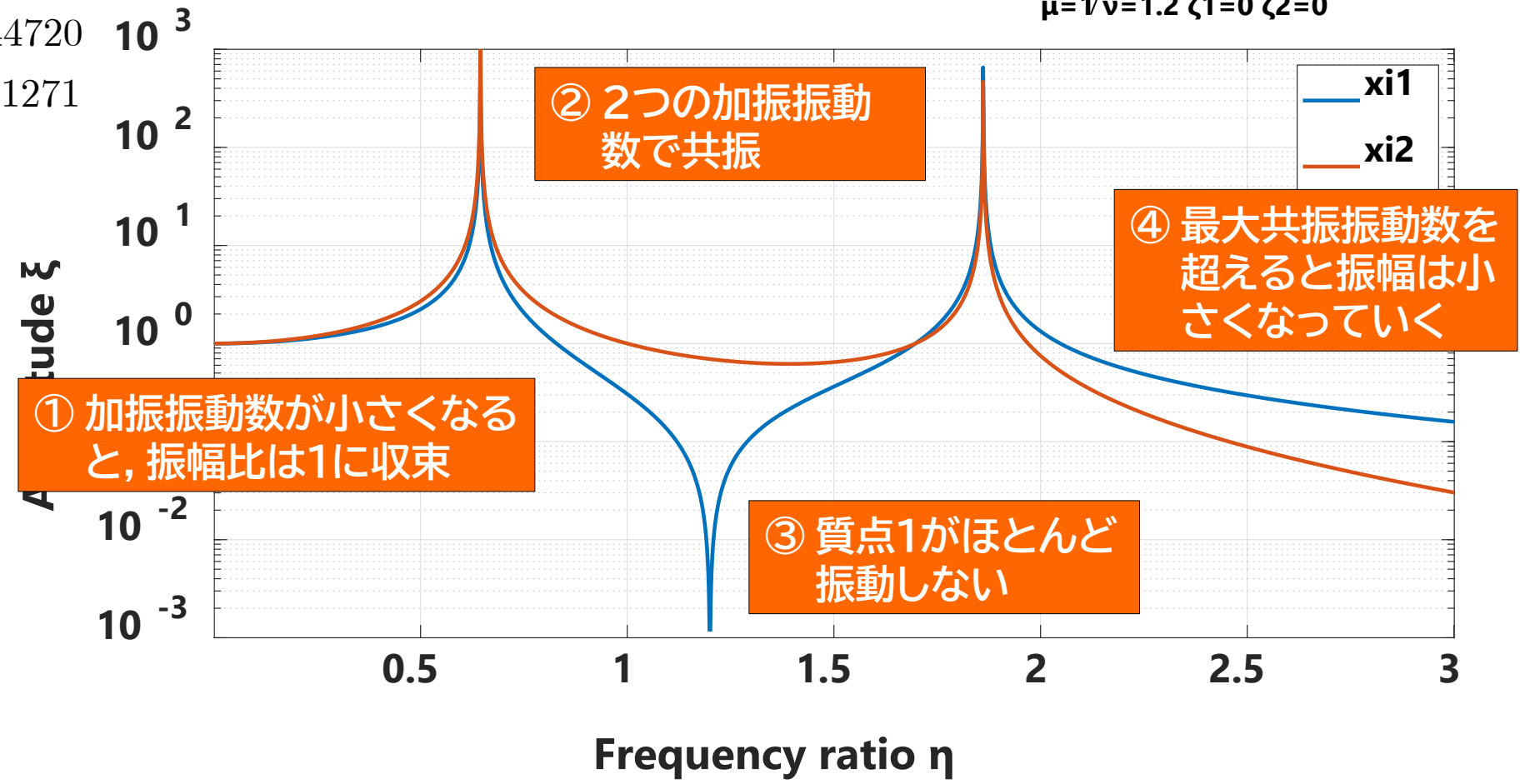
減衰が全くない場合

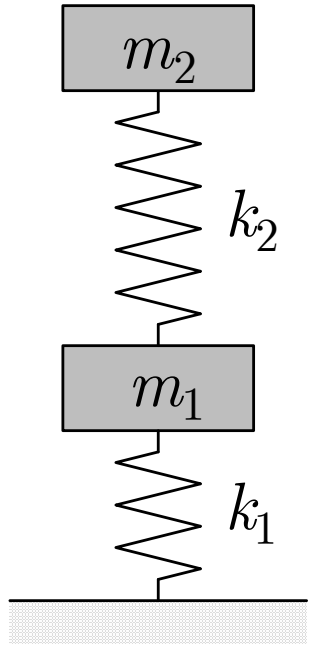
$$\begin{cases} \eta_1^1 = \eta_1^2 = 0.644720 \\ \eta_2^1 = \eta_2^2 = 1.861271 \end{cases}$$

減衰がないと，ピークは無限大

質量は同じ　固有振動数は系2の方が少し大きい

μ=1 ν=1.2 ζ1=0 ζ2=0





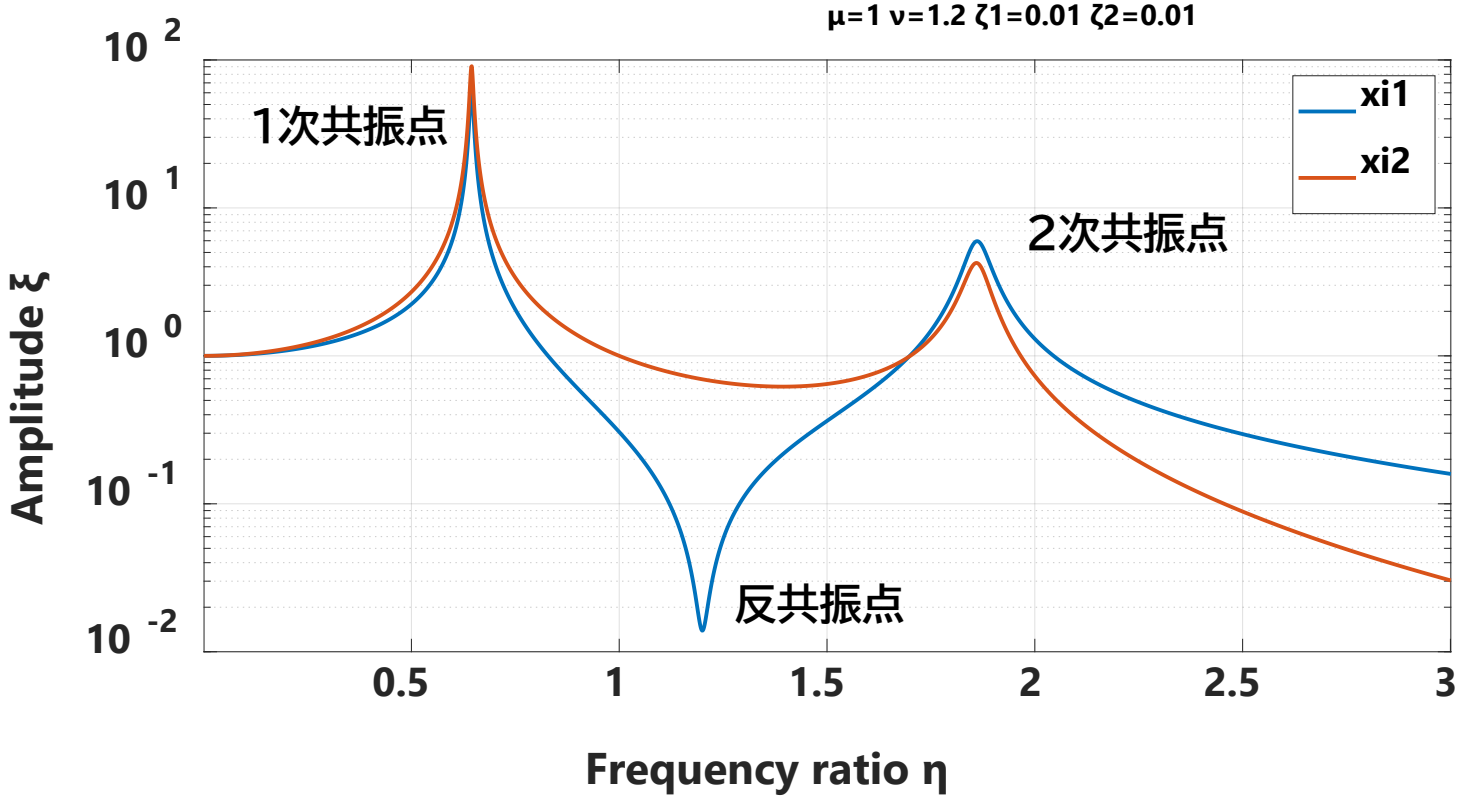
加振振動数と応答倍率との関係

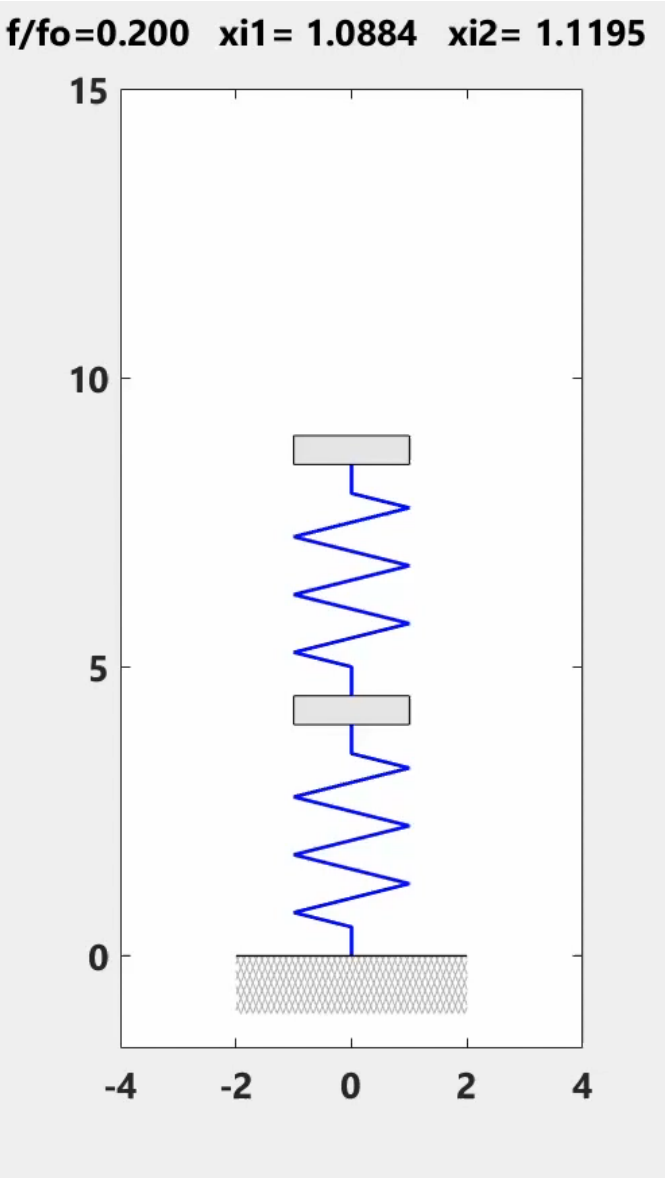
★減衰比が小さい場合の特徴

減衰がわずかにある場合

$$\begin{cases} \eta_1^1 = 0.6446818 \quad , \quad \eta_1^2 = 0.644702 \\ \eta_2^1 = 1.8613444 \quad , \quad \eta_2^2 = 1.859689 \end{cases}$$

減衰がちょっとある





加振振動数と位相差との関係

★複素変位の位相が位相差

質点の変位は以下の通りであった。

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_o w_1 e^{i\omega t} \\ y_o w_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} \tag{7.3.14}$$

w_1 と w_2 の位相をそれぞれ ϕ_1 および ϕ_2 とすれば

$$w_1 = |w_1| e^{i\phi_1} \quad , \quad w_2 = |w_2| e^{i\phi_2} \tag{7.5.2}$$

であり、

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = y_o |w_1| e^{i\phi_1} e^{i\omega t} = y_o |w_1| e^{i(\omega t + \phi_1)} \\ \tilde{x}_2 = y_o |w_2| e^{i\phi_2} e^{i\omega t} = y_o |w_2| e^{i(\omega t + \phi_2)} \end{cases} \tag{7.5.3}$$

つまり、w_i の位相 ϕ_i が質点と土台との位相差そのものになっている。ちなみに、w_i は以下の通り。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2 & -\tilde{k}_2 \\ -\tilde{k}_2 & \tilde{k}_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\tilde{k}_1}{(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - m_1\omega^2)(\tilde{k}_2 - m_2\omega^2) - \tilde{k}_2{}^2} \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 - m_2\omega^2 \\ \tilde{k}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

したがって、式(7.3.19)から w_1 および w_2 を求めて、その実部と虚部を求めることができれば、すなわち、

$$w_1 = p_1 + iq_1 \quad , \quad w_2 = p_2 + iq_2 \tag{7.5.4}$$

となる p_1、q_1、p_2、q_2 を求めることができれば、

$$\phi_1 = \operatorname{atan2}(q_1, p_1) \quad , \quad \phi_2 = \operatorname{atan2}(q_2, p_2) \tag{7.5.5}$$

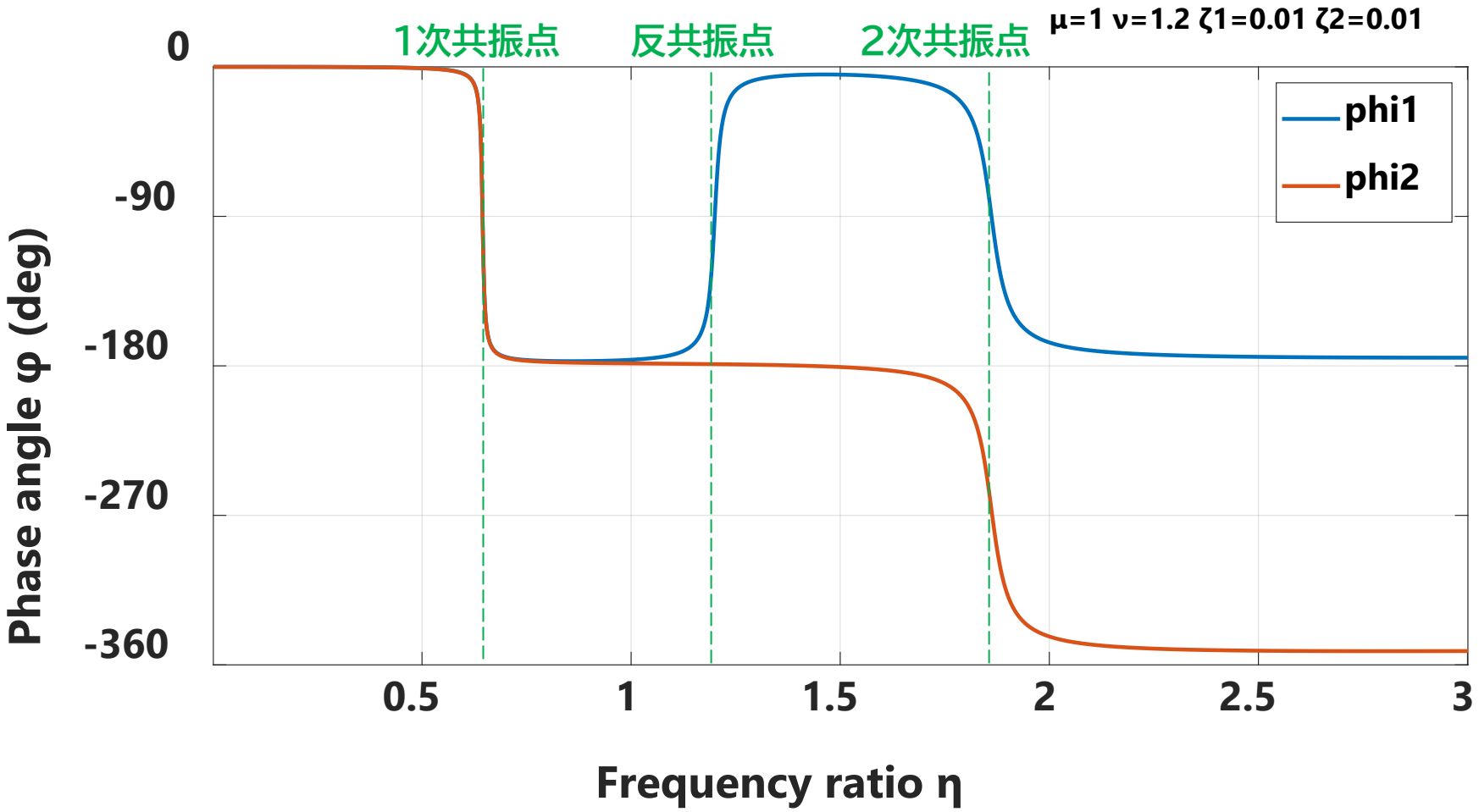
により、位相差を求めることができる。

ちなみに、式(7.3.19) の複素数の計算をやってくれるツールもあるので、そういったツールを使えば、振幅も位相差も簡単に計算できる。

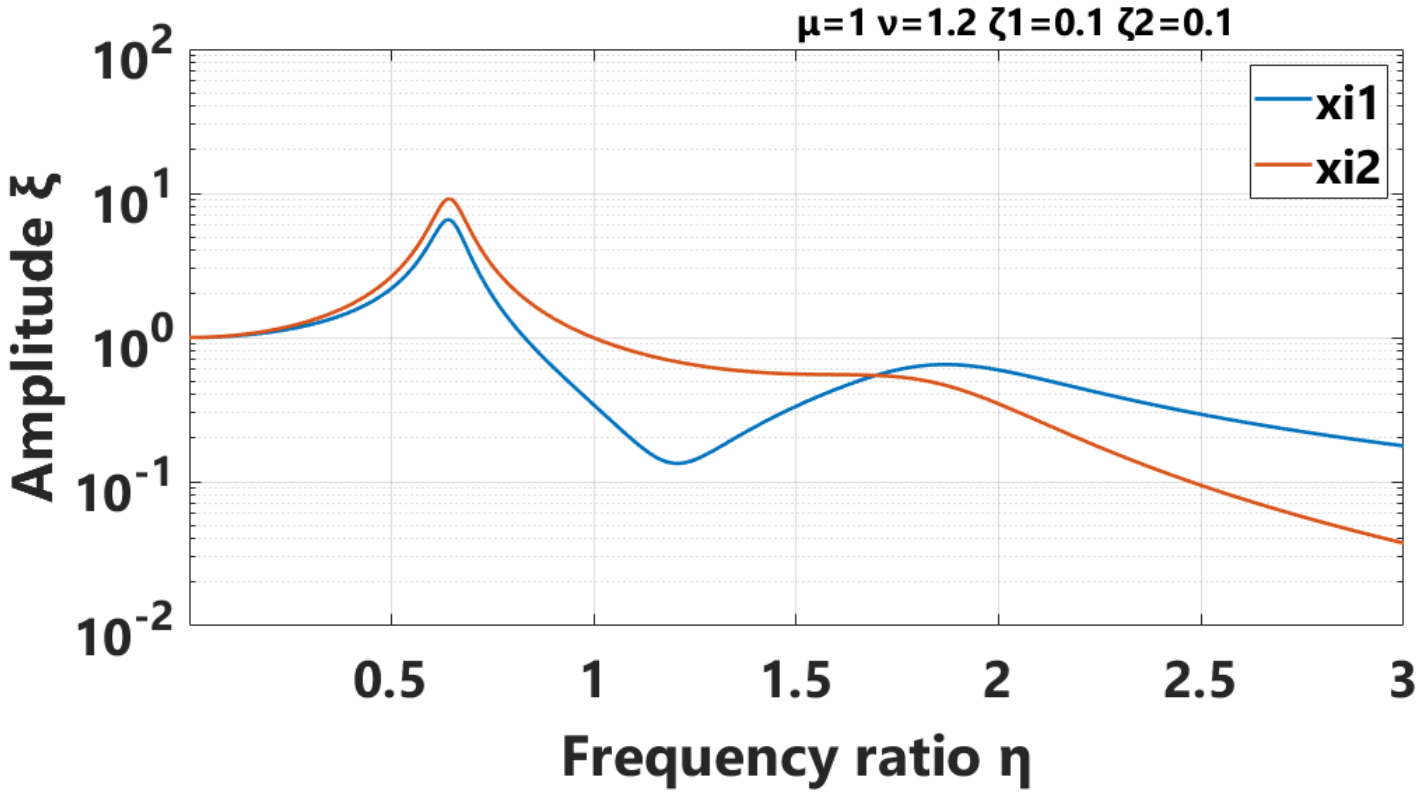
なお、p_1、q_1、p_2、q_2 の理論式を求めるのは結構、大変・・・

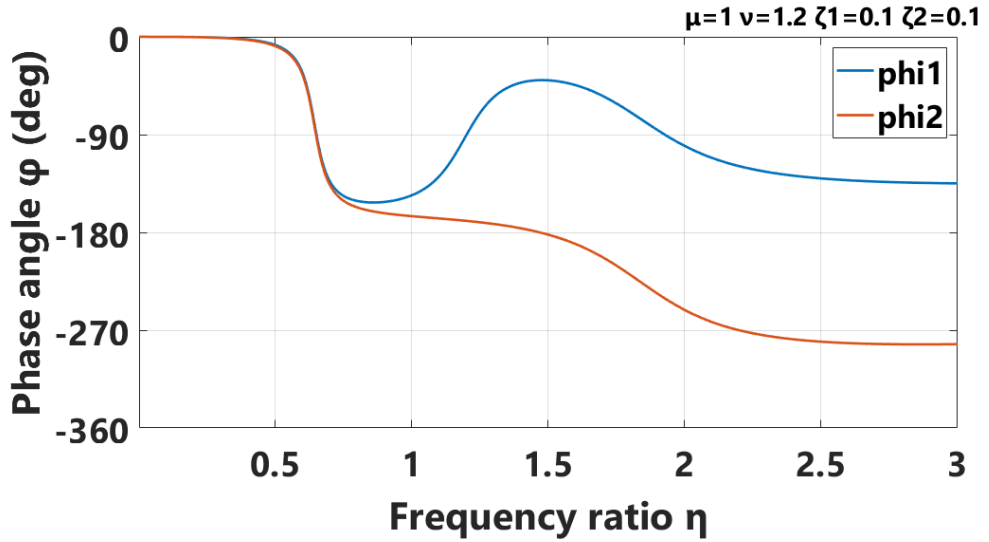
加振振動数と位相差との関係

★減衰比が小さい場合の特徴

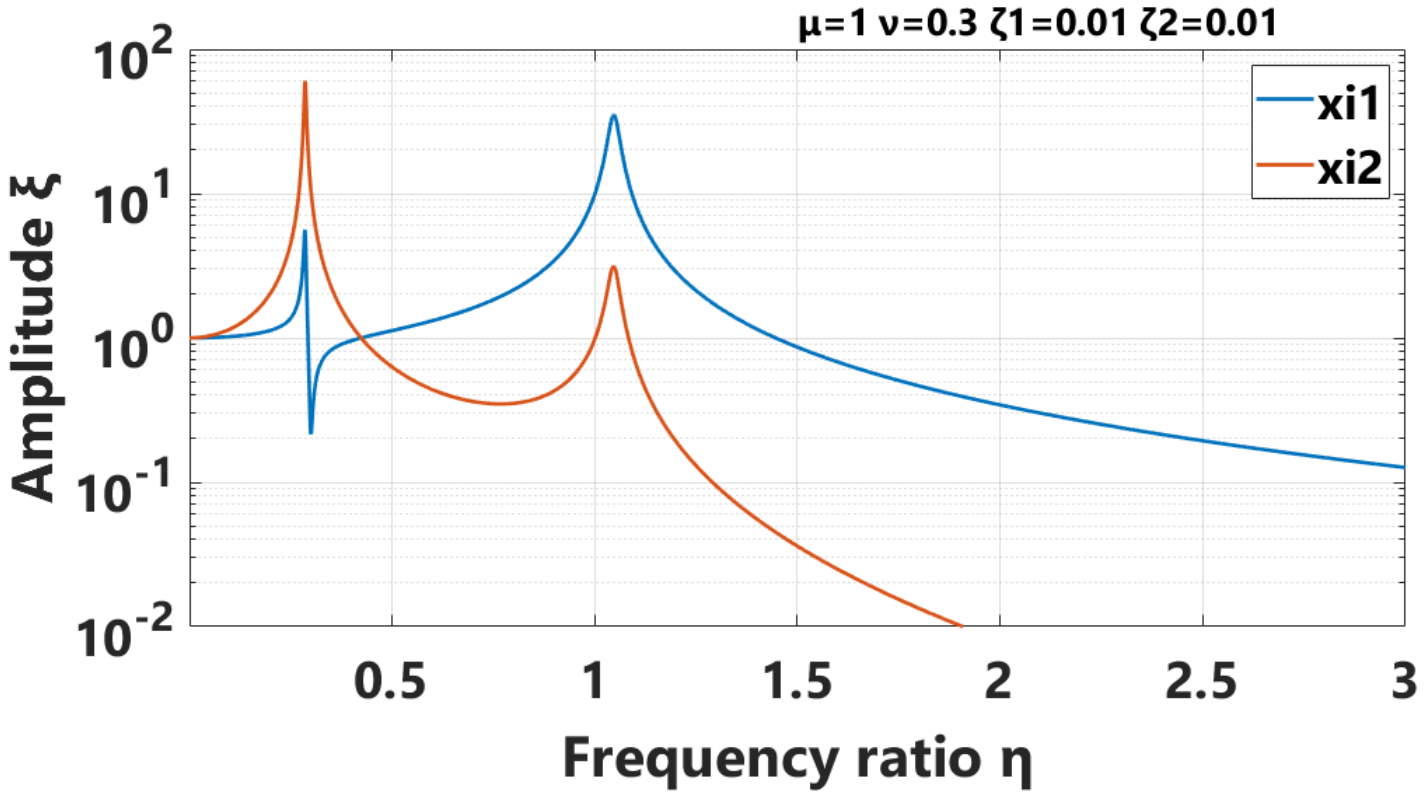


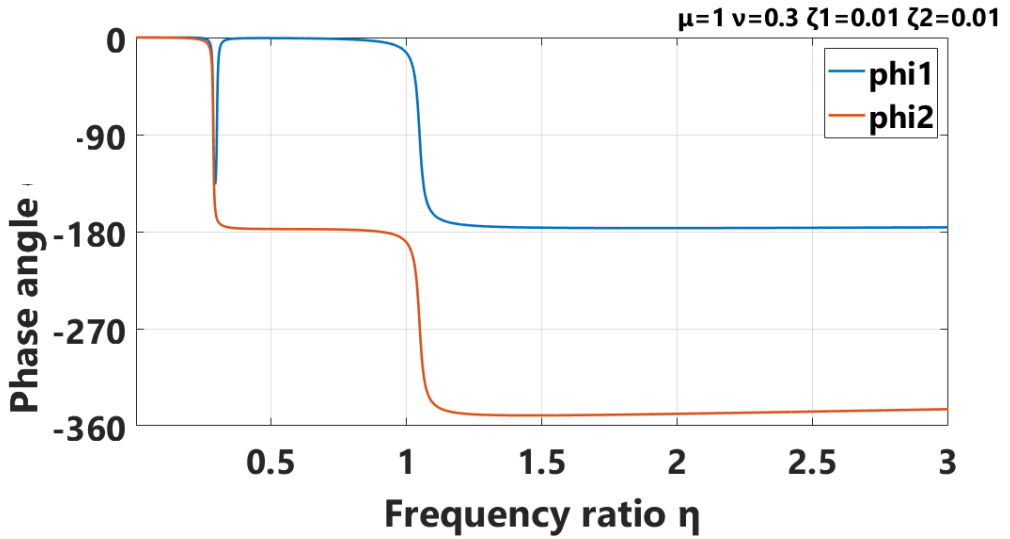
ちなみに、減衰が大きくなると・・・





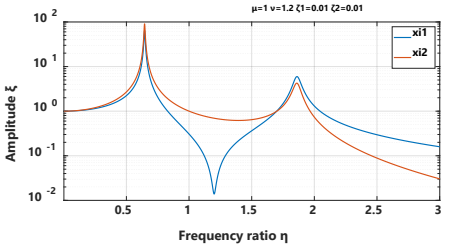
ちなみに、系2の固有振動数が小さいと・・・





第5章のまとめ

- 減衰が小さい2自由度系の土台を加振したときの、加振振動数と応答倍率との関係には以下のような特徴がある。
  1. 加振振動数が小さくなると、応答倍率は質点1、2ともに1に収束する。
  2. 共振振動数は系1、系2のそれぞれについて2つある。
  3. 減衰が0の場合、系1と2の共振振動数は一致し、その値は固有振動数と等しくなる。また、系1, 2ともに共振倍率は無限大となる。
  3. 加振振動数が質点2の固有振動数付近（減衰が0の場合には、両者が一致するとき）になると, 質点1はほとんど振動しない。
  4. 最大共振振動数よりも加振振動数が大きくなっていくと、応答倍率は質点1, 2ともに小さくなっていく。
  5. 共振の前後で系1、2ともに位相は反転する。



振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

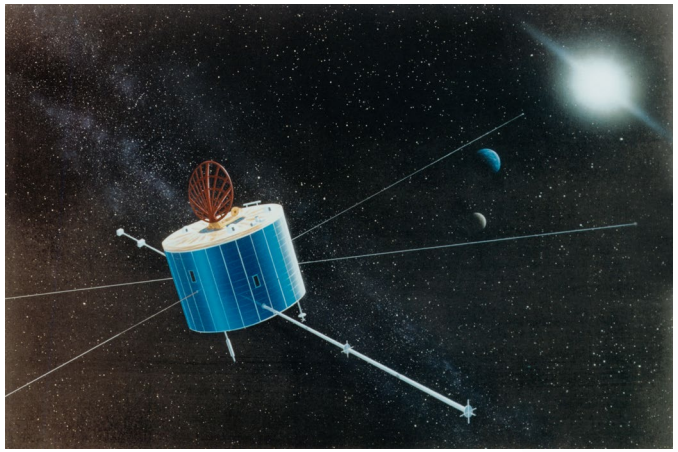
第7回　2自由度線形振動系の強制振動

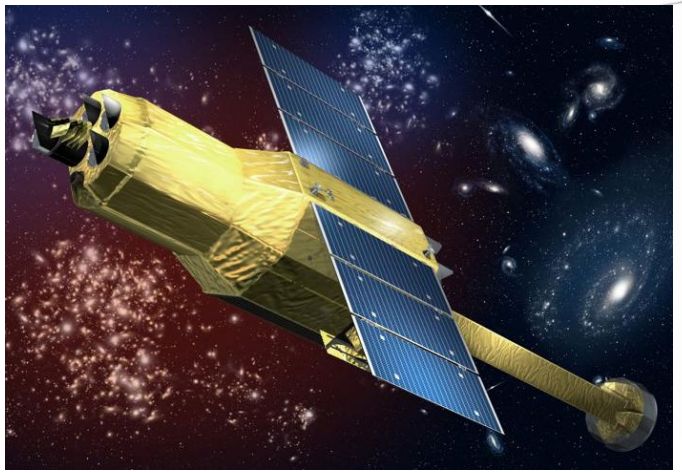
付録　人工衛星の振動に関するトピックス

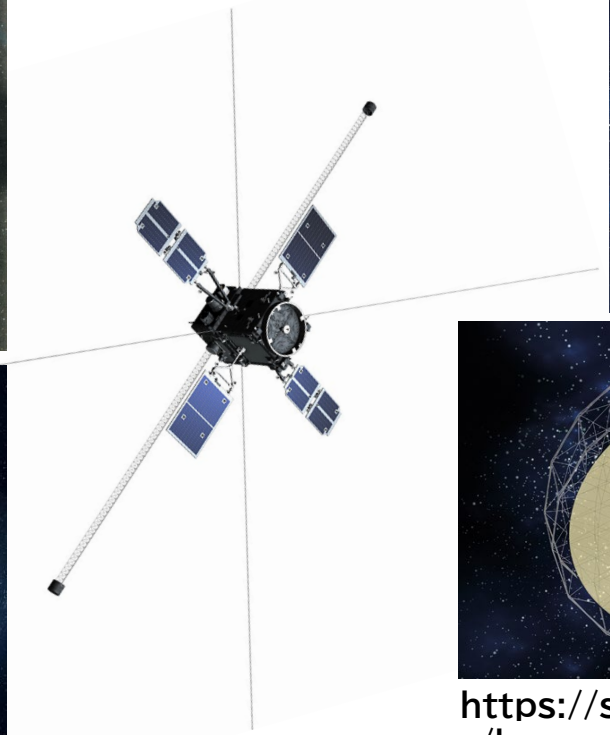
人工衛星の姿勢制御系と柔軟な付属物との連成振動

★振動しやすいものが付いていると、その影響を受ける

【例】衛星本体と伸展マスト

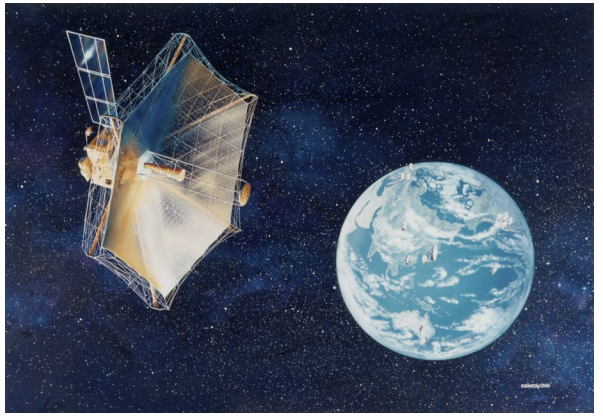


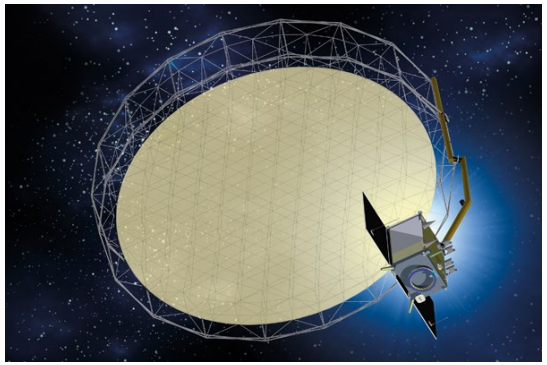




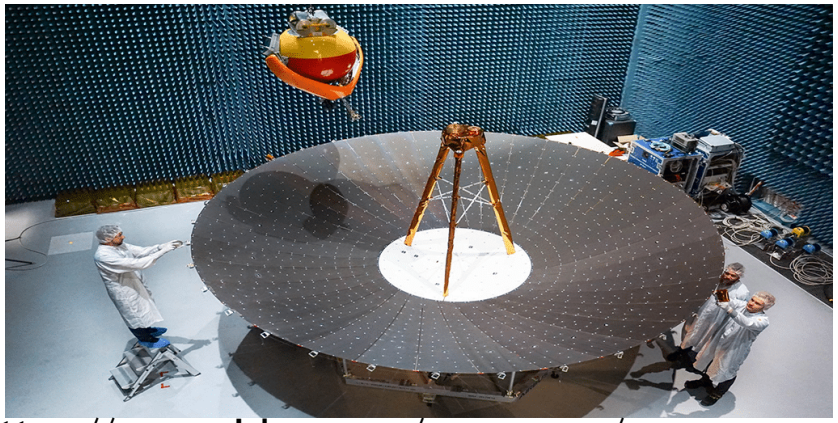
JAXAデジタルアーカイブス http://jda.jaxa.jp/index.php

【例】衛星本体とアンテナ





https://satsearch.co/products/hps-gmbh-large-deployable-antenna

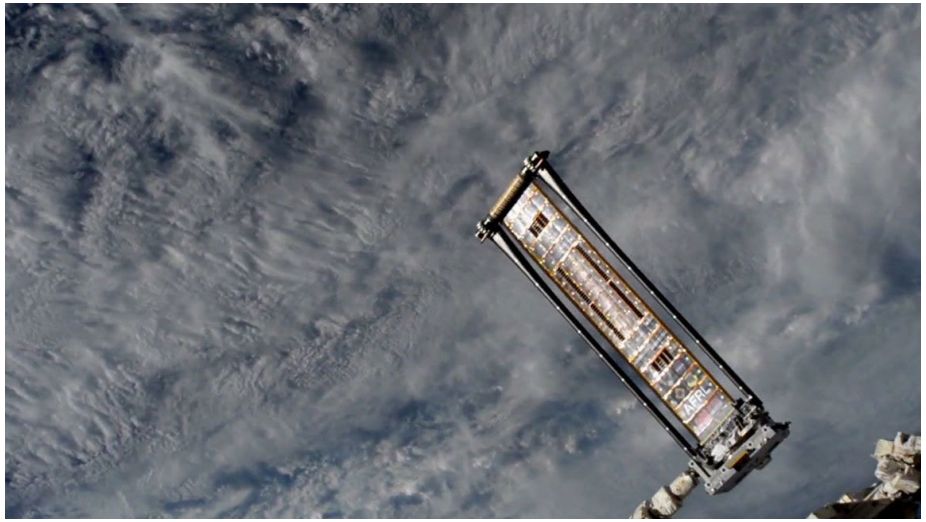


https://www.airbus.com/newsroom/press-releases/en/2020/12/airbus-successfully-qualifies-europes-first-five-metre-deployable-reflector-for-radar-satellites.html

人工衛星の姿勢制御系と柔軟な付属物との連成振動

★振動しやすいものが付いていると、その影響を受ける

【例】衛星本体と太陽電池アレイ



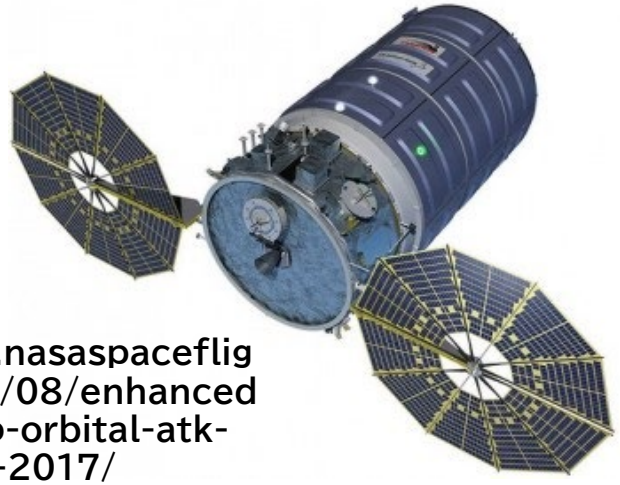
https://www.nasaspaceflight.com/2015/08/enhanced-cygnus-help-orbital-atk-crs-contract-2017/

JAXAデジタルアーカイブス http://jda.jaxa.jp/index.php

https://www.youtube.com/watch?v=FQIboXl0dIA&t=4s

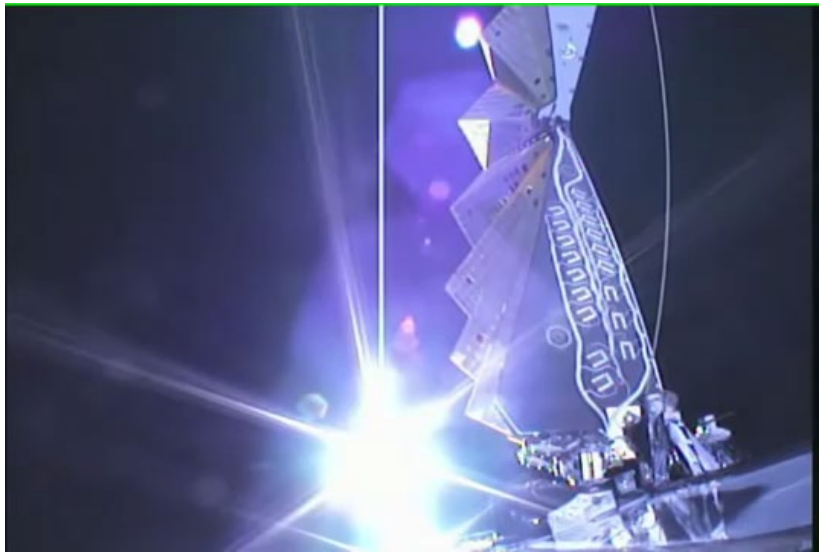
人工衛星の姿勢制御系と柔軟な付属物との連成振動

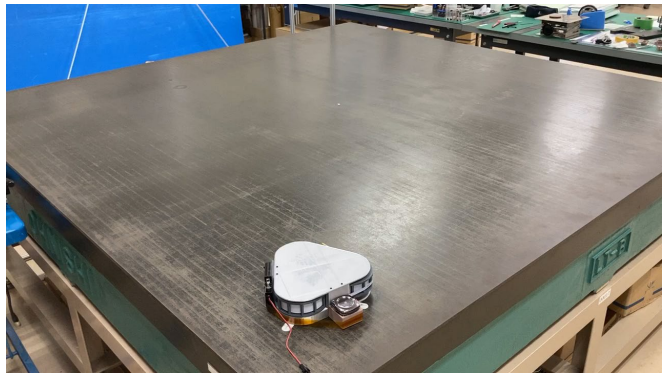
★振動しやすいものが付いていると、その影響を受ける

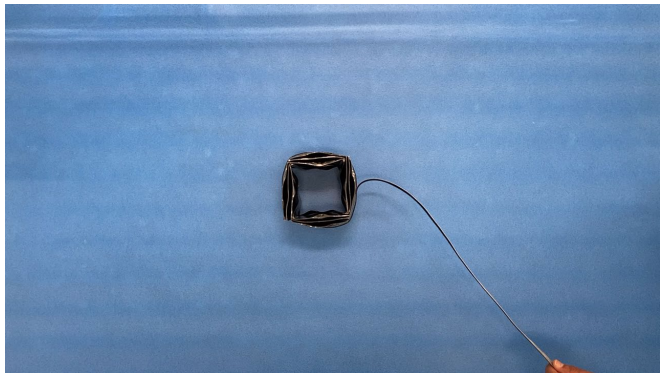


https://www.nasaspaceflight.com/2015/08/enhanced-cygnus-help-orbital-atk-crs-contract-2017/

https://www.youtube.com/watch?v=bnDeJ7saLQY&t=2s







150W/kg ⇒ 200~300W/kg

連成とは？

★お互いの変化が他方の変化に影響を及ぼすこと

例えば、下図のように、2つの質点がある場合、運動方程式は、

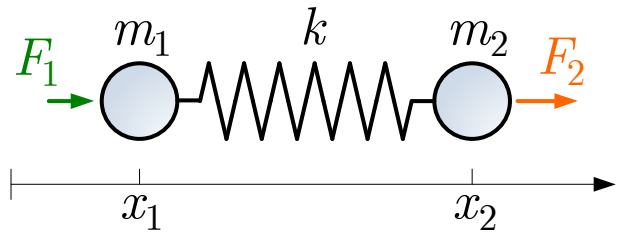
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = F_2 \end{cases} \tag{7.A.1}$$

であり、x_1 と x_2 の運動は互いに独立（連成しない）。

これに対し、両者がバネで繋がれていると、運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + F_2 \end{cases} \tag{7.A.2}$$

となって、x_1 の変化が x_2 の運動に影響を及ぼし、 x_2 の変化が x_1 の運動に影響を及ぼす。このような場合には、x_1 と x_2 は連成している、といえる。



連成とは？

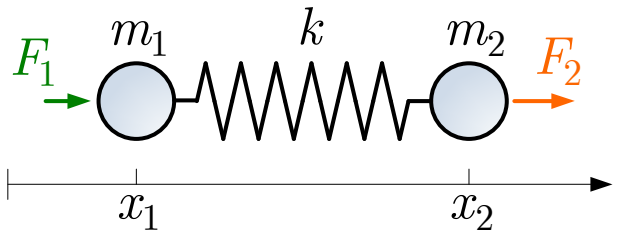
★お互いの変化が他方の変化に影響を及ぼすこと

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + F_2 \end{cases} \tag{7.A.2}$$

この式を変形すると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{7.A.3}$$

となって、右辺の行列の非対角項が0ではない。非対角項が0か否かで連成していないかどうかがわかる。



【例】

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + p \\ \dot{y} = dy + q \end{cases} \tag{7.A.4}$$

であれば、xとyは独立（連成しない）。しかし、

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p \\ \dot{y} = cx + dy + q \end{cases} \tag{7.A.5}$$

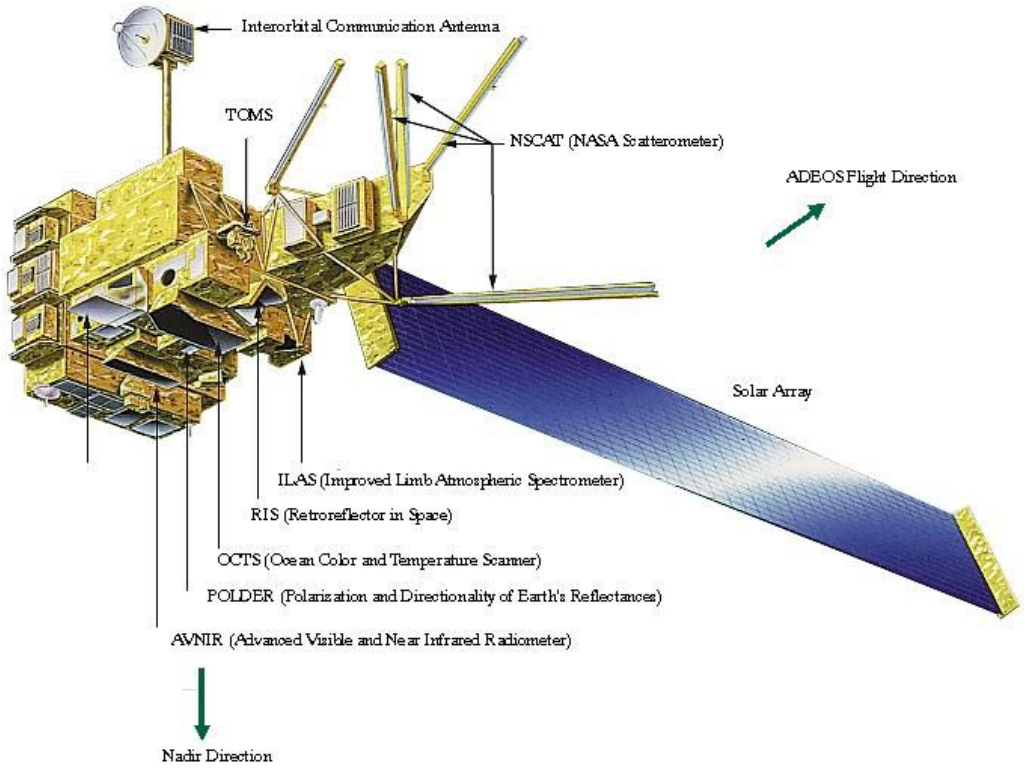
であれば、xとyは連成している。実際、式(7.A.5)は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \tag{7.A.6}$$

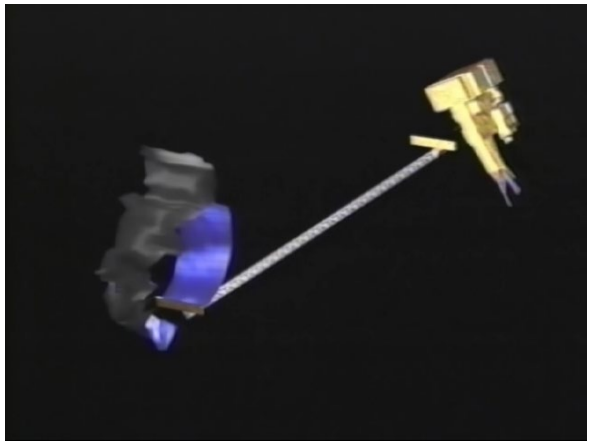
と書けて、$b = c = 0$であれば（式(7.A.4)と一致）、 xとyは連成しないが、0でなければ連成する。

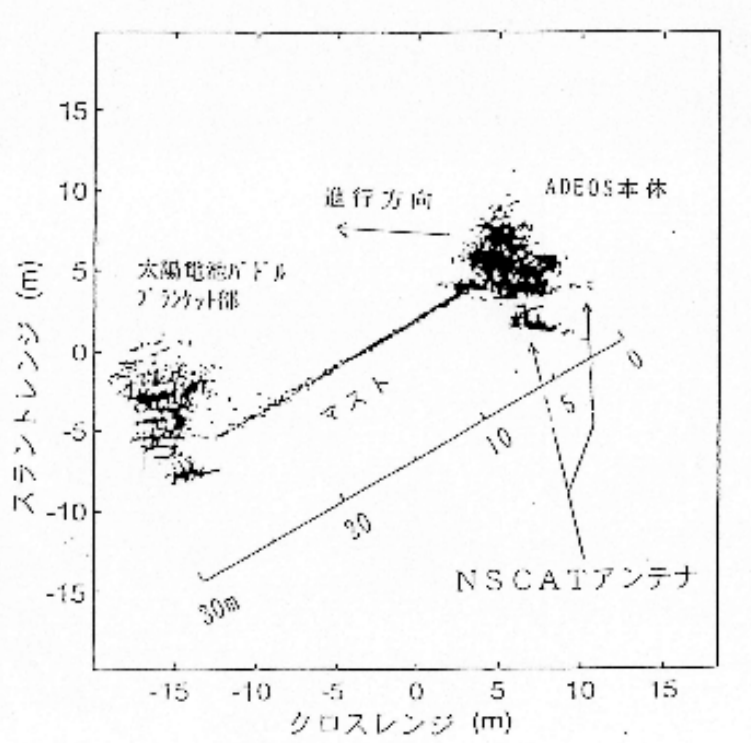
熱誘起振動

★人工衛星が日陰から日照(あるいはその逆)に切り替わる際に起こりやすい



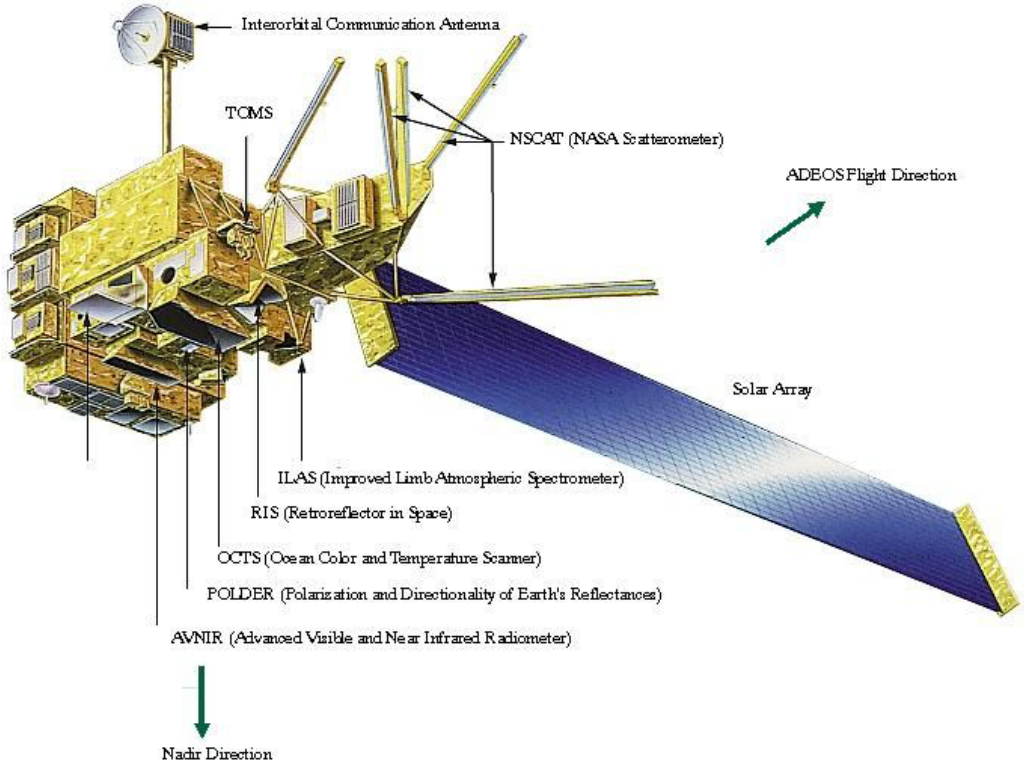
- 日陰時にブランケットが予想以上に収縮
- ブランケットに過大な張力が作用し、ピンヒンジの一部が破断
- 熱サイクルの繰り返しによる疲労により、ピンヒンジ部やはんだ付け部が一列全て破断



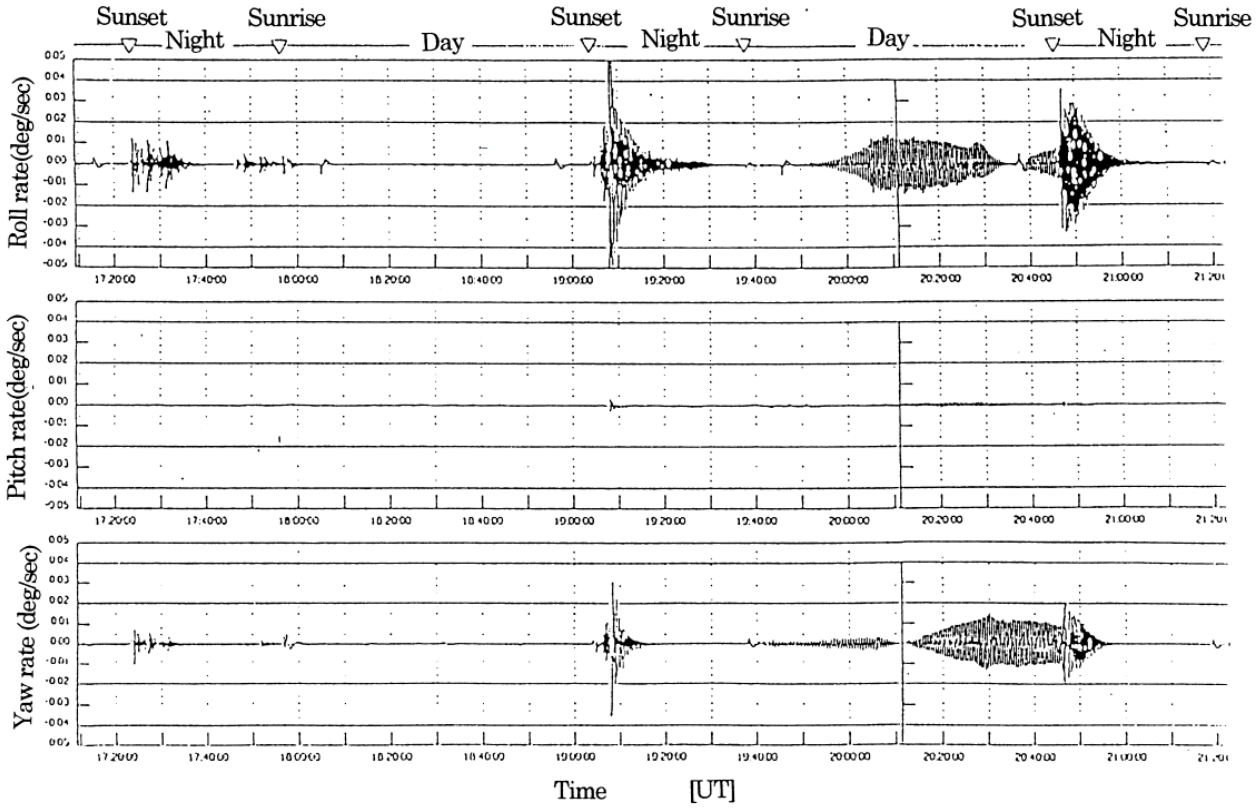


熱誘起振動

★人工衛星が日陰から日照(あるいはその逆)に切り替わる際に起こりやすい

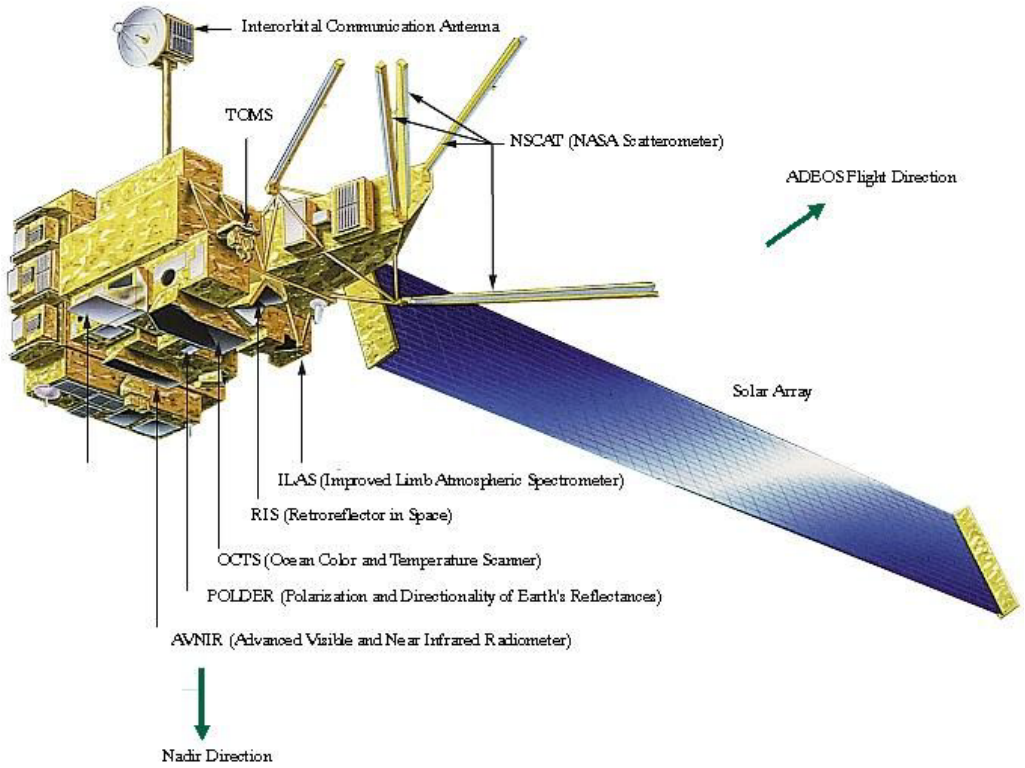


- 日陰時にブランケットが予想以上に収縮
- ブランケットに過大な張力が作用し、ピンヒンジの一部が破断
- 熱サイクルの繰り返しによる疲労により、ピンヒンジ部やはんだ付け部が一列全て破断

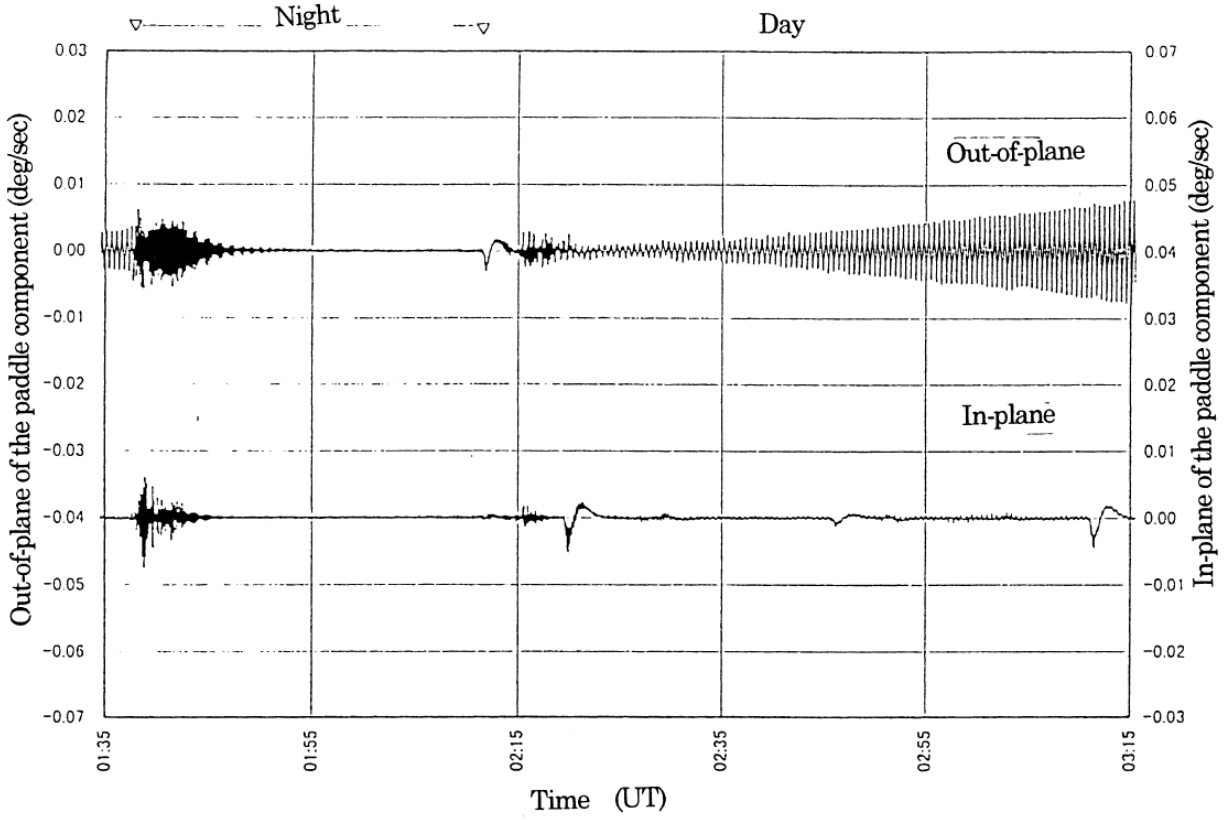


熱誘起振動

★人工衛星が日陰から日照(あるいはその逆)に切り替わる際に起こりやすい

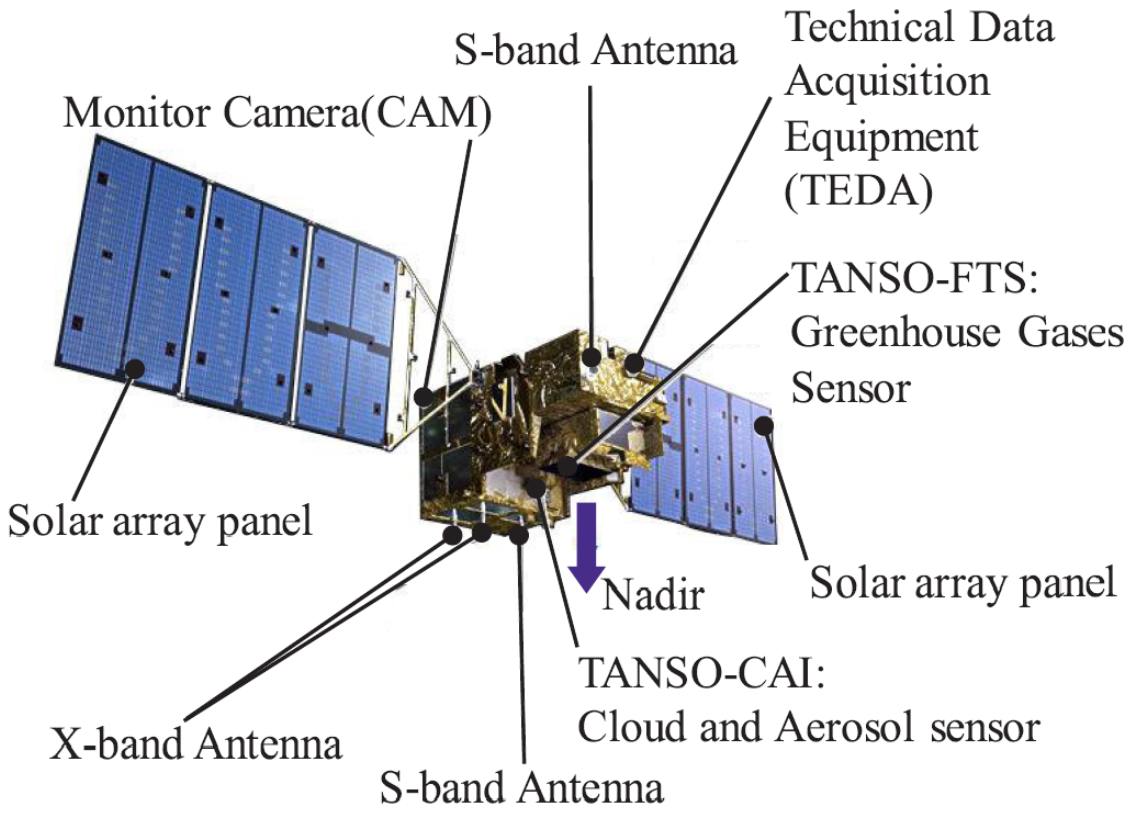


- 日陰時にブランケットが予想以上に収縮
- ブランケットに過大な張力が作用し、ピンヒンジの一部が破断
- 熱サイクルの繰り返しによる疲労により、ピンヒンジ部やはんだ付け部が一列全て破断

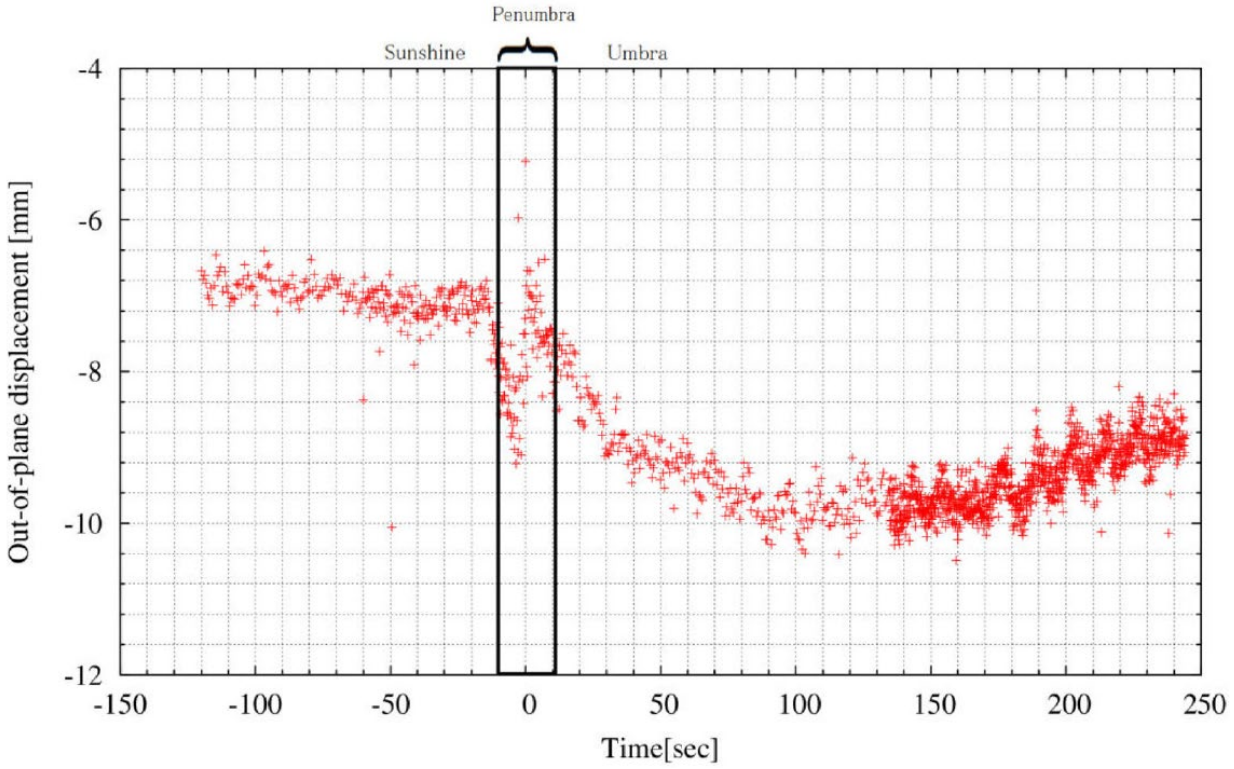


熱誘起振動

★人工衛星が日陰から日照(あるいはその逆)に切り替わる際に起こりやすい



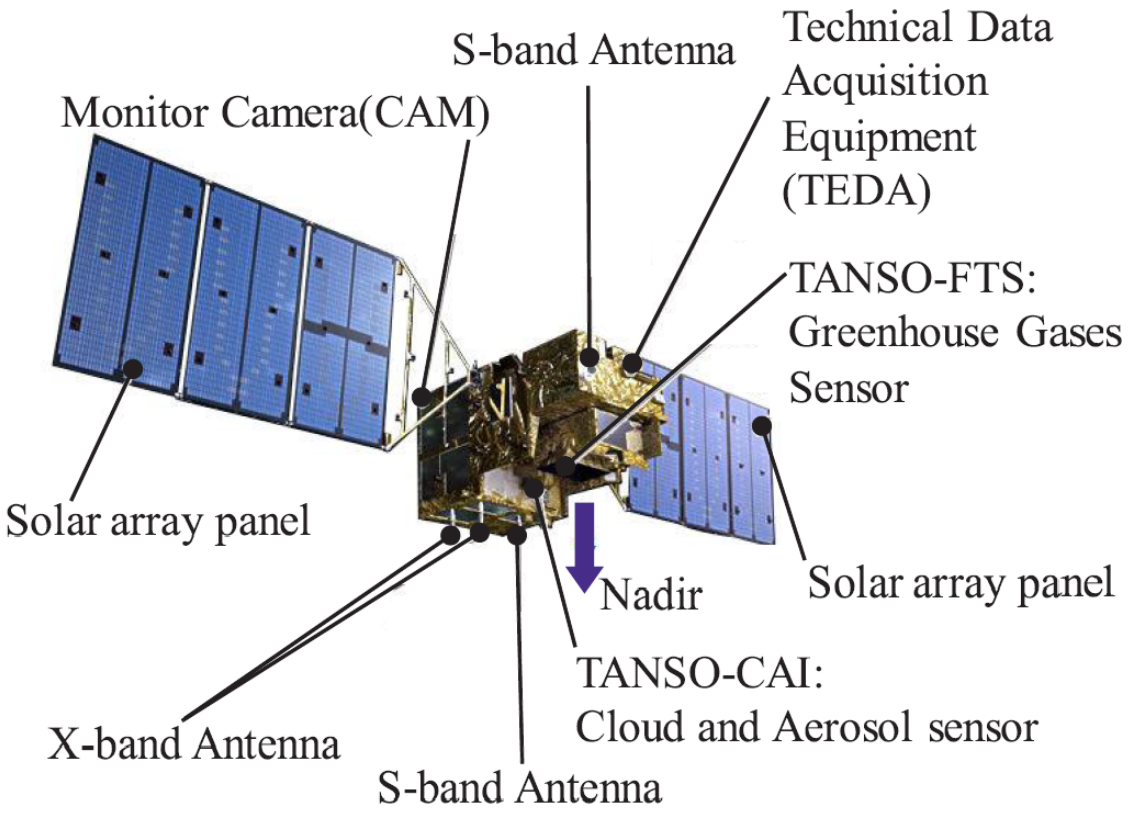
- 太陽電池アレイ表側(太陽が当たる側)と裏側とで温度が異なり、裏側が表側よりも収縮して、アレイがたわむ



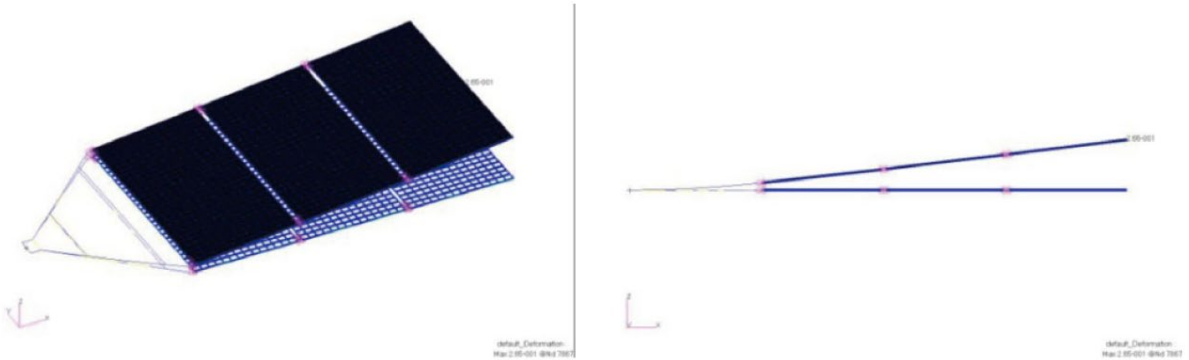
M. Oda, A. Honda, S. Suzuki, and Y. Hagiwara, Vibration of Satellite Solar Array Paddle Caused by Thermal Shock When a Satellite Goes Through the Eclipse, Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics, Chapter 13, DOI: 10.5772/52626, 2012.

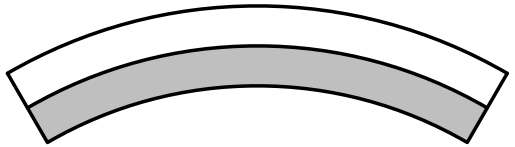
熱誘起振動

★人工衛星が日陰から日照(あるいはその逆)に切り替わる際に起こりやすい



- 太陽電池アレイ表側(太陽が当たる側)と裏側とで温度が異なり、裏側が表側よりも収縮して、アレイがたわむ



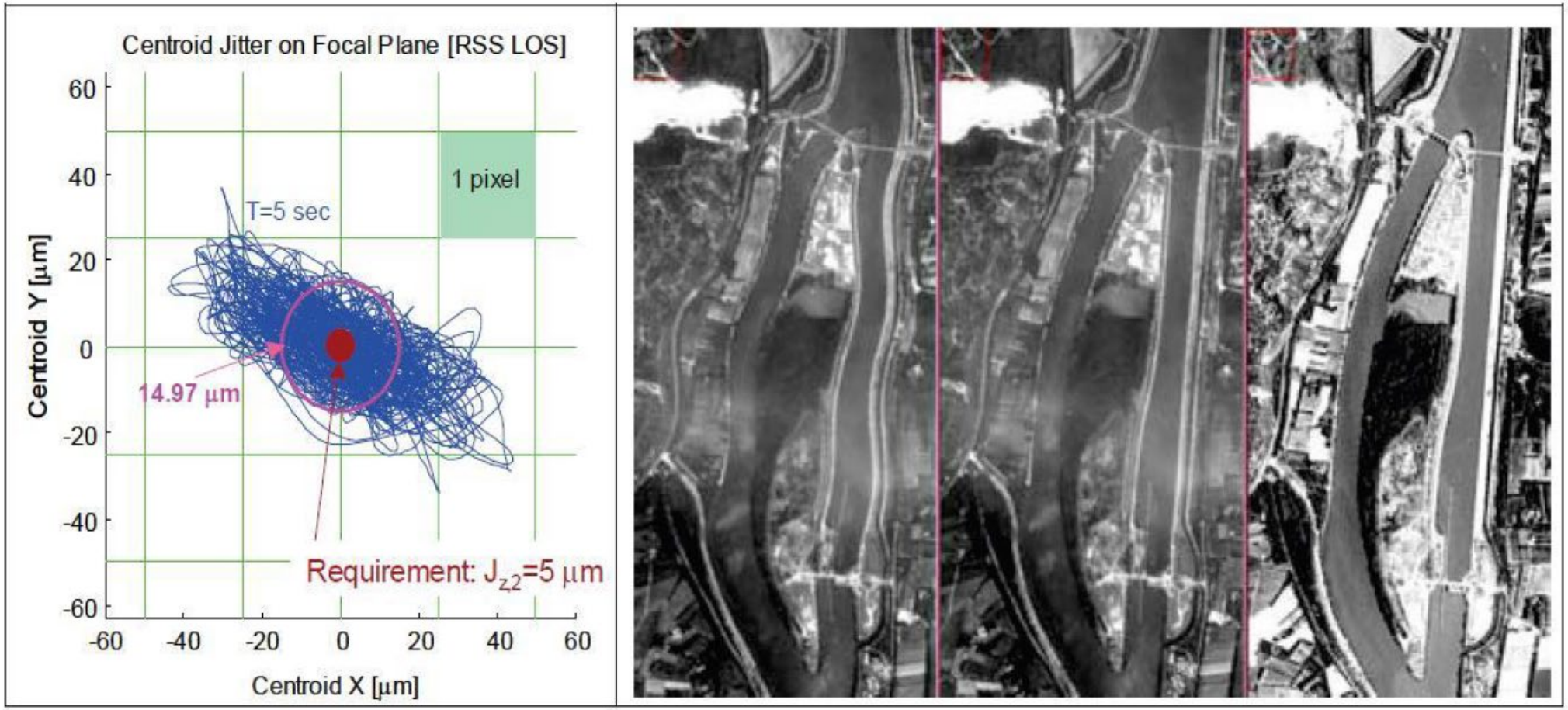


M. Oda, A. Honda, S. Suzuki, and Y. Hagiwara, Vibration of Satellite Solar Array Paddle Caused by Thermal Shock When a Satellite Goes Through the Eclipse, Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics, Chapter 13, DOI: 10.5772/52626, 2012.

Micro Vibration

★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

例えば、露光時間中にカメラがぶれると画像がぼける

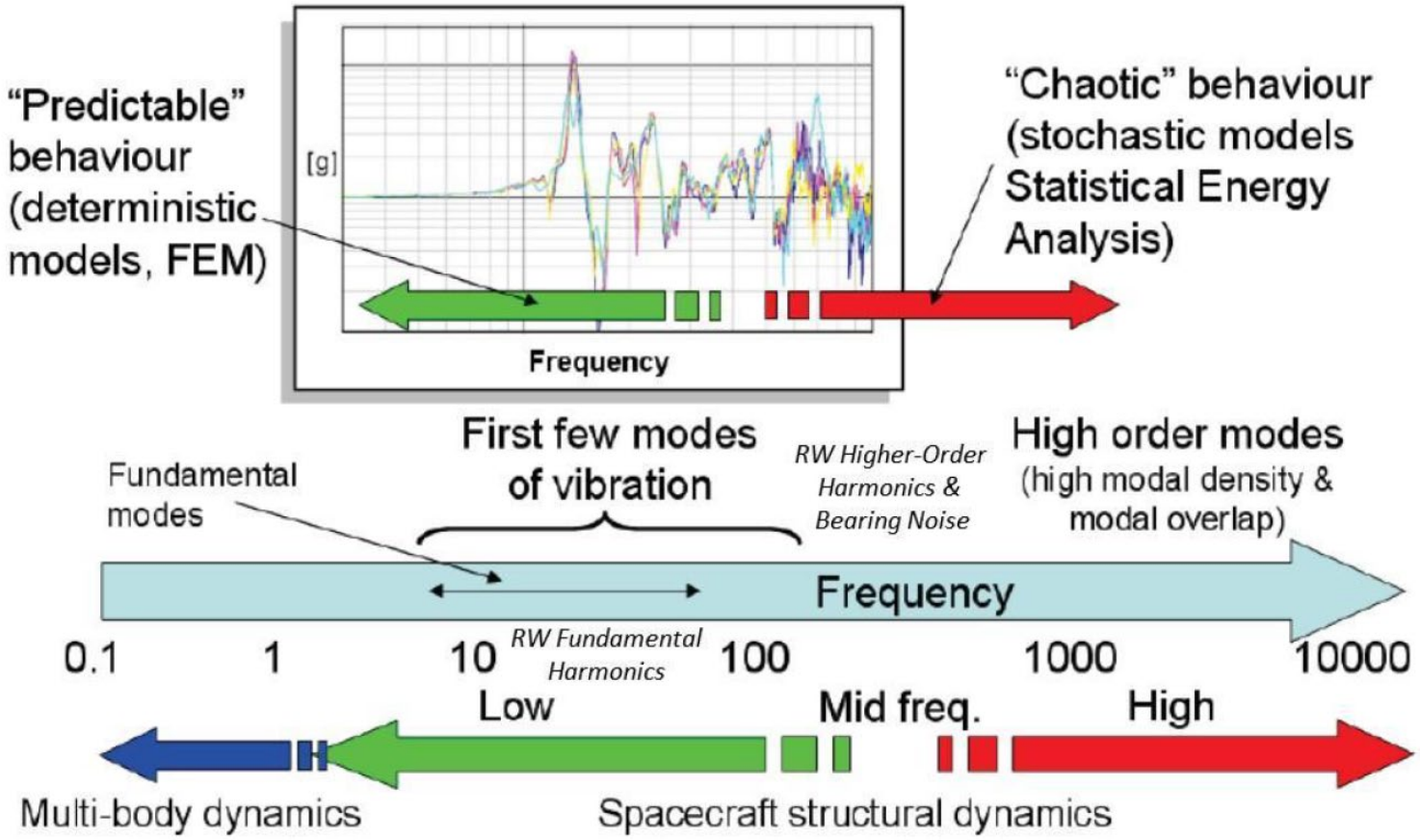


C. Dennehy and O S. Alvarez-Salazar, Spacecraft Micro-Vibration: A Survey of Problems, Experiences, Potential Solutions, and Some Lessons Learned, NASA/TM-2018-220075, 2018.

Micro Vibration

★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

高周波になると、どう振動するか予想するのが困難



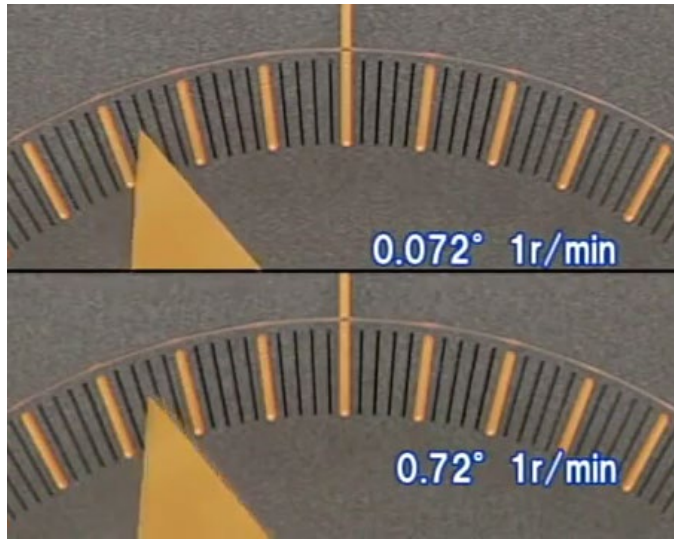
C. Dennehy and O S. Alvarez-Salazar, Spacecraft Micro-Vibration: A Survey of Problems, Experiences, Potential Solutions, and Some Lessons Learned, NASA/TM-2018-220075, 2018.

Micro Vibration

★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

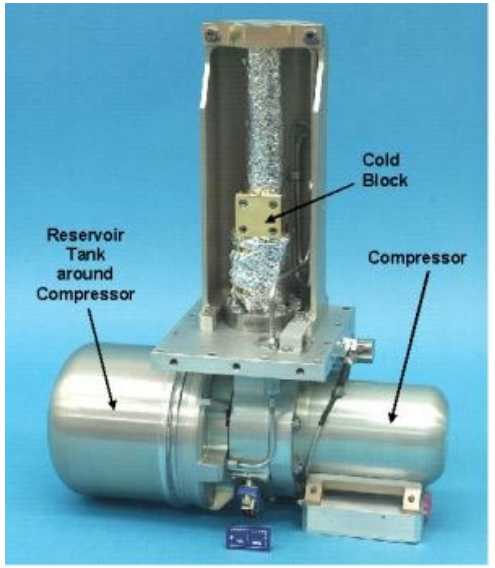
原因は？

1. ステッピングモーターの振動
   - モーターがステップ状に動くので、動くたびに微小な振動が起こる
   - 太陽電池アレイの太陽方向追従、アンテナのポインティング、保持・解放機構の駆動などに用いられることが多い



https://www.youtube.com/watch?v=tRoT3qpndbU&t=44s

2. 冷凍機の振動
   - 赤外線、ガンマ線、X線の検出器など、センサを低温にする必要がある場合に用いられる
   - ガスと液体の相転移を利用していて、熱サイクルになっていて、パーツの回転等により振動が起こる



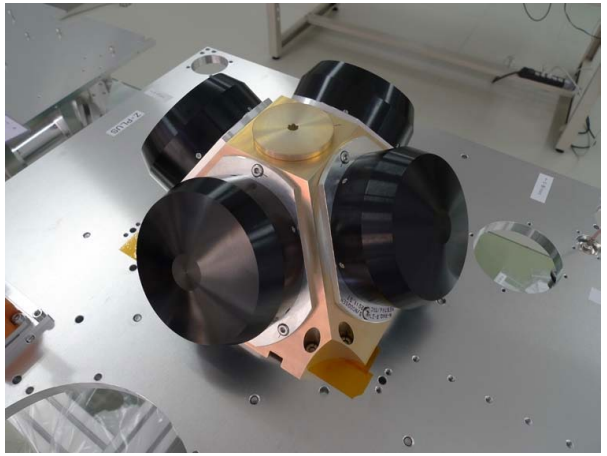
https://blog.bliley.com/top-4-sources-of-microvibration-on-spacecrafts

Micro Vibration

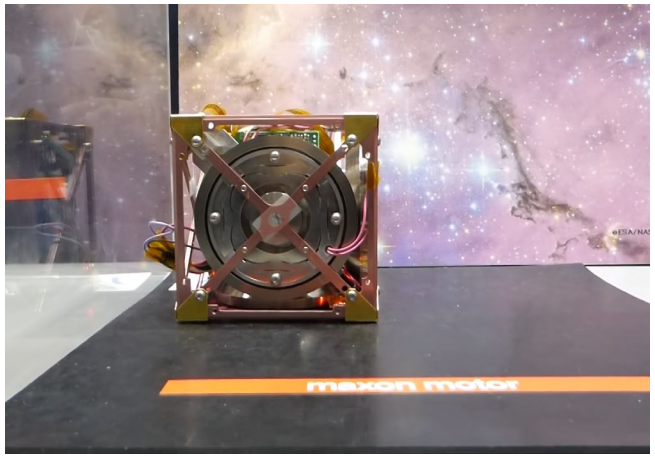
★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

原因は？

3. リアクションホイールの振動
   - 姿勢制御をするための「コマ」のようなもの
   - 「コマ」をモーターで適切に回転させれば，角運動量保存則により、衛星全体の回転が収まる。



http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/nsat/release/120516.html



https://www.youtube.com/watch?v=ZPlQEKHz-D8

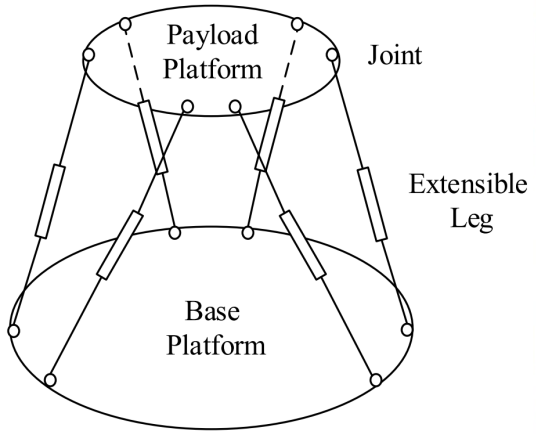
4. その他
   - 電子機器、センサ、機構部品（ジョイント，ヒンジ，ラッチ等）、熱誘起振動、太陽電池アレイ等の振動等

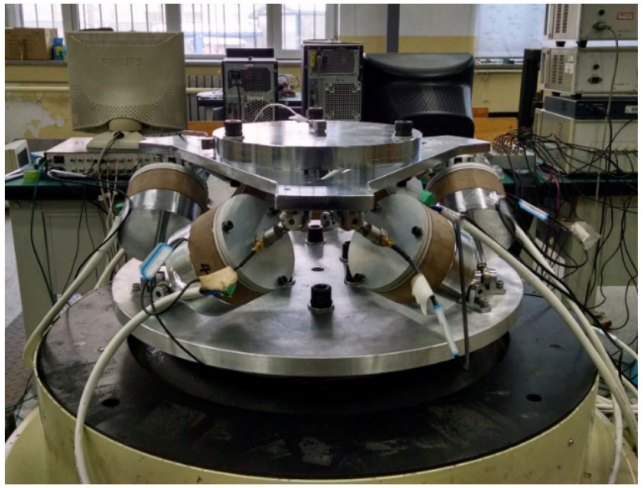
どうやって対策する？

Micro Vibration

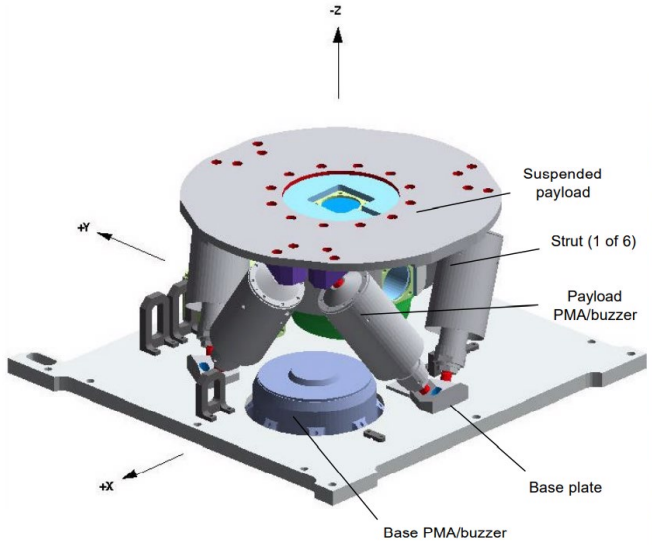
★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

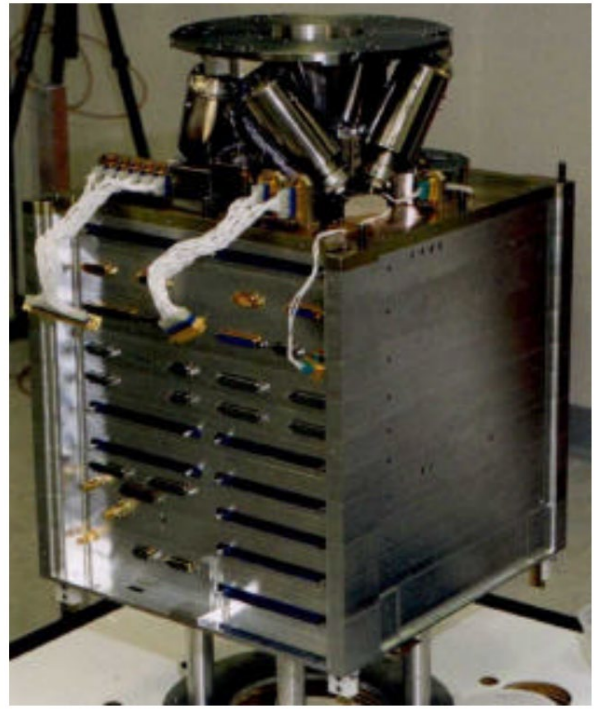
対策は？　⇒　振動絶縁（第8回の講義で学びます）





W. Chi, et.al., Design and Experimental Study of a VCM-Based Stewart
Parallel Mechanism Used for Active Vibration Isolation, Energies 2015, 8, 8001-8019; doi:10.3390/en8088001





E.H. Anderson, et.al., Satellite Ultraquiet Isolation Technology Experiment (SUITE): Electromechanical Subsystems, SPIE Smart Structures and Materials 1999,
https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a451661.pdf

Micro Vibration

★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

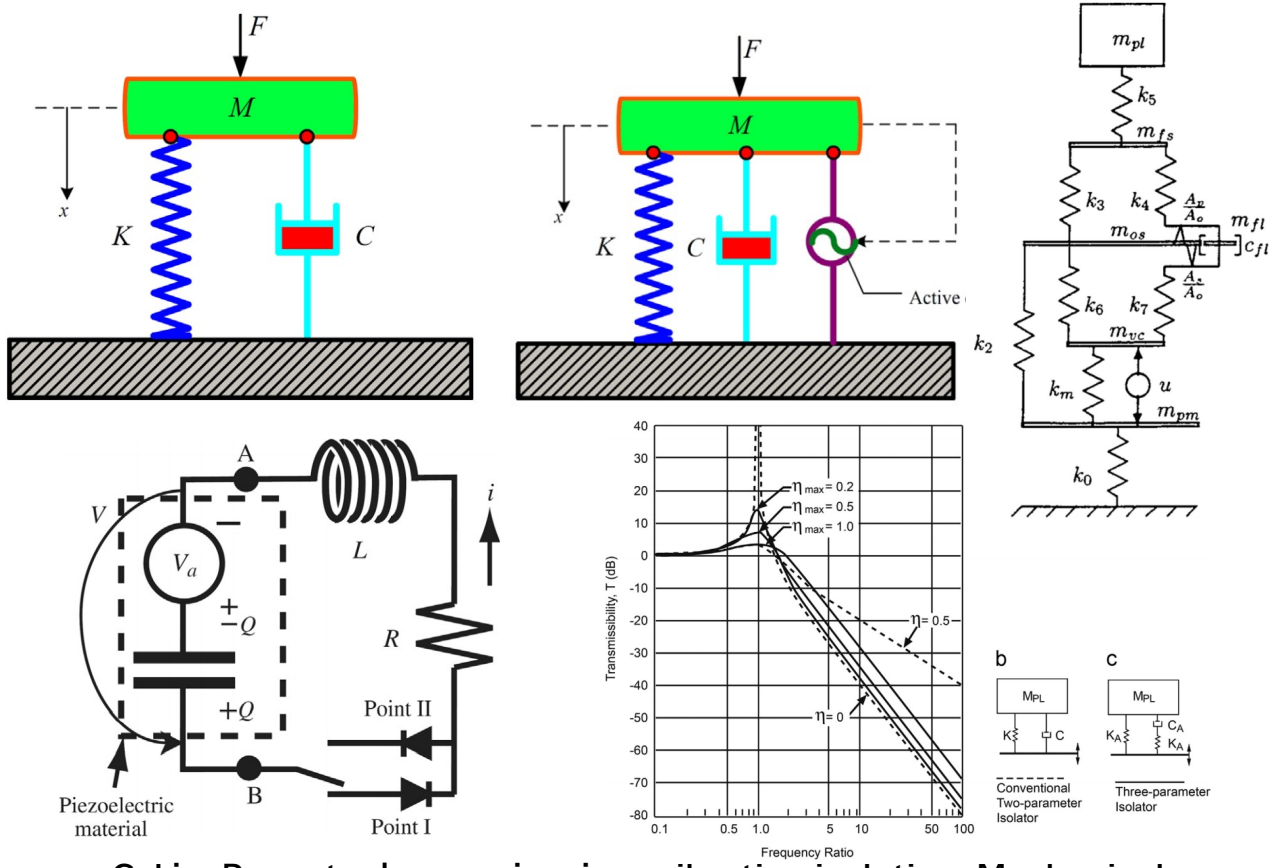
対策は？　⇒　振動絶縁（第8回の講義で学びます）

https://youtu.be/V8sGAispxbo

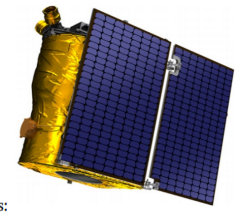
Micro Vibration

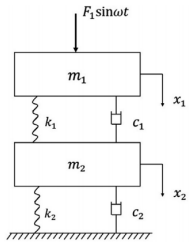
★わずかな振動も高精度な観測の際には問題になる（手振れのようなもの）

対策は？　⇒　振動絶縁（第8回の講義で学びます）



C. Liu, Recent advances in micro-vibration isolation, Mechanical Systems and Signal Processing, 56-57, pp.55-80, 2015.





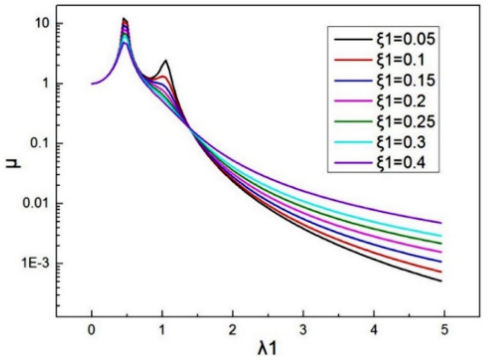


Fig. 5. The transmissibility of force under different ξ_1.

Define two dimensionless parameters:

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \tag{14}$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega}{\omega_2} \tag{15}$$

The damping ratio of each layer is defined as:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_1}} \tag{16}$$

$$\xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{m_2 k_2}} \tag{17}$$

Substitute Eq. (11)–(17) into Eq. (10) and yield:

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + 4\xi_1^2\lambda_1^2 + 4\xi_2^2\lambda_2^2 + 16\xi_1^2\xi_2^2\lambda_1^2\lambda_2^2}{\left[(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2) - \left(\frac{\lambda_2^2}{\alpha} + 4\xi_1\xi_2\lambda_1\lambda_2\right)\right]^2 + 4\left(\xi_1\lambda_1 + \xi_2\lambda_2 - \frac{\alpha+1}{\alpha}\xi_1\lambda_1\lambda_2^2 - \xi_2\lambda_1^2\lambda_2\right)^2}} \tag{18}$$

Define a dimensionless parameter:

$$\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{19}$$

Substitute Eq. (19) into Eq. (18) and the final expression of μ is attained as follows:

$$\mu = \sqrt{\frac{1 + 4\xi_1^2\lambda_1^2 + 4\xi_2^2\beta^2\lambda_1^2 + 16\xi_1^2\xi_2^2\beta^2\lambda_1^4}{\left[(1-\lambda_1^2)(1-\beta^2\lambda_1^2) - \left(\frac{\beta^2\lambda_1^2}{\alpha} + 4\xi_1\xi_2\beta\lambda_1^2\right)\right]^2 + 4\left(\xi_1\lambda_1 + \xi_2\beta\lambda_1 - \frac{\alpha+1}{\alpha}\xi_1\lambda_1\beta^2\lambda_1^2 - \xi_2\lambda_1^2\beta\lambda_1\right)^2}} \tag{20}$$

Fig. 4 shows the transmissibility μ with respect to λ_1 under different α, in which $\beta = 3.5$, $\xi_1 = 0.4$, and c_2 equals to c_1. The attenuation rate becomes faster with the increasing α, but the amplitude of the resonance peak gradually becomes larger. Therefore, the value of α should be designed in consideration of the attenuation rate and the formant amplitude.

S. Chen, Design and experiment of dual micro-vibration isolation system for optical satellite flywheel, International Journal of Mechanical Sciences, 179 (2020), 105592

付録のまとめ

- 人工衛星が伸展マストや太陽電池アレイ(Solar Array)など、柔軟な付属物を有する場合、それら付属物の弾性振動が人工衛星に伝わって、 人工衛星の姿勢が変動し、その変動により, 付属物がさらに振動する、というような連成が起こる。
- 人工衛星が日陰から日照へ、あるいは、日照から日陰へと遷移する際, 搭載物 (特に、太陽に直接照らされる機器) が熱膨張／熱収縮を起こすことで、振動が起こる。この振動は日照 ⇔ 日陰のサイクル毎に起こり、連成振動や部品の疲労を起こす。
- 人工衛星内の機器の微小な振動(Micro Vibration)は、例えば高精度なPointing観測の際のNoiseとなる. Micro Vibrationの原因としては, Solar Array等を駆動するStepping motor、冷凍機、Reaction wheelなどの振動が挙げられる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

2025年5月26日(月)2限

課題

2025年6月1日(日)18時00分締切

[1] 質量40kg、固有振動数90Hzの1自由度系（系１）に、質量4kg、固有振動数40Hzの1自由度系（系２）を連結した２自由度系がある。減衰比が両系とも0.02であると仮定して、系2の質点の2次の共振振動数を求めなさい（0.01Hzの精度で求めること）。

質量比μ、固有振動数比ν、無次元加振振動数ηを

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \tag{7.3.24}$$

と定義すれば，２自由度系の応答倍率は

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)[(\nu^2 - \eta^2)^2 + 4{\zeta_2}^2\nu^2\eta^2] \\ D_2 = (1 + 4{\zeta_1}^2\eta^2)(\nu^2 + 4{\zeta_2}^2\eta^2)\nu^2 \end{cases} \tag{7.3.30}$$

$$\begin{cases} R = (\nu - 4\zeta_1\zeta_2\eta^2)\nu - [1 + (1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = 2(\zeta_1\nu + \zeta_2)\nu\eta - 2[\zeta_1 + (1+\mu)\zeta_2\nu]\eta^3 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第7回　2自由度線形振動系の強制振動

おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第8回　振動絶縁と動吸振器

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第8回の学修目標

★ 振動のアクティブ制振とパッシブ制振について、それぞれ説明できる。

★ 振動絶縁という考え方について説明できる。

★ 振動絶縁を1自由度モデルを用いて説明できる。

★ 振動絶縁の2自由度モデルについて説明できる。

★ 動吸振器について説明できる。

第8回の全体構成

第1章　振動のパッシブな抑制とアクティブな抑制

第2章　振動絶縁の基本的な考え方と課題

第3章　振動絶縁の2自由度モデル（構造減衰が一定の場合）

第4章　振動絶縁の2自由度モデル（粘性減衰比が一定の場合）

第5章　動吸振器

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月2日(月)2限

第8回　振動絶縁と動吸振器

第1章　振動のパッシブな抑制とアクティブな抑制

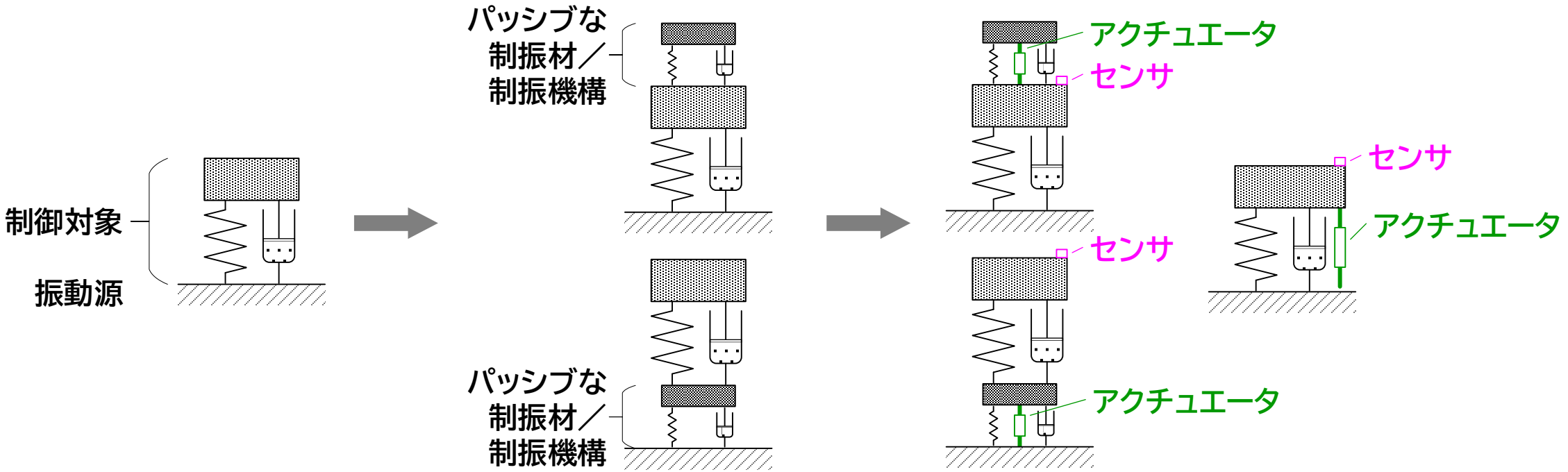
第1章の学修目標

★ アクティブ制振とパッシブ制振について説明できる。

“パッシブ”と“アクティブ”

★状況に応じて力を変化させるのが“アクティブ”な制振

- 制御対象に加える力を（ある範囲内で）自由に制御できる（ようにプログラムできる）のがアクティブな制振
- 一度搭載してしまったら、決まった原理に従って制御力が定まる場合はパッシブな制振



パッシブな制振　　アクティブな制振

“パッシブ”と“アクティブ”

★状況に応じて力を変化させるのが“アクティブ”な制振

https://youtu.be/9_kCrUPEQXI

https://youtu.be/MgZWfRGYtTw

第1章のまとめ

- 運用時に制御対象に加える力を制御できる（プログラムできる）のがアクティブな制振であり、 一度搭載したら決まった原理に従って制御力が決まるのがパッシブな制振である。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月2日(月)2限

第8回　振動絶縁と動吸振器

第2章　振動絶縁の基本的な考え方と課題

第2章の学修目標

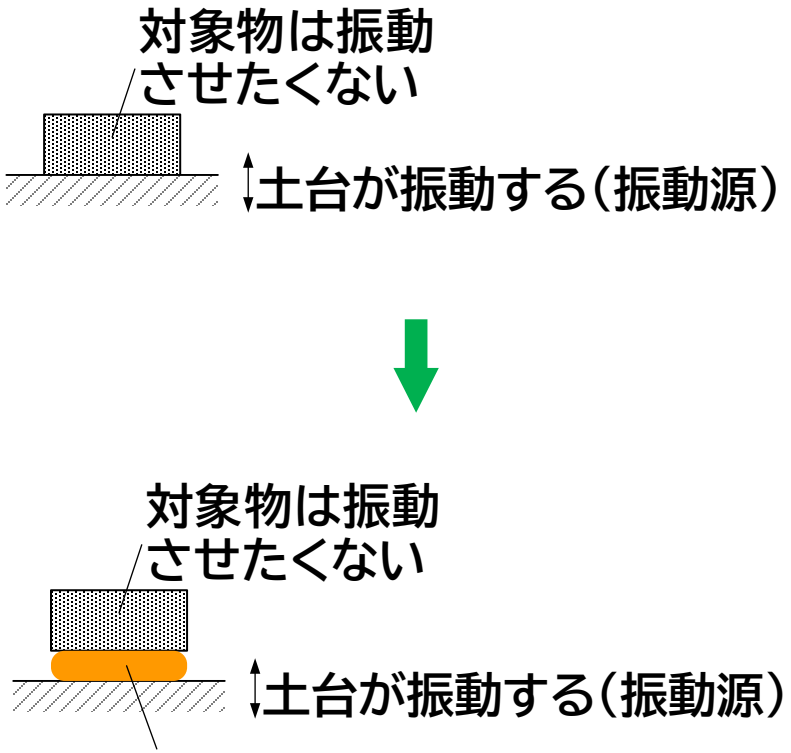
★ 振動絶縁について説明できる。

★ 1自由度モデルを用いた振動絶縁の原理について 説明できる。

★ 振動絶縁の課題について説明できる。

振動絶縁(Vibration isolation)とは

★文字通り、「振動を伝えないようにすること」



- ロケットに搭載された人工衛星
- 人工衛星内に搭載された望遠鏡で起る マイクロバイブレーション
- ドローンに搭載したカメラ
- 地面の上に立てられた建物
- 車(乗り心地、精密機器の運搬)

振動絶縁(Vibration isolation)とは

★文字通り、「振動を伝えないようにすること」

https://youtu.be/reYtUNLXvt8

振動絶縁(Vibration isolation)とは

★文字通り、「振動を伝えないようにすること」

https://youtu.be/reYtUNLXvt8

振動絶縁(Vibration isolation)とは

★文字通り、「振動を伝えないようにすること」

https://youtu.be/nEaTO2twSxc

振動絶縁(Vibration isolation)とは

★文字通り、「振動を伝えないようにすること」

https://youtu.be/dtzALtPqT0E

振動絶縁(Vibration isolation)とは

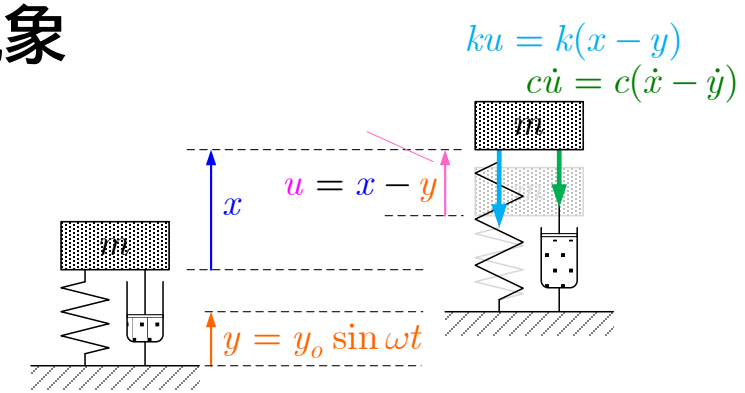
★文字通り、「振動を伝えないようにすること」

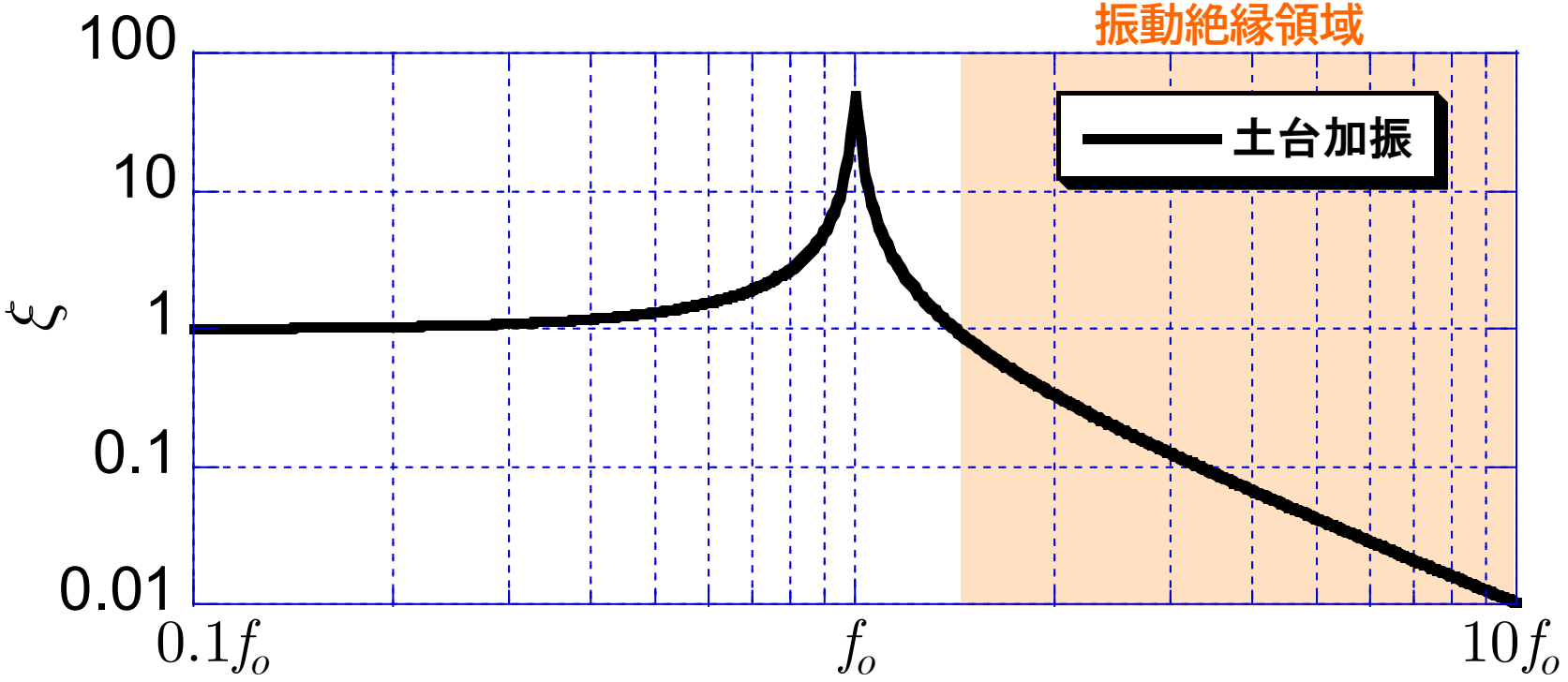
https://youtu.be/B-9xcm-TtfM

振動絶縁の原理

★ポイントは「共振後は振幅比が急激に減少する」という現象

1自由度系の土台加振問題（第5回第3章）





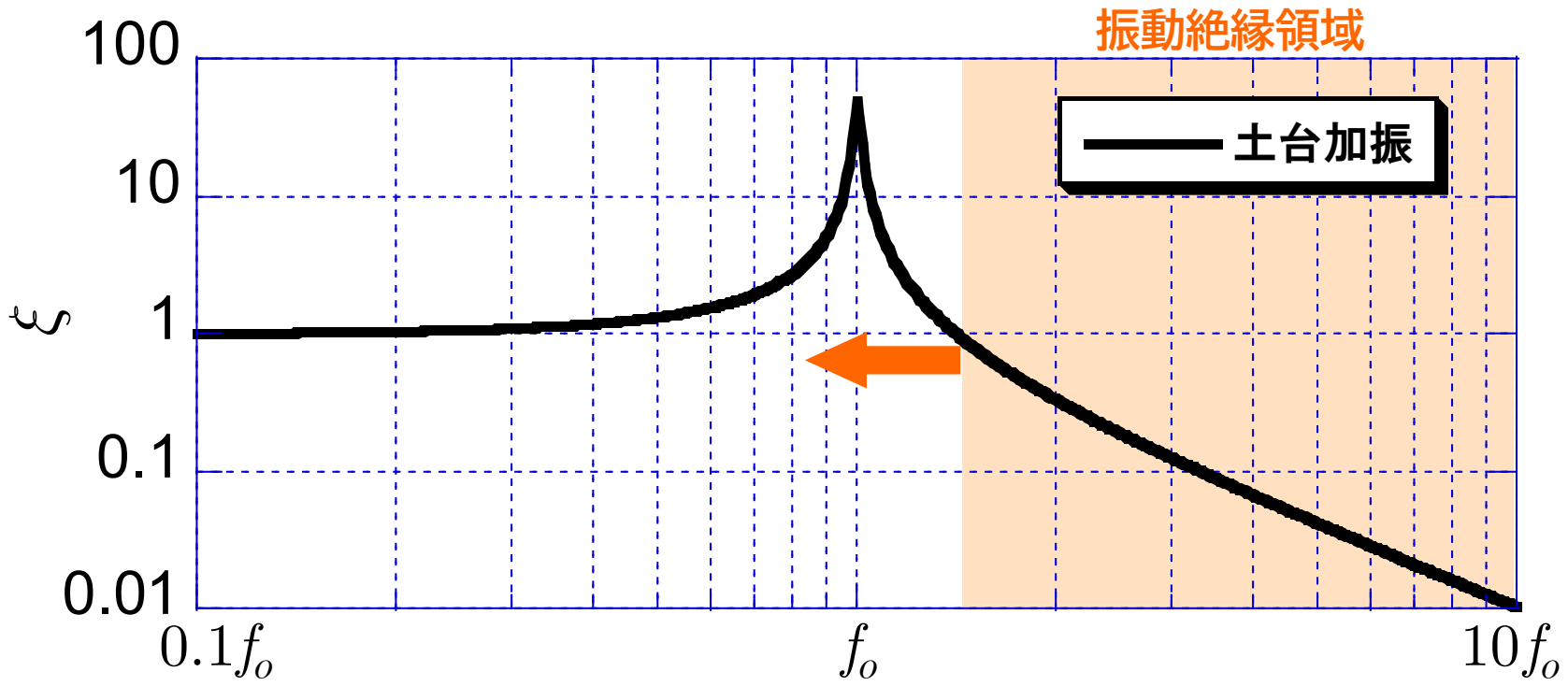
振動絶縁の原理

★ポイントは「共振後は振幅比が急激に減少する」という現象

1自由度系の土台加振問題（第5回第3章）

振動絶縁領域を拡げたい $\Rightarrow f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ を小さくすればいい

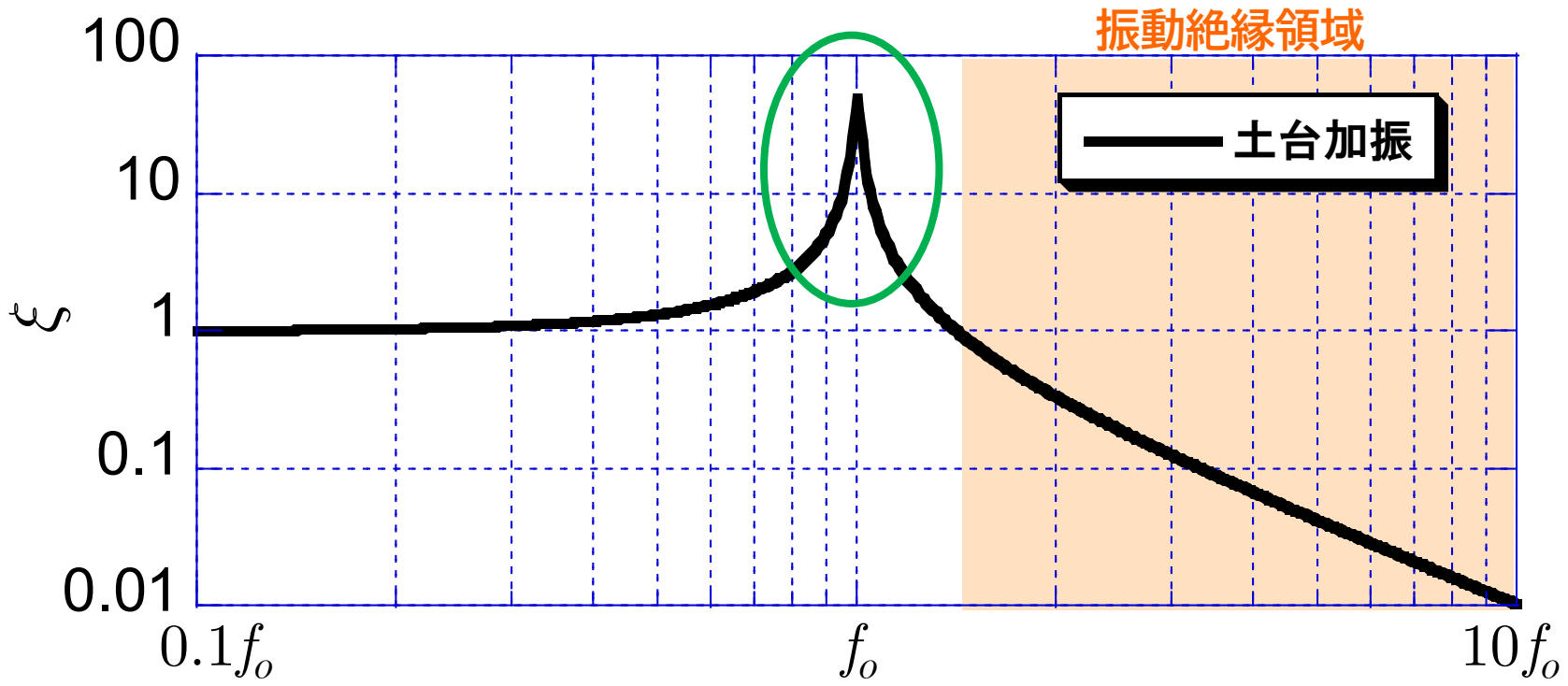
$\Rightarrow$ バネを柔らかくすればいい



振動絶縁の課題

★共振点付近では振動が増幅されてしまう

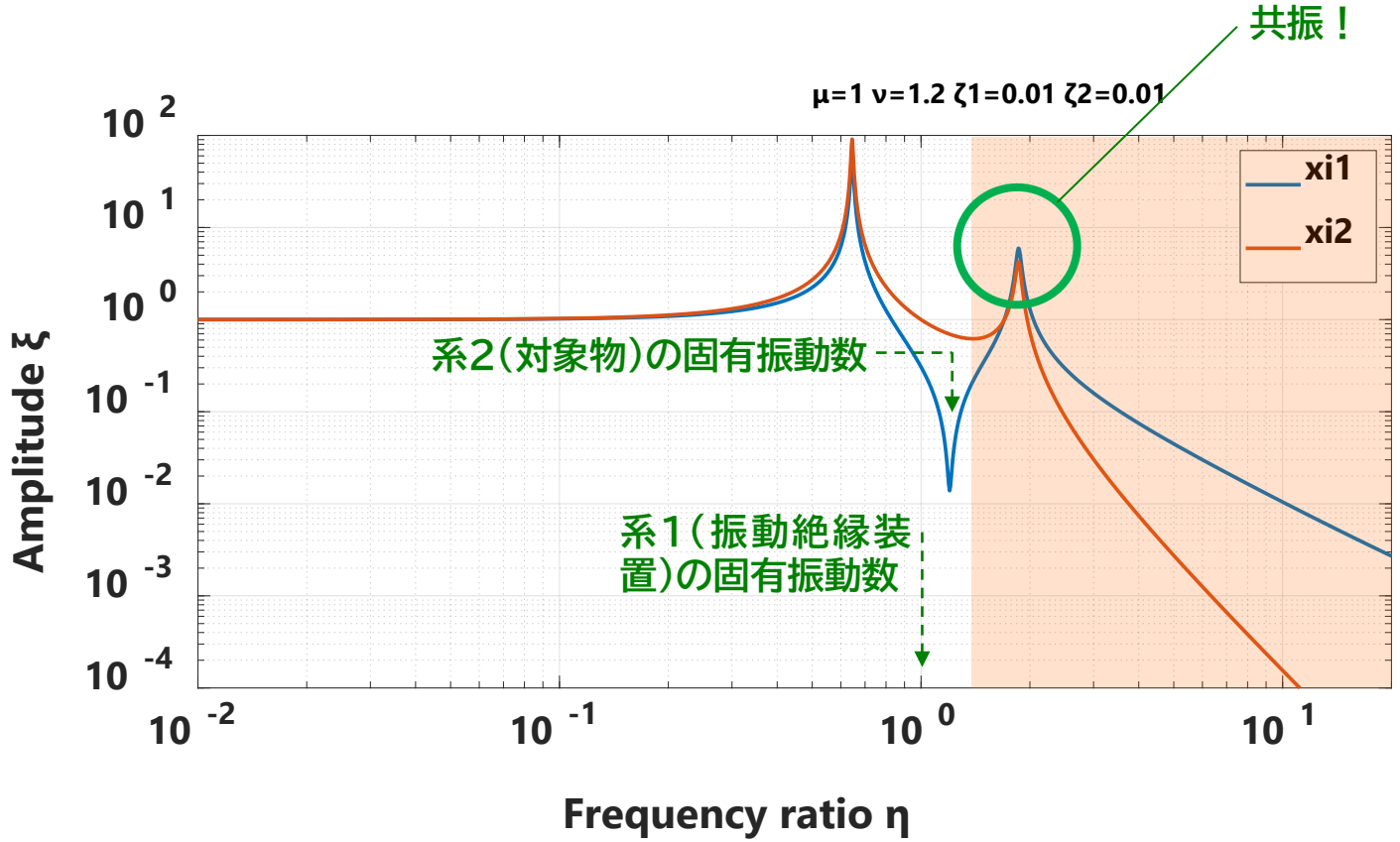
－土台の加振振動数の下限値がわかっていればよいが、低振動数領域でも加振される場合、危険



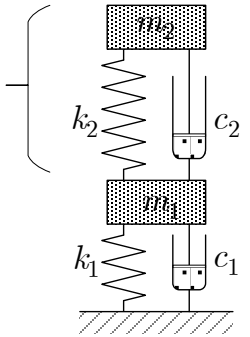
振動絶縁の課題

★共振点付近では振動が増幅されてしまう

- 土台の加振振動数の下限値がわかっていればよいが、低振動数領域でも加振される場合、危険
- 対象物が剛体ではなく、弾性体であって、共振点がずれる可能性があり、振動絶縁領域と思っていた領域で共振が起る可能性がある（それを確認するためには2自由度系で計算する必要がある）。



振動絶縁領域だったはずが・・・



第2章のまとめ

- 振動絶縁とは、振動をさせたくない対象物と振動源との間に何等かのデバイスを配置することで、 振動源の振動を対象物に伝えないようにすることである。
- 振動絶縁は、基本的には、「加振振動数が共振振動数よりも十分に大きい領域（振動絶縁領域）では振幅比（振動伝達率）がきわめて小さくなる」という現象を利用したものである。
- ただし、加振振動数が共振振動数付近になると、共振が起こるので、加振振動数の管理が重要となる。
- また、対象物自身の固有振動数が低い場合には、 振動絶縁領域で共振する可能性があるため、 これについても2自由度系で解析して確認してみるなど、注意が必要である。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月2日(月)2限

第8回　振動絶縁と動吸振器

第3章　振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

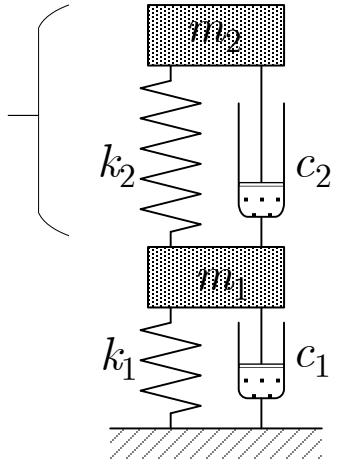
第3章の学修目標

★ 振動絶縁の2自由度モデルについて説明できる。

★ 2自由度モデルを用いた振動絶縁について、 構造減衰係数が一定の場合の最適化方法を説明できる。

振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★系2(対象物)のパラメータを固定して系1(isolator)のパラメータを検討



$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2 + I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2 + I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1} , \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} , \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \tag{7.3.24}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1+{\varepsilon_1}^2)[(\nu^2-\eta^2)^2 + {\varepsilon_2}^2\nu^4] \\ D_2 = (1+{\varepsilon_1}^2)(1+{\varepsilon_2}^2)\nu^4 \end{cases} \tag{7.3.26}$$

$$\begin{cases} R = (1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\nu^2 - [1+(1+\mu)\nu^2]\eta^2 + \eta^4 \\ I = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\nu^2 - [\varepsilon_1 + (1+\mu)\varepsilon_2\nu^2]\eta^2 \end{cases} \tag{7.3.27}$$

対象物(系2) の固有振動数に対する加振振動数の比を$\tilde{\eta}$、isolatorの振動数の比を$\tilde{\nu}$とし、 対象物に対するisolatorの質量の比を$\tilde{\mu}$とすれば、

$$\begin{cases} \tilde{\nu} \equiv \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{\nu} \quad , \quad \tilde{\mu} \equiv \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{\mu} \\ \tilde{\eta} = \dfrac{\omega}{\omega_2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\dfrac{\omega}{\omega_1} = \tilde{\nu}\eta \end{cases} \tag{8.3.1}$$

つまり、

$$\nu = \frac{1}{\tilde{\nu}} \quad , \quad \mu = \frac{1}{\tilde{\mu}} \quad , \quad \eta = \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\nu}} \tag{8.3.2}$$

式(8.3.2)を(7.3.26)および(7.3.27) に代入して整理すると

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\tilde{D}_2}{\tilde{R}^2 + \tilde{I}^2}} \quad , \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{R}^2 + \tilde{I}^2}} \tag{8.3.3}$$

$$\begin{cases} \tilde{D}_1 = \tilde{\mu}(1+{\varepsilon_1}^2)\left[(1-\tilde{\eta}^2)^2 + {\varepsilon_2}^2\right] \\ \tilde{D}_2 = \tilde{\mu}^2\tilde{\nu}^4(1+{\varepsilon_1}^2)(1+{\varepsilon_2}^2) \end{cases} \tag{8.3.4}$$

$$\begin{cases} \tilde{R} = \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) - [1+\tilde{\mu}(1+\tilde{\nu}^2)]\tilde{\eta}^2 + \tilde{\mu}\tilde{\eta}^4 \\ \tilde{I} = \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - [\varepsilon_1\tilde{\mu}\tilde{\nu}^2 + \varepsilon_2(1+\tilde{\mu})]\tilde{\eta}^2 \end{cases} \tag{8.3.5}$$

振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★系2(対象物)のパラメータを固定して系1(isolator)のパラメータを検討

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\tilde{D}_2}{\tilde{R}^2 + \tilde{I}^2}} \quad , \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{\tilde{D}_1}{\tilde{R}^2 + \tilde{I}^2}} \tag{8.3.3}$$

$$\begin{cases} \tilde{D}_1 = \tilde{\mu}(1+{\varepsilon_1}^2)\left[(1-\tilde{\eta}^2)^2 + {\varepsilon_2}^2\right] \\ \tilde{D}_2 = \tilde{\mu}^2\tilde{\nu}^4(1+{\varepsilon_1}^2)(1+{\varepsilon_2}^2) \end{cases} \tag{8.3.4}$$

$$\begin{cases} \tilde{R} = \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) - [1+\tilde{\mu}(1+\tilde{\nu}^2)]\tilde{\eta}^2 + \tilde{\mu}\tilde{\eta}^4 \\ \tilde{I} = \tilde{\mu}\tilde{\nu}^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - [\varepsilon_1\tilde{\mu}\tilde{\nu}^2 + \varepsilon_2(1+\tilde{\mu})]\tilde{\eta}^2 \end{cases} \tag{8.3.5}$$

ここで, バネ定数の比を

$$\tilde{\kappa} \equiv \frac{k_1}{k_2} \tag{8.3.6}$$

と定義すると,

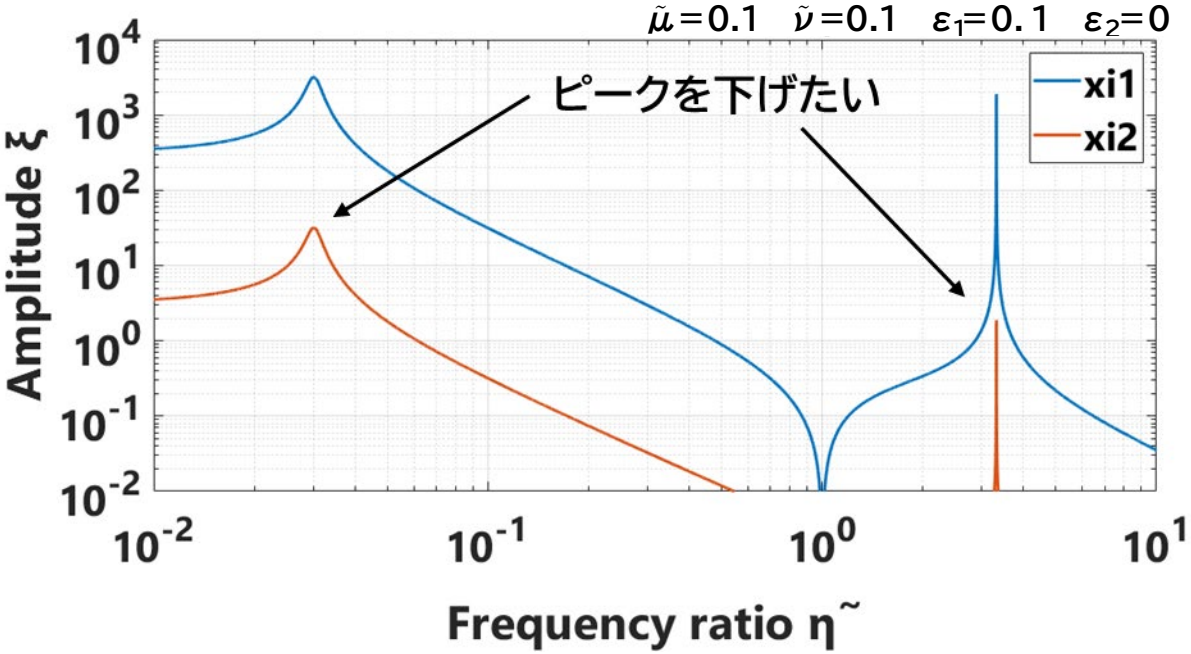
$$\tilde{\mu}\tilde{\nu}^2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{k_1 / m_1}{k_2 / m_2} = \frac{k_1}{k_2} = \tilde{\kappa} \tag{8.3.7}$$

となるので,

$$\begin{cases} \tilde{D}_1 = \tilde{\mu}(1+{\varepsilon_1}^2)\left[(1-\tilde{\eta}^2)^2 + {\varepsilon_2}^2\right] \\ \tilde{D}_2 = \tilde{\kappa}^2(1+{\varepsilon_1}^2)(1+{\varepsilon_2}^2) \end{cases} \tag{8.3.8}$$

$$\begin{cases} \tilde{R} = \tilde{\kappa}(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) - [1+\tilde{\mu}+\tilde{\kappa}]\tilde{\eta}^2 + \tilde{\mu}\tilde{\eta}^4 \\ \tilde{I} = \tilde{\kappa}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - [\varepsilon_1\tilde{\kappa} + \varepsilon_2(1+\tilde{\mu})]\tilde{\eta}^2 \end{cases} \tag{8.3.9}$$

対象物の共振を最もよく抑えられる（ξ_2 の最大値を最も小さくできる）$\tilde{\nu}$ や $\tilde{\mu}$ や ε_1 は？



振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★系2(対象物)のパラメータを固定して系1(isolator)のパラメータを検討

与えられた質量、剛性のもとで、対象物の減衰が0という最悪条件($\varepsilon_2 = 0$)で、 isolatorの最適な$(\tilde{\nu}, \tilde{\mu}, \varepsilon_1)$を求めたい。この場合、

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\tilde{\kappa}^2(1+{\varepsilon_1}^2)}{\left\{\tilde{\kappa}-[1+\tilde{\mu}+\tilde{\kappa}]\tilde{\eta}^2+\tilde{\mu}\tilde{\eta}^4\right\}^2+\left\{\tilde{\kappa}\varepsilon_1-\varepsilon_1\tilde{\kappa}\tilde{\eta}^2\right\}^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+{\varepsilon_1}^2}{\left[1-\tilde{\eta}^2-\frac{1+\tilde{\mu}(1-\tilde{\eta}^2)}{\tilde{\kappa}}\tilde{\eta}^2\right]^2+{\varepsilon_1}^2(1-\tilde{\eta}^2)^2}} \tag{8.3.10}$$

となるので、$\tilde{\kappa}$が小さいほど、また、$\tilde{\mu}$が大きくなるほどξ_2は小さくなることがわかる。 つまり、isolatorのバネ定数は小さく、質量は大きくした方がいい(第1章の動画がまさにそうだった。

ただし、実際には、m_1には上限値が、k_1には下限値があるであろう(多分、m_1はできるだけ小さくしたいだろうし, せめて、m_2よりは小さくしたいだろう)。

そこで、これらは固定、すなわち、$\tilde{\mu}$と$\tilde{\kappa}$は固定するとして、共振点でのξ_2 の値が最も小さくなるε_1を見つけることとする。

まず、共振点では、$\partial\xi_2 \,/\, \partial\omega = 0$。つまり、

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \tilde{\eta}} = 0 \tag{8.3.11}$$

さらに、最適なε_1ということで、このとき、

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \varepsilon_1} = 0 \tag{8.3.12}$$

したがって、これら2つの式の左辺を実際に計算して、$\tilde{\eta}$とε_1の連立方程式として解けばよい。実際に解くと・・・

振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★系2(対象物)のパラメータを固定して系1(isolator)のパラメータを検討

$\tilde{\mu} < 1$、すなわち、$m_1 < m_2$ の場合、

$$q \equiv 1 - \tilde{\mu} + 2\tilde{\kappa} \tag{8.3.13}$$

として、最適な構造減衰係数 ${\varepsilon_1}^*$ は

$${\varepsilon_1}^* = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2 + 4\tilde{\mu}}}{\tilde{\kappa}} - 1} \tag{8.3.14}$$

となる。そして、そのときの無次元共振振動数 $\tilde{\eta}^*$ と共振倍率 ${\xi_2}^*$ は、

$$\tilde{\eta}^* = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{q^2 + 4\tilde{\mu}} + q}} \tag{8.3.14}$$

$${\xi_2}^* = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4\tilde{\mu}}}{2} \tag{8.3.16}$$

これらの式からも、$\tilde{\kappa}$ は小さいほど、すなわち、系1のバネ定数が小さいほど、ξ_2^* は小さくなることがわかる。

https://youtu.be/reYtUNLXvt8

なお, $\tilde{\mu} < 1$のとき、

$$q > 2\tilde{\kappa} \tag{8.3.17}$$

となるので、

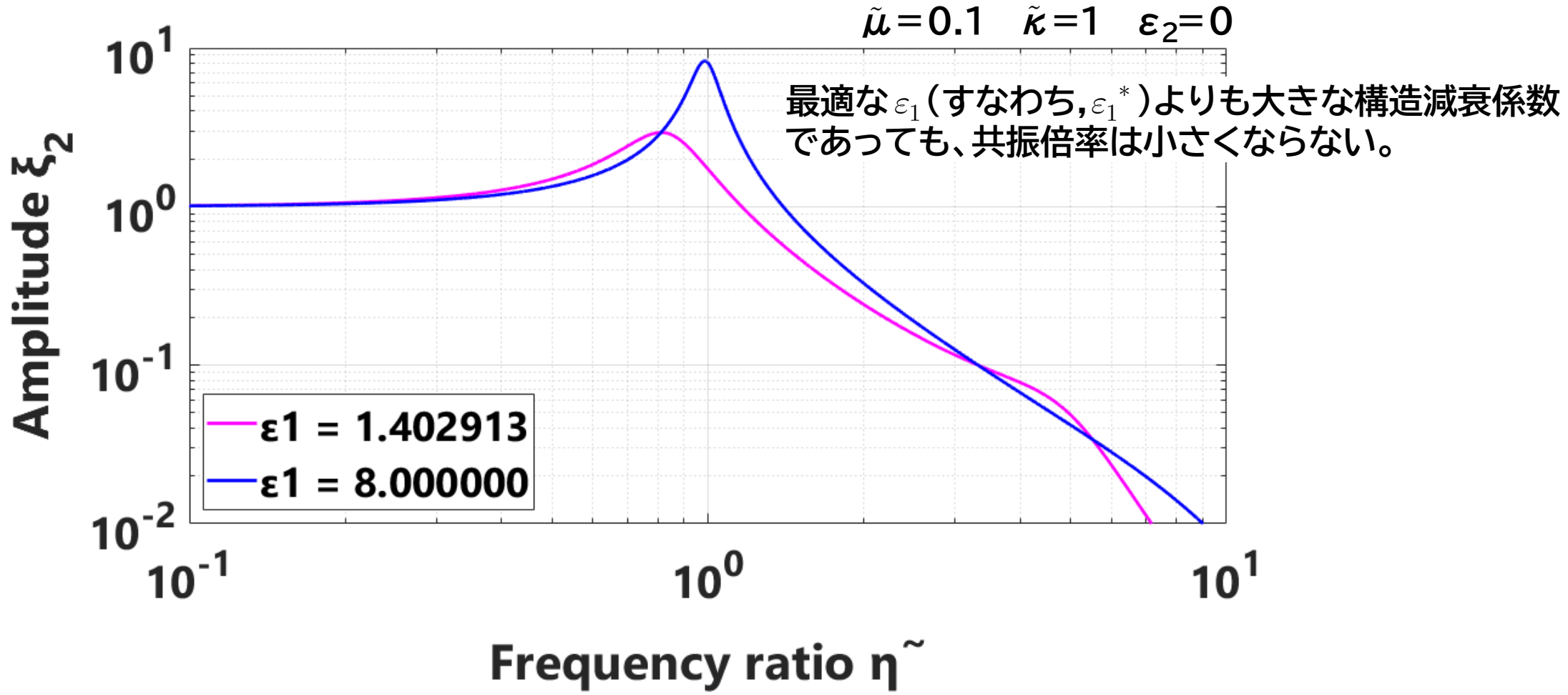
$$\varepsilon_1^* > \sqrt{\frac{\sqrt{4\tilde{\kappa}^2 + 4\tilde{\mu}}}{\tilde{\kappa}} - 1} > \sqrt{\frac{\sqrt{4\tilde{\kappa}^2}}{\tilde{\kappa}} - 1} = 1 \tag{8.3.18}$$

となり、かなり大きな構造減衰係数でないと最適にならないことがわかる。

振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

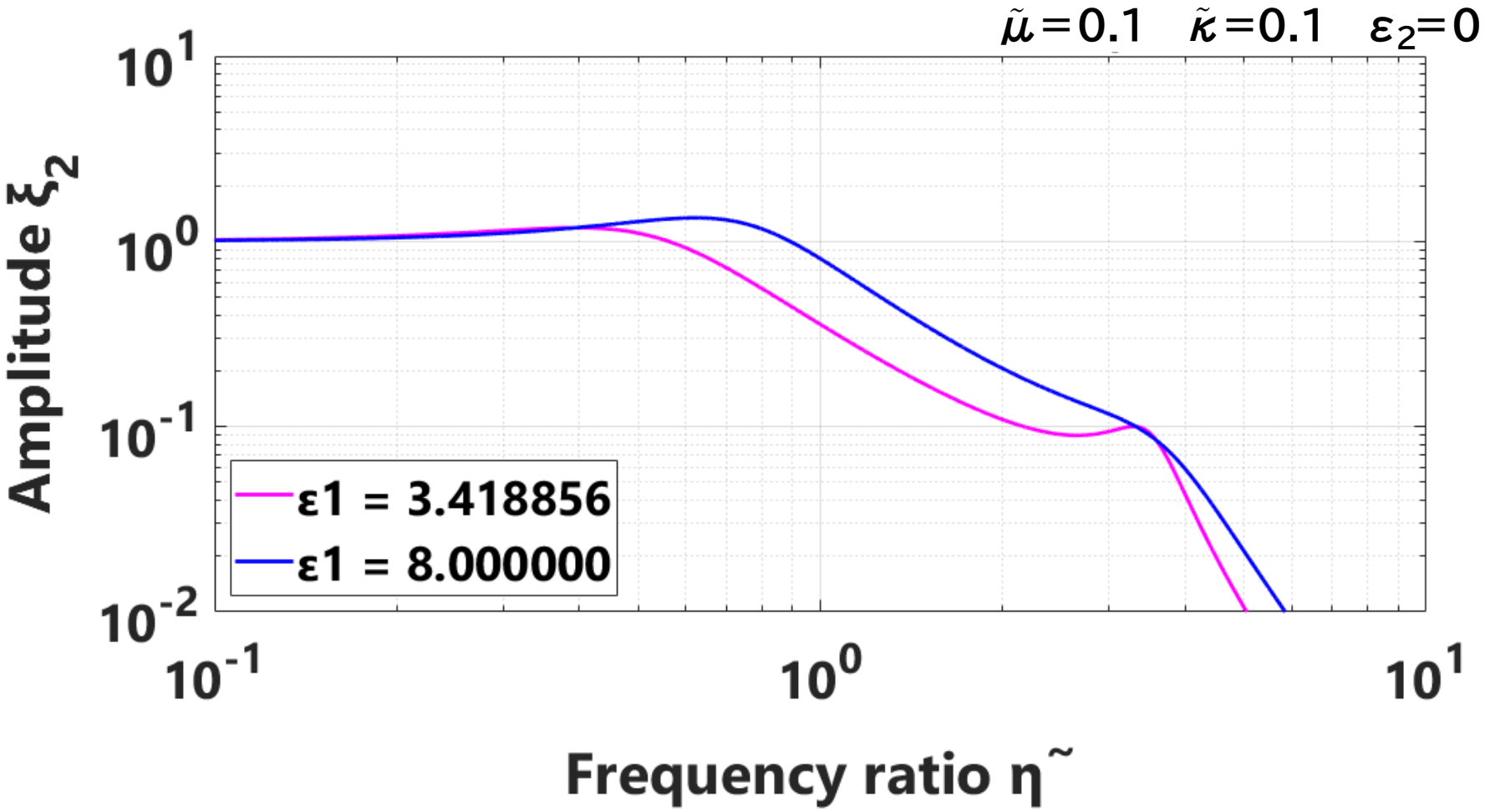
バネ剛性が同程度であると、最適な場合とそうでない場合との差は顕著



振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

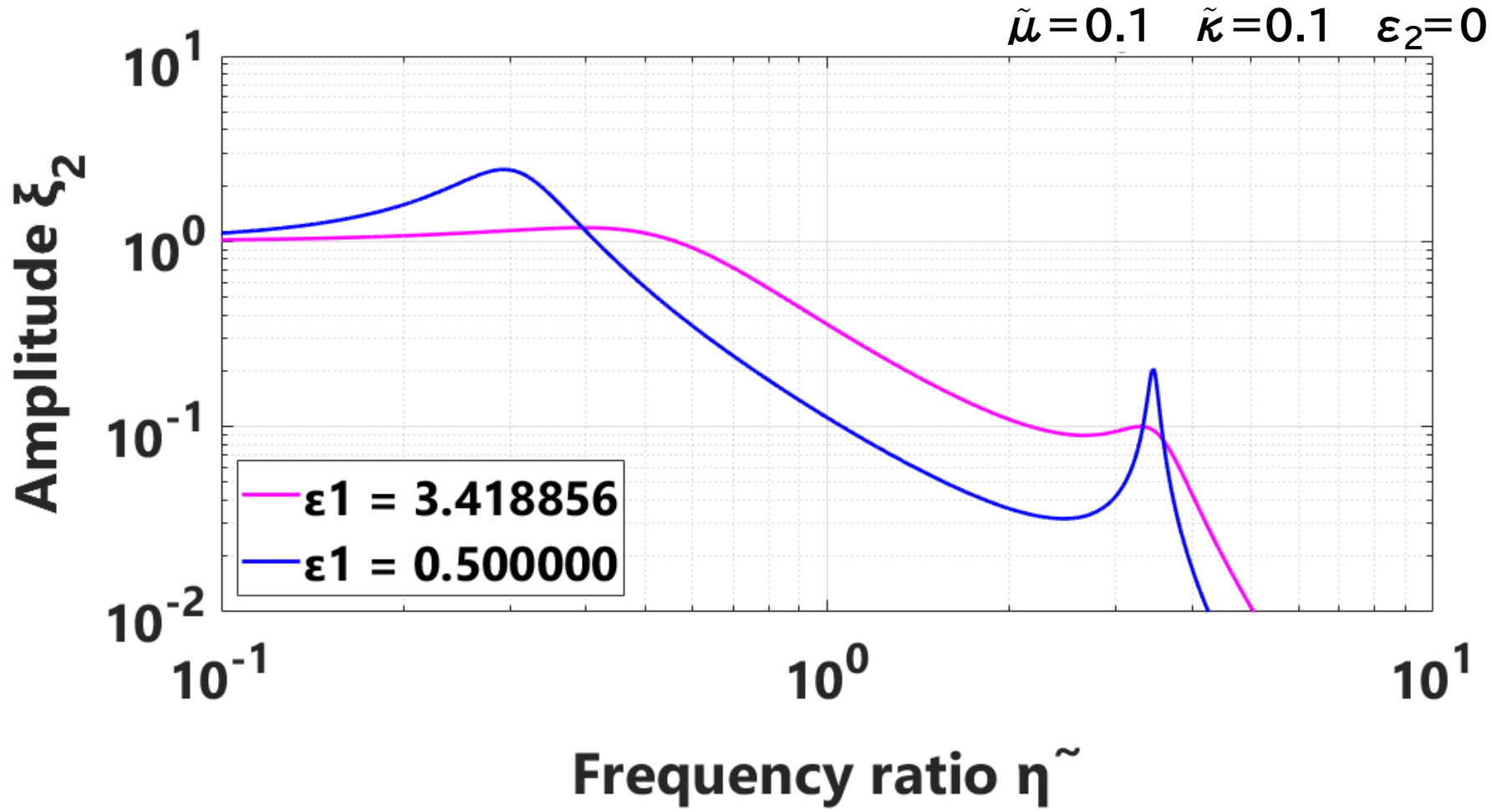
バネ剛性が小さい(isolatorが柔らかい)と, どちらの場合も応答倍率は小さくなる



振動絶縁の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

とはいえ、構造減衰係数が小さいと、共振倍率は高い



第3章のまとめ

- 振動絶縁の対象物が剛体ではなく弾性体の場合、isolator(振動絶縁装置)と対象物を それぞれバネ・マス・ダンパ系1および2でモデル化した2自由度系を用いて振動絶縁性能を評価できる。
- 具体的には、対象物(系2)の共振倍率を下げるように、isolator(系1)の減衰や固有振動数を調整(設計)するとよい。
- 系1、2の質量や固有振動数が固定の場合で、 系2の減衰が0という最悪な場合で、系1の構造減衰係数が加振振動数に依存しない場合、共振倍率を最小化する最適な構造減衰係数が存在する。
- isolatorの質量が小さい場合、isolatorのバネ定数を小さくすると、共振倍率を下げることができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月2日(月)2限

第8回　振動絶縁と動吸振器

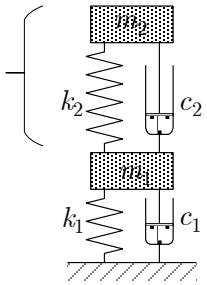
第4章　振動絶縁の2自由度モデル(粘性減衰比が一定の場合)

第4章の学修目標

★ 2自由度モデルを用いた振動絶縁について、 粘性減衰比が一定の場合の最適化方法を説明できる。

振動絶縁の2自由度モデル(粘性減衰比が一定の場合)

★系2(対象物)のパラメータを固定して系1(isolator)のパラメータを検討



構造減衰係数と粘性減衰比との関係は

$$\varepsilon_1 = 2\zeta_1\eta = 2\zeta_1\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\nu}} \tag{8.4.1}$$

$$\varepsilon_2 = 2\zeta_2\nu\eta = 2\zeta_2\frac{1}{\tilde{\nu}}\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\nu}} = 2\zeta_2\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\nu}^2} \tag{8.4.2}$$

であり、 粘性減衰比が加振振動数に依らず一定である場合に共振倍率が最小としたい場合、最悪条件である, $\zeta_2 = 0$ で考えると、結局、第3章で求めた式(8.3.10)

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1+{\varepsilon_1}^2}{\left\{1-\tilde{\eta}^2-\frac{1+\tilde{\mu}(1-\tilde{\eta}^2)}{\tilde{\kappa}}\tilde{\eta}^2\right\}^2+{\varepsilon_1}^2(1-\tilde{\eta}^2)^2}} \tag{8.3.10}$$

に式(8.4.1)を代入したものを、$\hat{\xi}_2$ とすれば、

$$\frac{\partial\hat{\xi}_2}{\partial\tilde{\eta}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\hat{\xi}_2}{\partial\zeta_1} = 0 \tag{8.4.3}$$

を連立すればよいが、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{\xi}_2}{\partial\tilde{\eta}} = \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\tilde{\eta}} + \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon_1}\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial\zeta_1} = \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\tilde{\eta}} + \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon_1}\dfrac{2\zeta_2}{\tilde{\nu}^2} = 0 \\ \dfrac{\partial\hat{\xi}_2}{\partial\zeta_1} = \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon_1}\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial\zeta_1} = \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon_1}\dfrac{2\tilde{\eta}}{\tilde{\nu}^2} = 0\end{cases} \tag{8.4.4}$$

であるので、結局、次式を解くのと同じ。

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial\tilde{\eta}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\xi_2}{\partial\varepsilon_1} = 0 \tag{8.4.5}$$

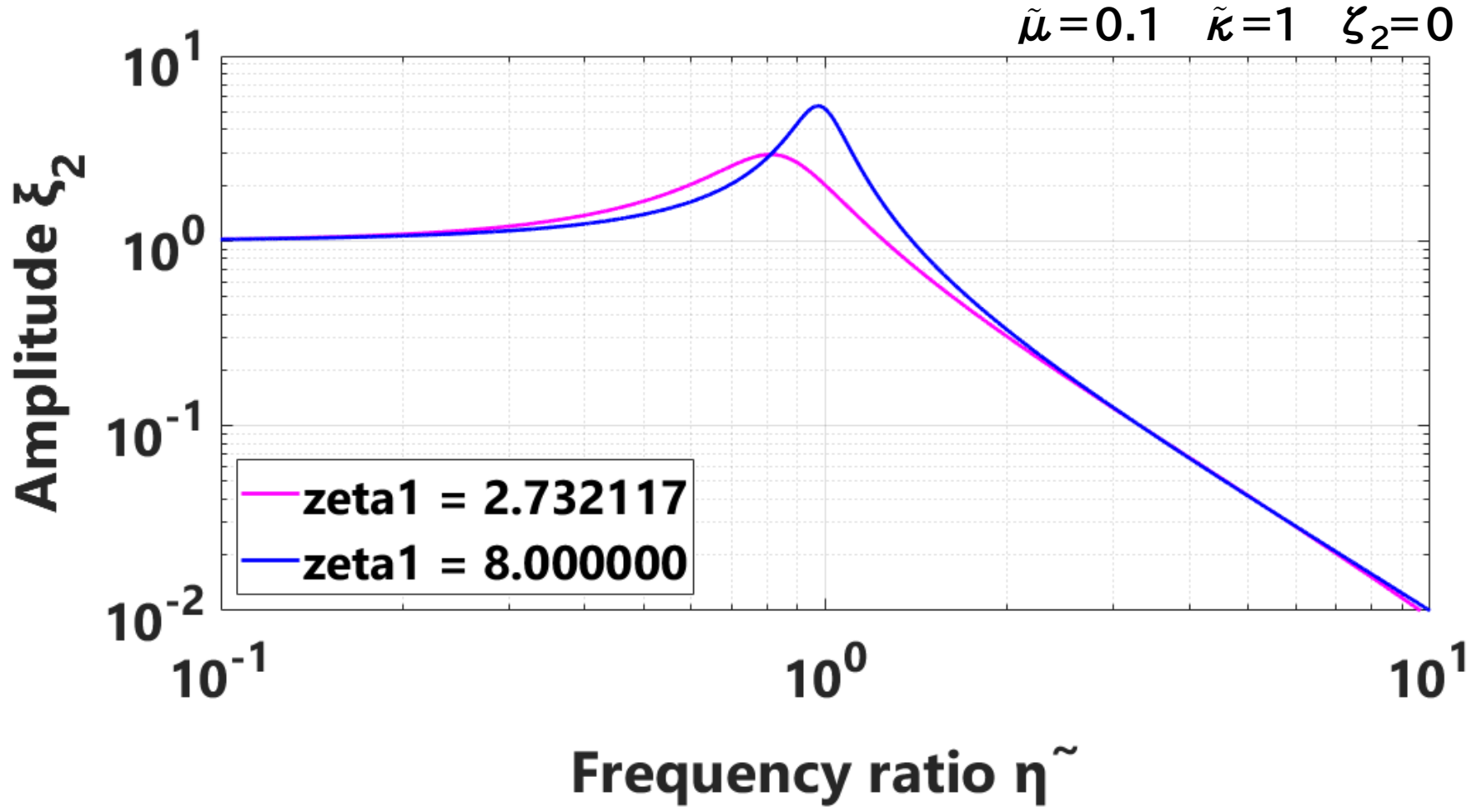
つまり、第3章で求めた最適解の式(8.3.13)～(8.3.16) に式(8.4.1)を代入すればよい。

$${\zeta_1}^* = \frac{\tilde{\nu}{\varepsilon_1}^*}{2\tilde{\eta}^*} \tag{8.4.6}$$

振動絶縁の2自由度モデル(粘性減衰比が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

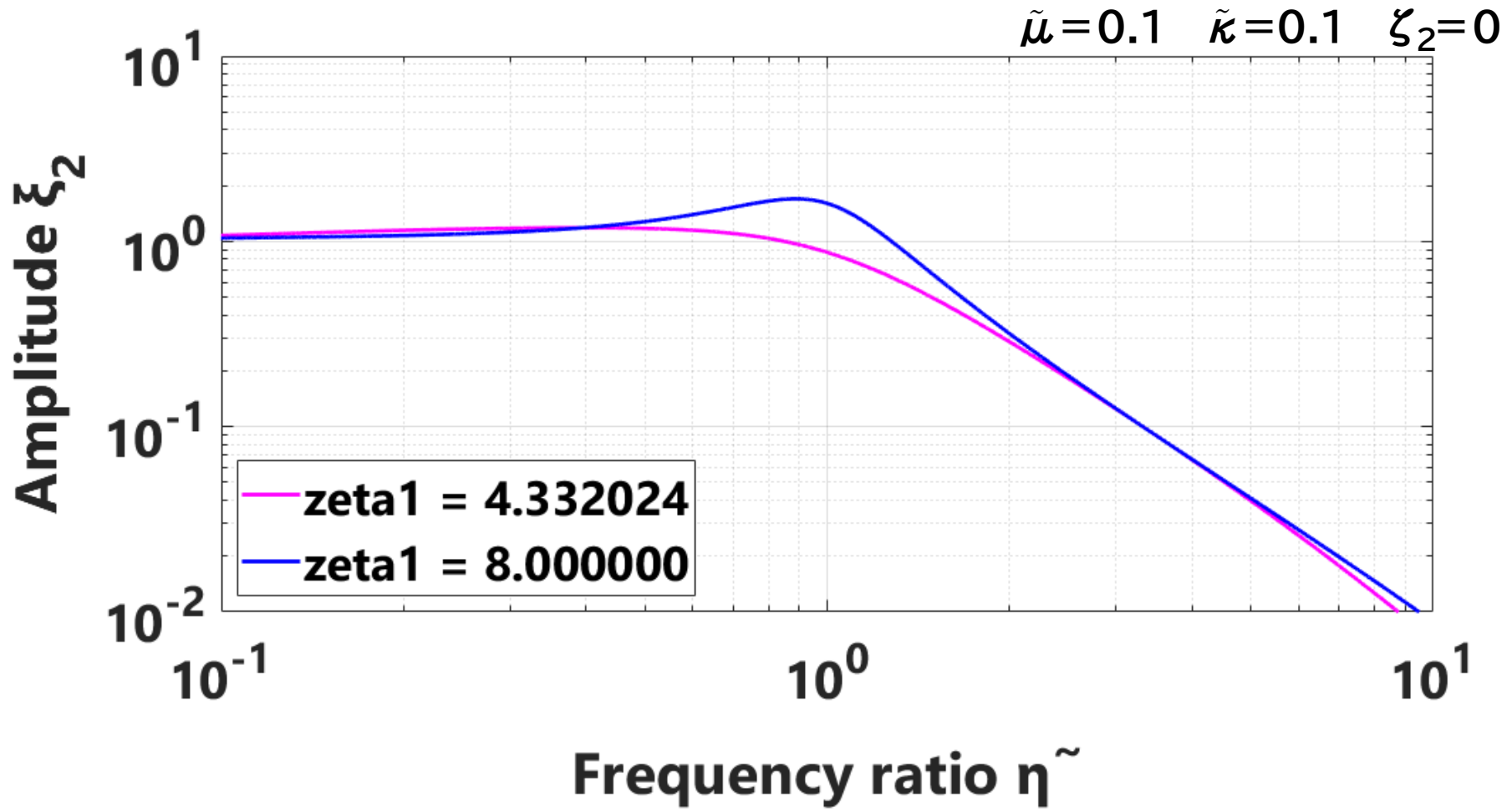
バネ剛性が同程度であると、最適な場合とそうでない場合との差はある程度ある



振動絶縁の2自由度モデル(粘性減衰比が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

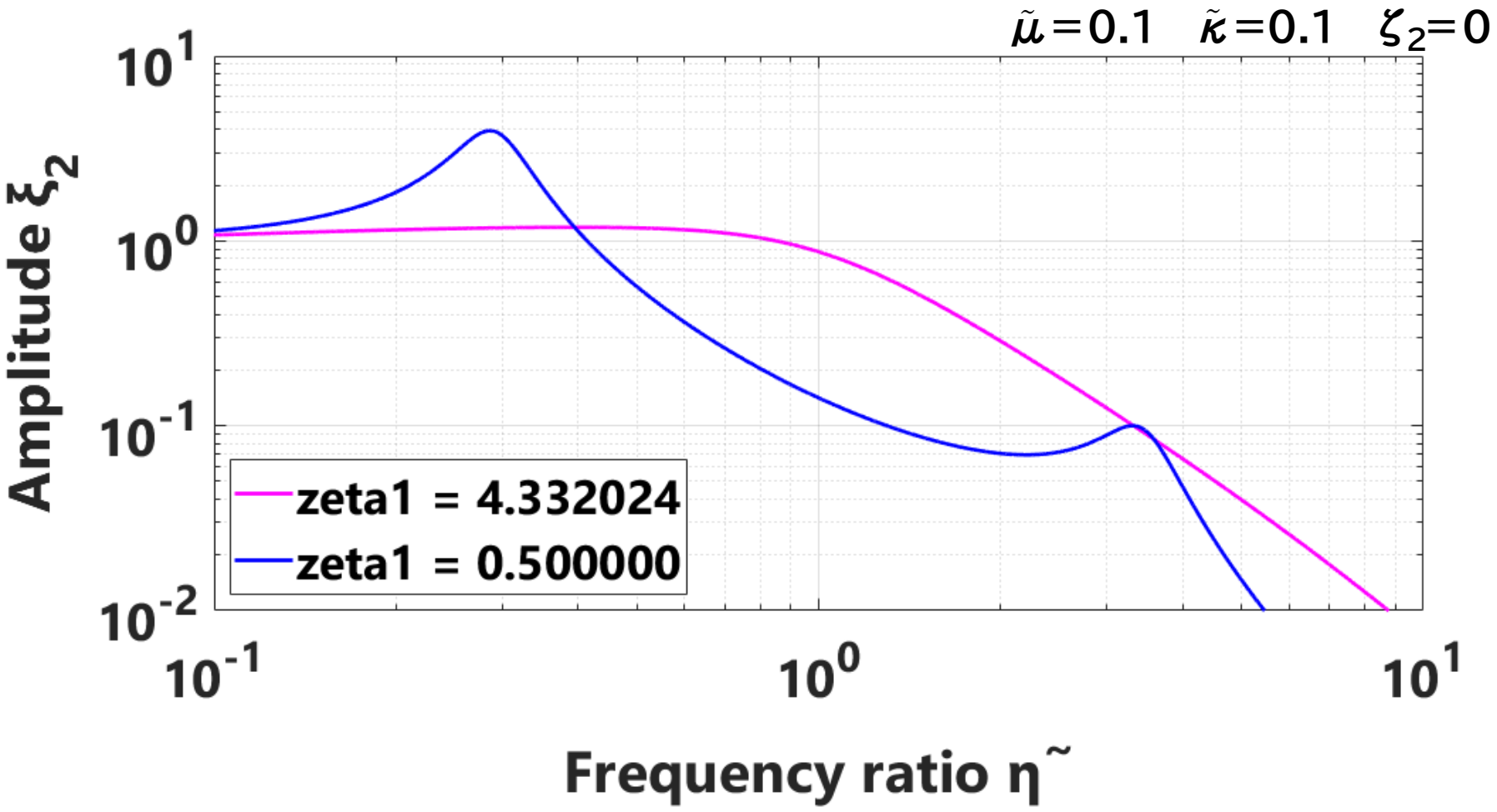
バネ剛性が小さい(isolatorが柔らかい)と, やはり, 最適でなくても応答倍率は比較的小さくなる



振動絶縁の2自由度モデル(粘性減衰比が一定の場合)

★最適な場合とそうでない場合との比較

とはいえ、やはり、粘性減衰比が小さいと、共振倍率は大きい



第4章のまとめ

- 系1、2の質量や固有振動数が固定の場合で、 系2の減衰が0という最悪な場合で、系1の粘性減衰比が加振振動数に依存しない場合、共振倍率を最小化する最適な粘性減衰比が存在する。
- そのときの共振倍率は、構造減衰係数が加振振動数に依存しない場合と等しい。
- 粘性減衰比が加振振動数に依存しない場合も、 isolatorの質量が小さければ、isolatorのバネ定数を小さくすると、 共振倍率を下げることができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月2日(月)2限

第8回　振動絶縁と動吸振器

第5章　動吸振器

第5章の学修目標

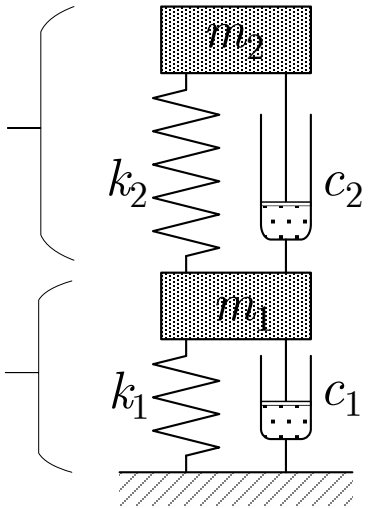
★ 動吸振器の2自由度モデルについて説明できる。

★ 加振振動数が既知の場合の動吸振器の設計法について説明できる。

★ 加振振動数が幅広い範囲にわたる場合について、最適な動吸振器のパラメータの決定法について説明できる。

動吸振器(Dynamic Damper)とは？

★対象物に付加することで振動を抑制(エネルギを吸収)



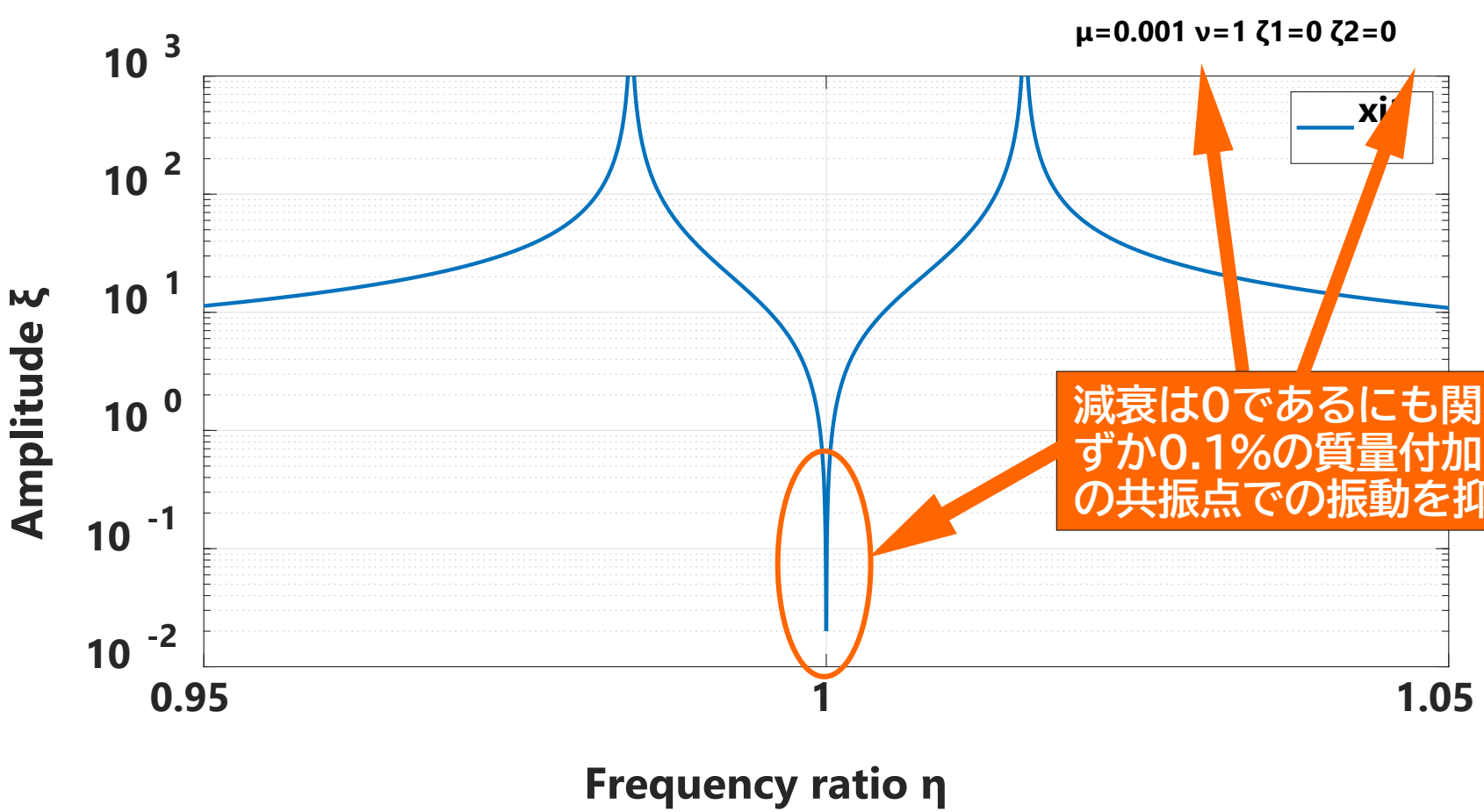
- 具体例としては、Tuned Mass Damper (TMD)、スロッシングダンパ(Tunes SloshingDamper)、フードダンパ(Houde Damper), 摩擦ダンパ, インパクトダンパなどがある。
- もちろん、これらの受動的な動吸振器の他にも、アクチュエータを使って能動的に制御する アクティブ動吸振器もある。
- 世の中で最もよく使われているものは、 TMDではないかと思われる。

加振振動数がわかっていれば、バネ・マス系を付加するだけで振動を抑制できる！(減衰は必ずしも必要ではない！)

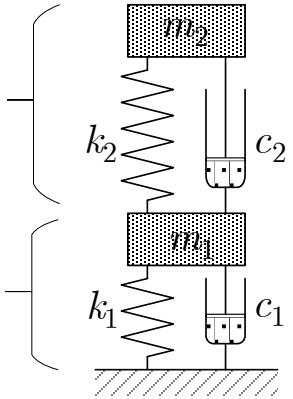
動吸振器の基本原理(タイプ1)

★加振振動数がわかっていれば、バネ・マス系を付加するだけで振動を抑制できる！
（減衰は必ずしも必要ではない！）

反共振点を利用する！(第7回第4章)



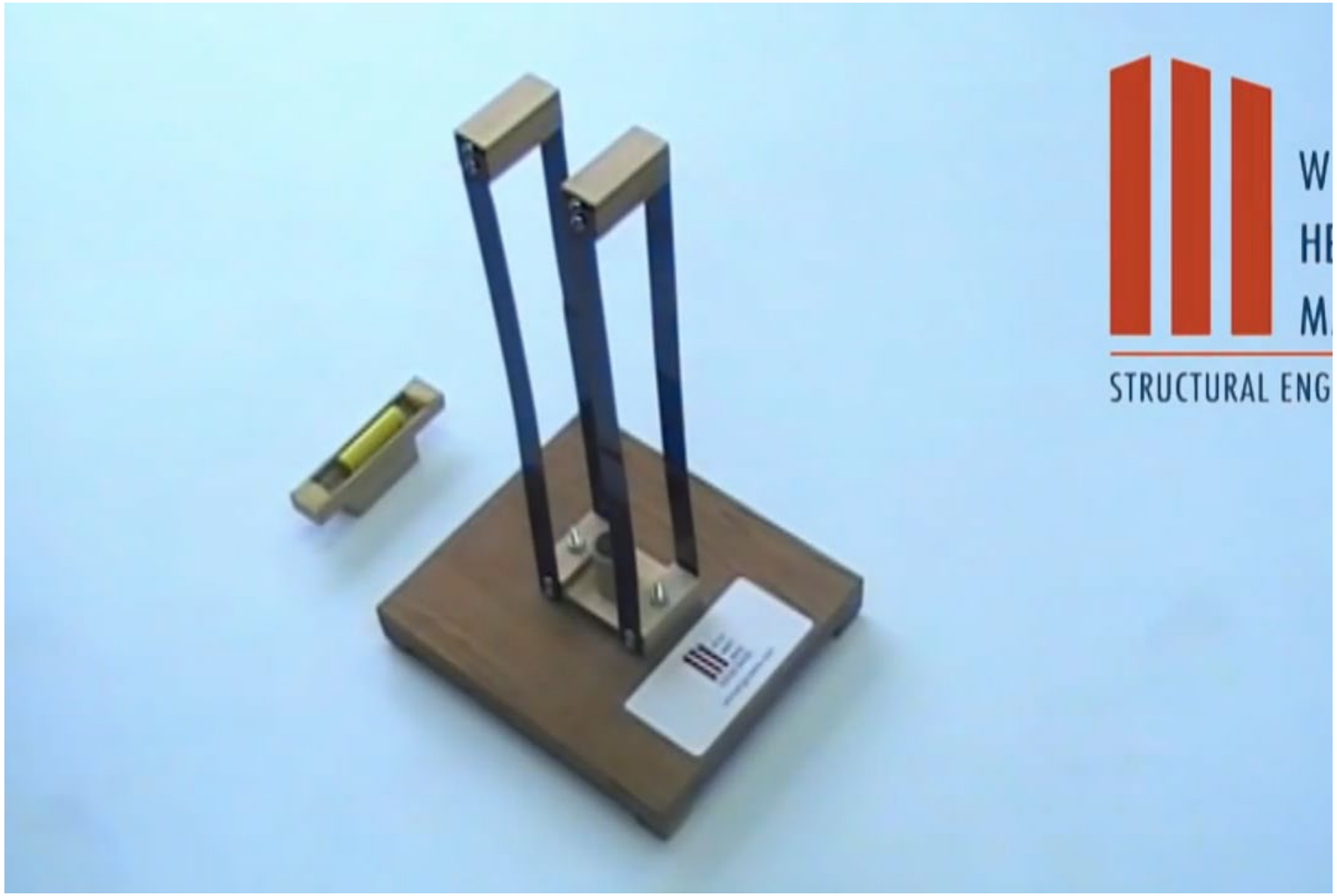
減衰は0であるにも関わらず、わずか0.1%の質量付加でもともとの共振点での振動を抑制できる！



動吸振器の固有振動数が反共振振動数と(ほぼ)同じ振動数になるので、動吸振器の固有振動数を対象物の固有振動数と同じにすれば、対象物の固有振動数付近で反共振が起こる。

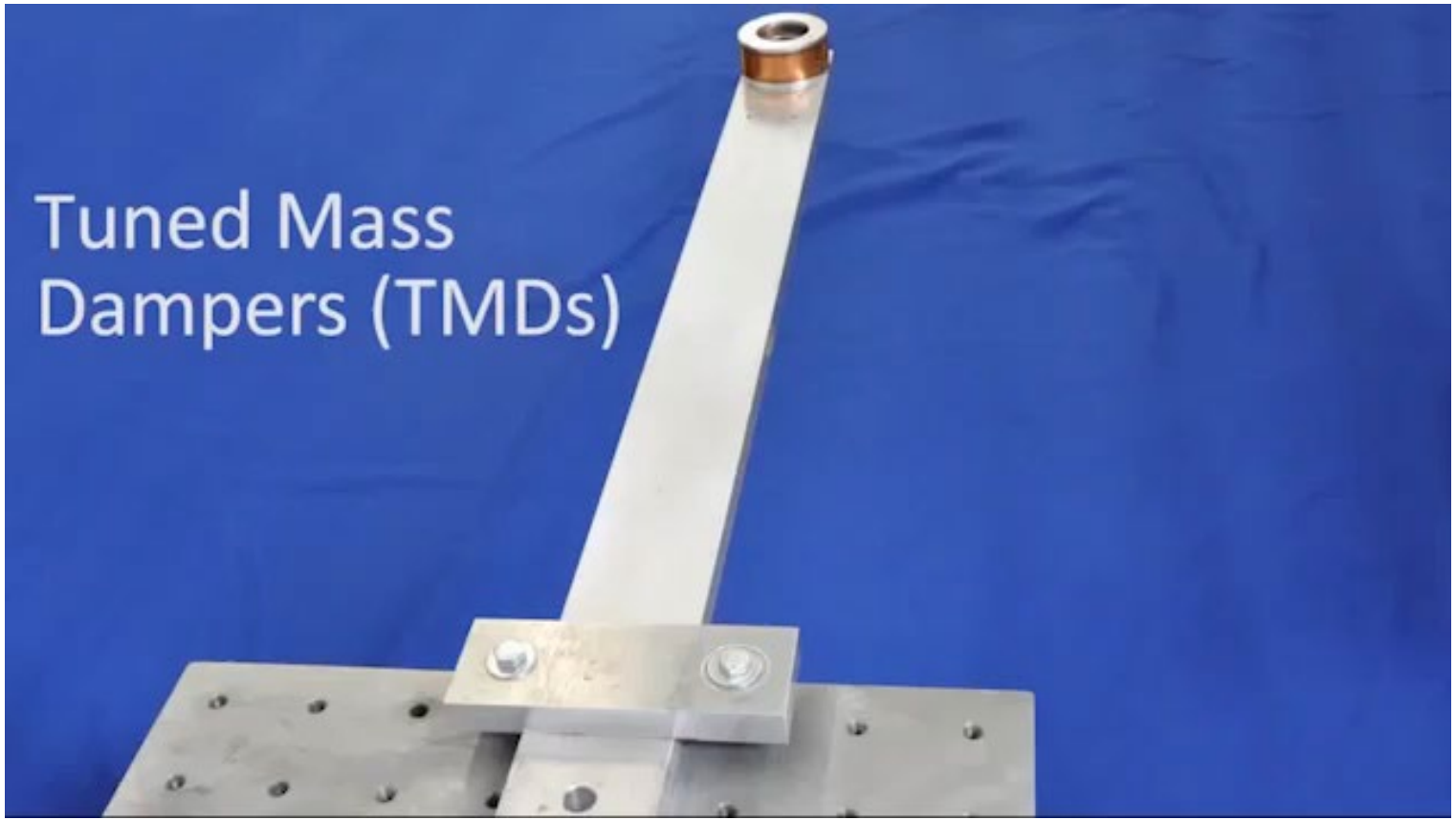
動吸振器の例

★Tuned Mass Damper（TMD）



動吸振器の例

★ちょっと載せるだけで振動が収まる

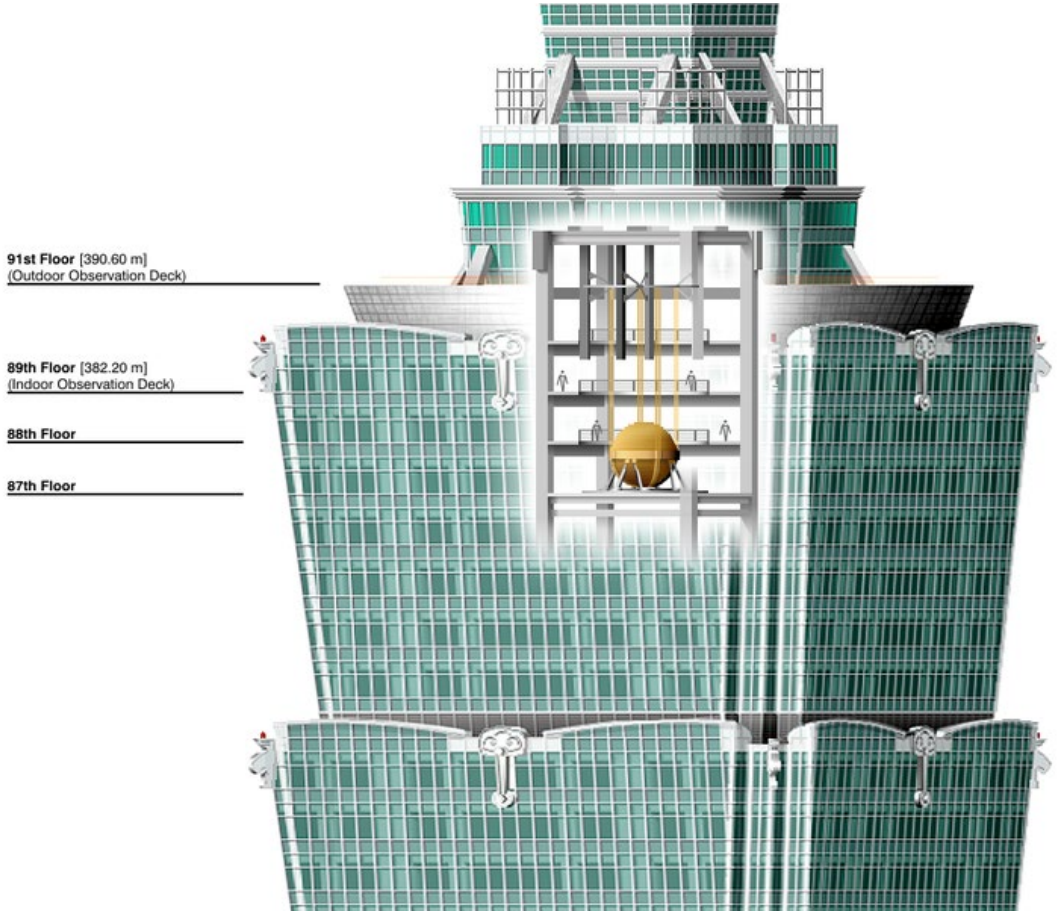


https://youtu.be/HDa1VO1VDpc

動吸振器の例

★ちょっと載せるだけで振動が収まる

台北101

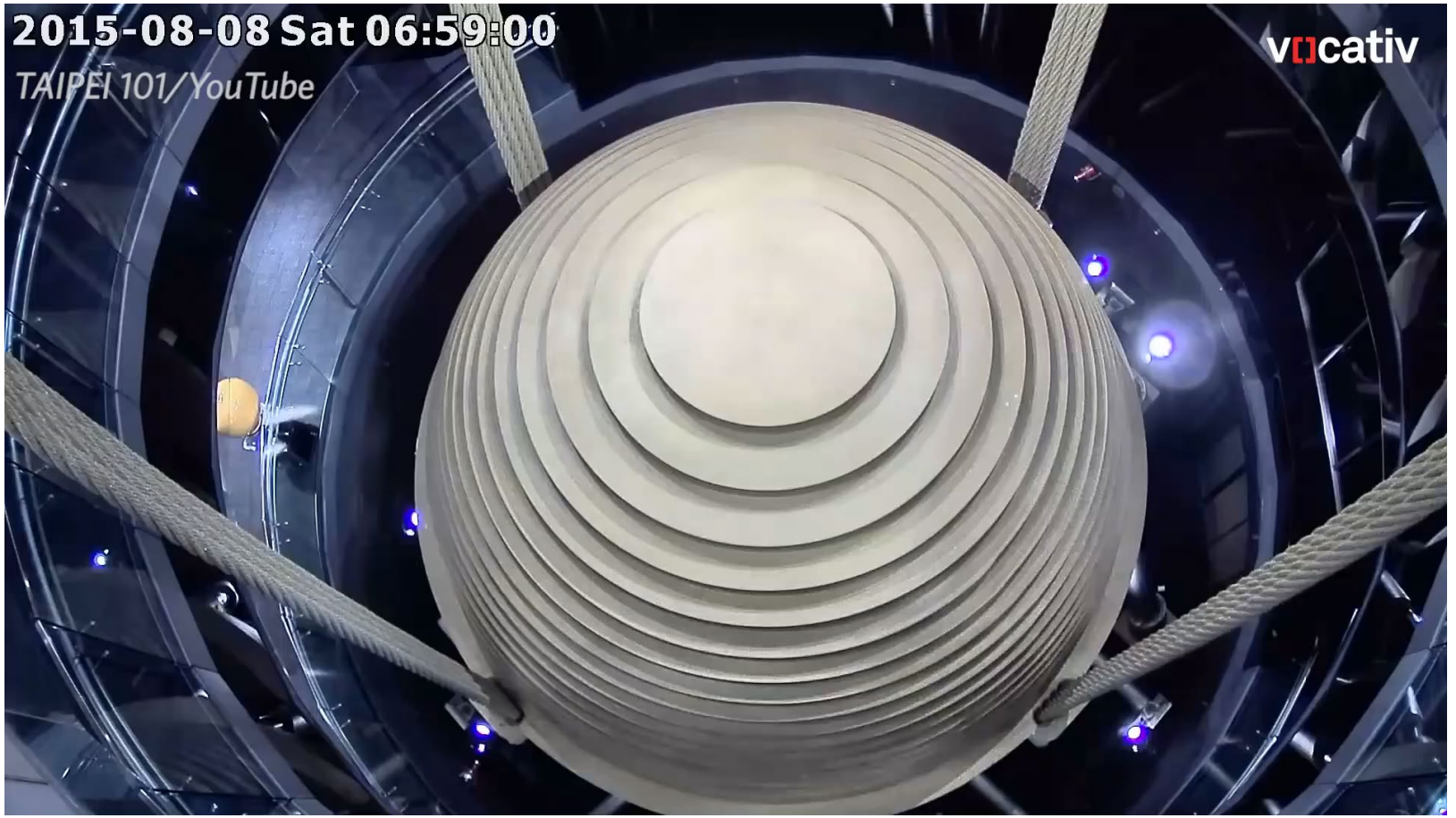


https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper.png

動吸振器の例

★ちょっと載せるだけで振動が収まる

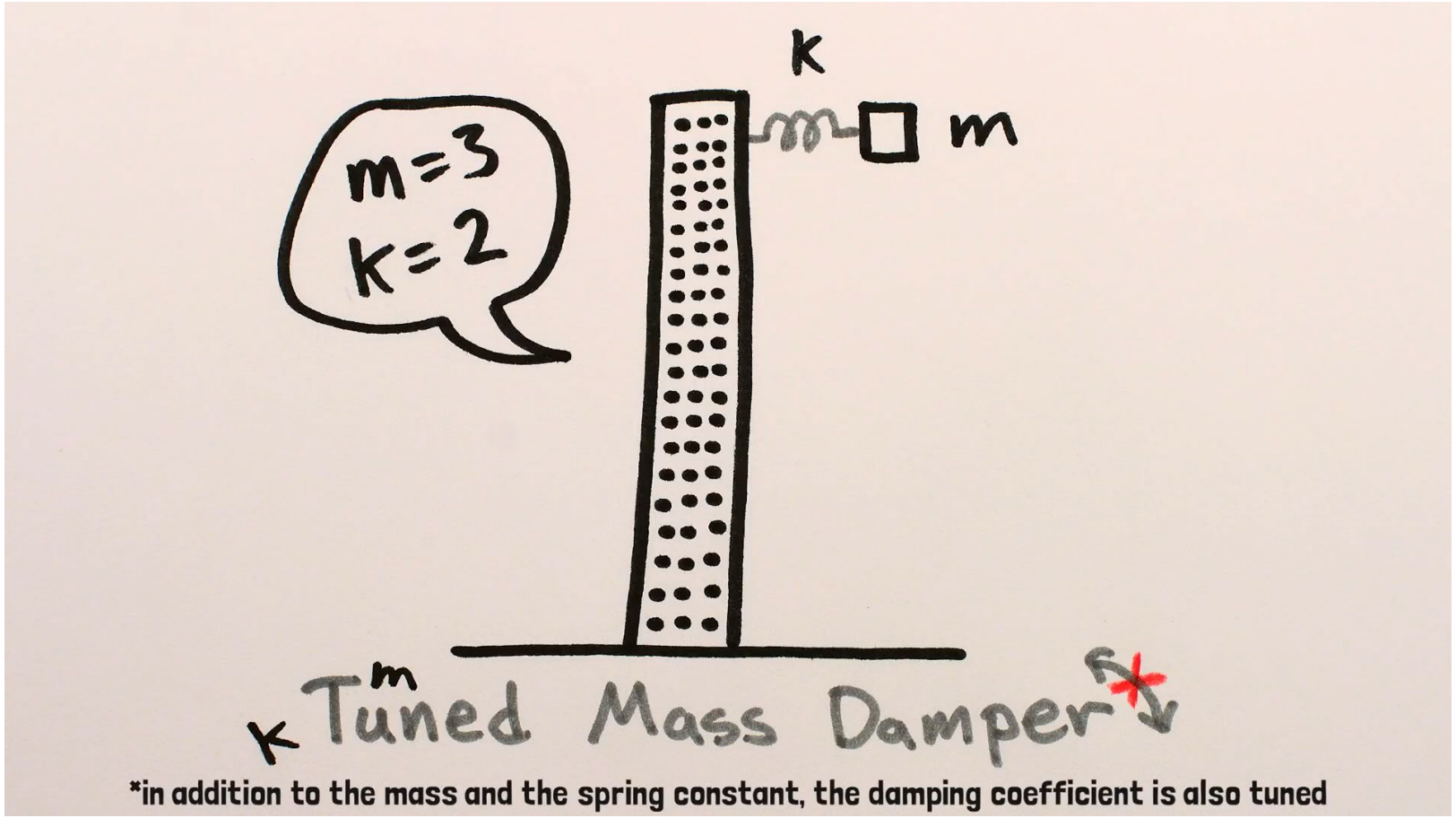
台北101



https://youtu.be/dd5WqmWIRzw

動吸振器の例

★ちょっと載せるだけで振動が収まる

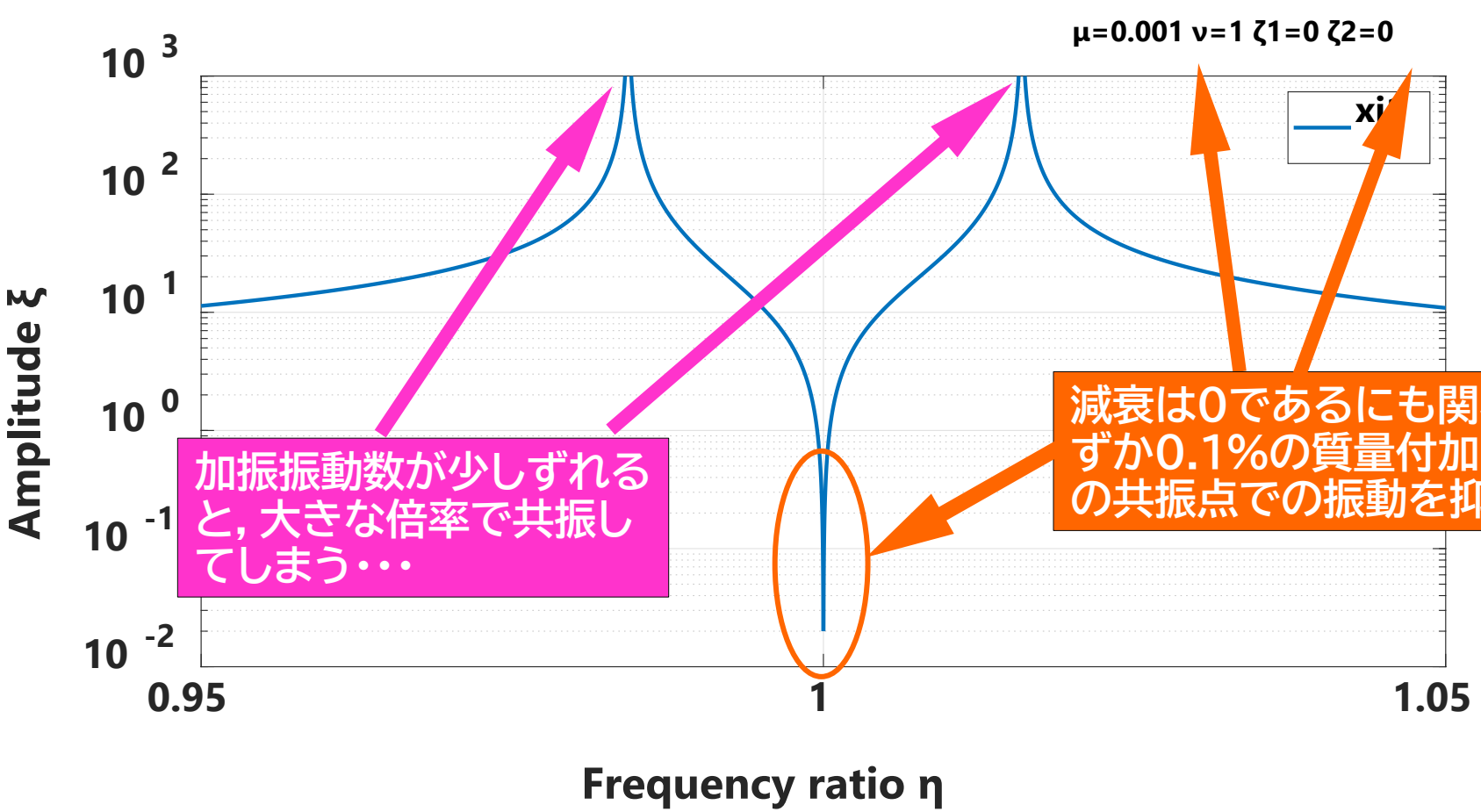


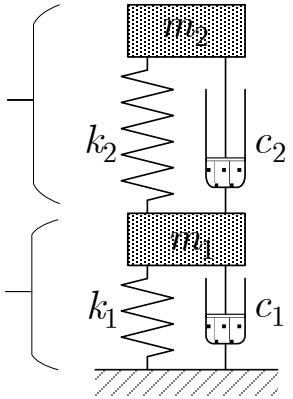
https://youtu.be/1c2-ut_-7z4

動吸振器の基本原理(タイプ1)

★加振振動数がわかっていれば、バネ・マス系を付加するだけで振動を抑制できる！
（減衰は必ずしも必要ではない！）

反共振点を利用する！(第7回第4章)

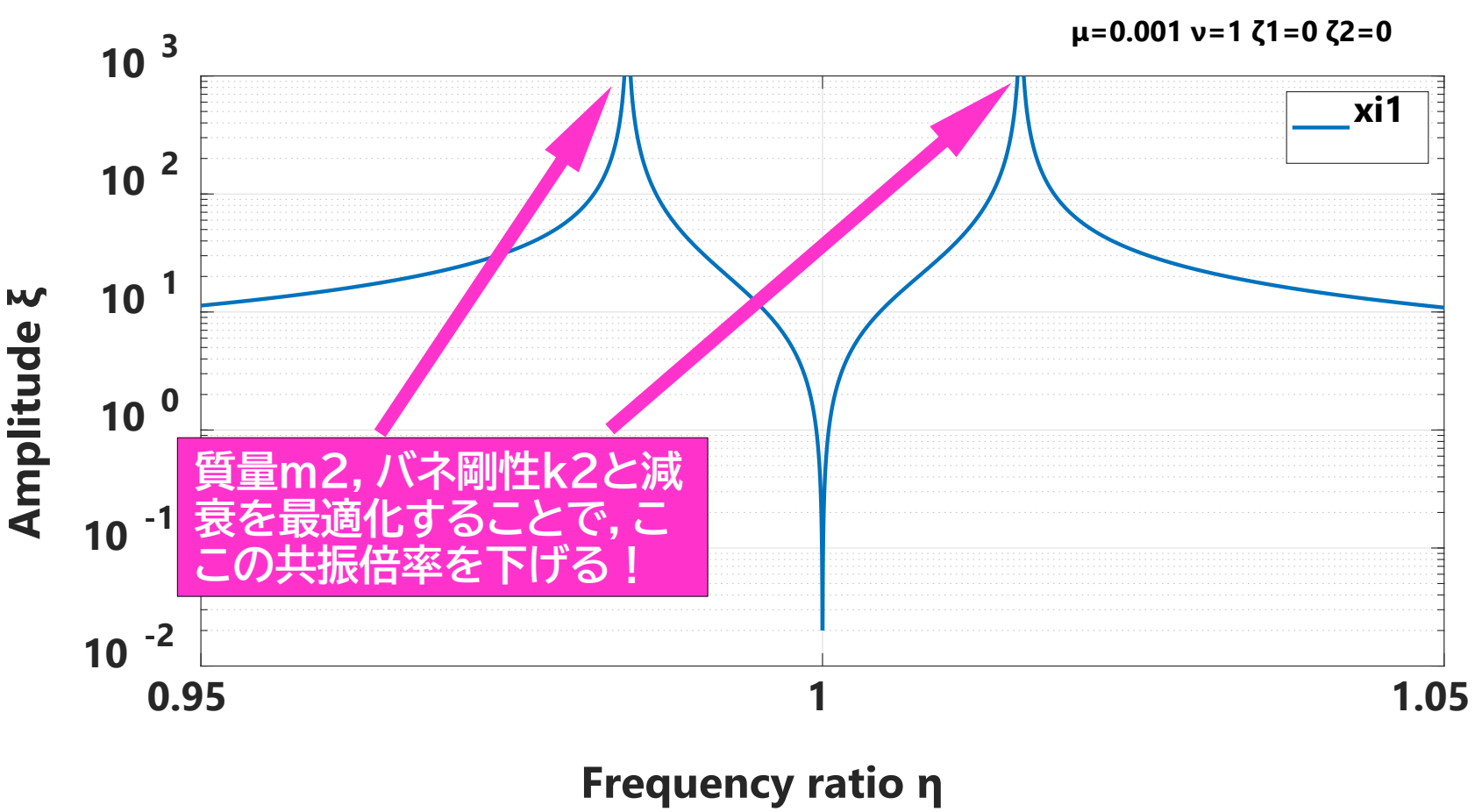


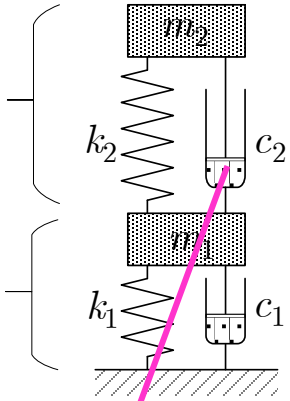


動吸振器の固有振動数が反共振振動数と(ほぼ)同じ振動数になるので、動吸振器の固有振動数を対象物の固有振動数と同じにすれば、対象物の固有振動数付近で反共振が起こる。

動吸振器の基本原理(タイプ2)

★加振振動数がわかっていれば、バネ・マス系を付加するだけで振動を抑制できる！
(~~減衰は必ずしも必要ではない！~~)

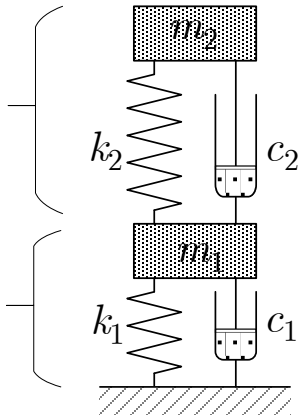




減衰をうまく利用

動吸振器の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★系1のパラメータを固定して系2のパラメータを検討



第7回第3章で学んだ通り、振幅比は

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{D_1}{R^2+I^2}} \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{D_2}{R^2+I^2}} \tag{7.3.25}$$

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1} , \quad \nu \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1} , \quad \eta \equiv \frac{\omega}{\omega_1} \tag{7.3.24}$$

$$\begin{cases} D_1 = (1+{\varepsilon_1}^2)[(\nu^2-\eta^2)^2+{\varepsilon_2}^2\nu^4] \\ D_2 = (1+{\varepsilon_1}^2)(1+{\varepsilon_2}^2)\nu^4 \end{cases} \tag{7.3.26}$$

$$\begin{cases} R = (1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\nu^2 - [1+(1+\mu)\nu^2]\eta^2+\eta^4 \\ I = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\nu^2 - [\varepsilon_1+(1+\mu)\varepsilon_2\nu^2]\eta^2 \end{cases} \tag{7.3.27}$$

最悪ケース($\varepsilon_1 = 0$)を考えると、

$$\begin{cases} D_1 = (\nu^2-\eta^2)^2+{\varepsilon_2}^2\nu^4 \\ R = \nu^2 - [1+(1+\mu)\nu^2]\eta^2+\eta^4 \\ I = \varepsilon_2\nu^2[1-(1+\mu)\eta^2] \end{cases} \tag{8.5.1}$$

また、動吸振器の質量は確定しているとする。つまり, μ は固定する。ふつうに考えると、最適な動吸振器を設計するには、

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = 0 \quad \text{(共振条件)} \tag{8.5.2}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} = 0 \, , \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \varepsilon_2} = 0 \quad \text{(最適化条件)} \tag{8.5.3}$$

を連立させればよさそう。しかし・・・

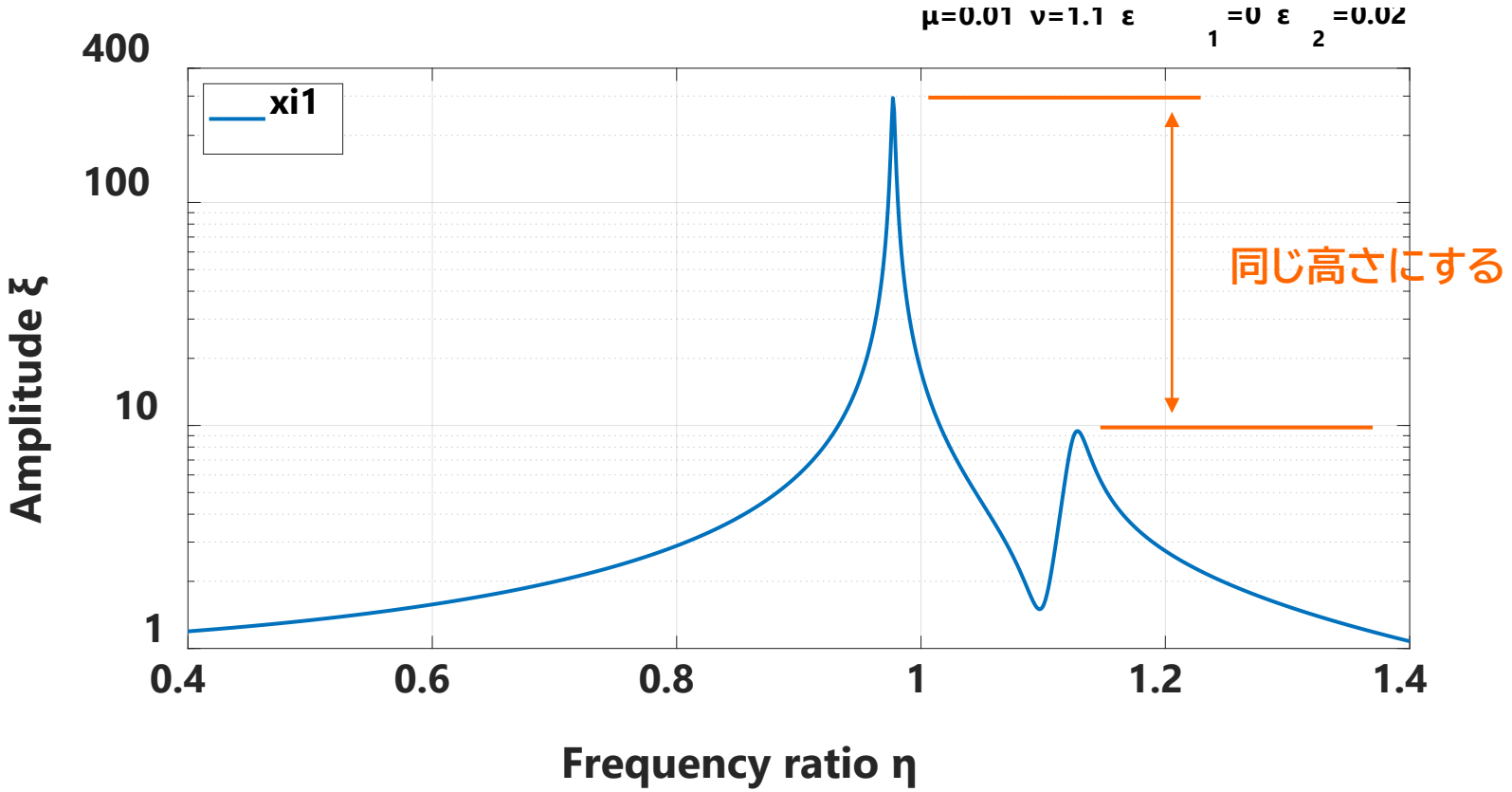
実は, この連立方程式には解がない！

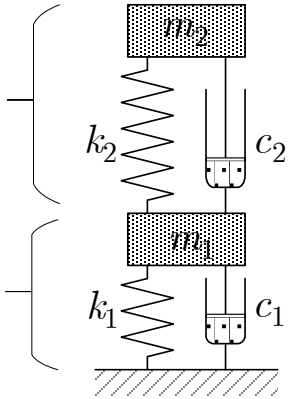
どうやれば共振倍率を下げられるのか？

動吸振器の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★どうやれば共振倍率を下げられるのか？

2つの共振点の共振倍率を等しくして, かつ, そうなるときの構造減衰係数 ε_2 が1つだけになるようにする.





動吸振器の2自由度モデル(構造減衰が一定の場合)

★最適解

結果だけ記すと,

最適な固有振動数比:

$$\nu = \frac{1}{1+\mu} \tag{8.5.4}$$

最適な構造減衰係数:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\mu(3+\mu)}{2}} \tag{8.5.5}$$

そのときの共振倍率:

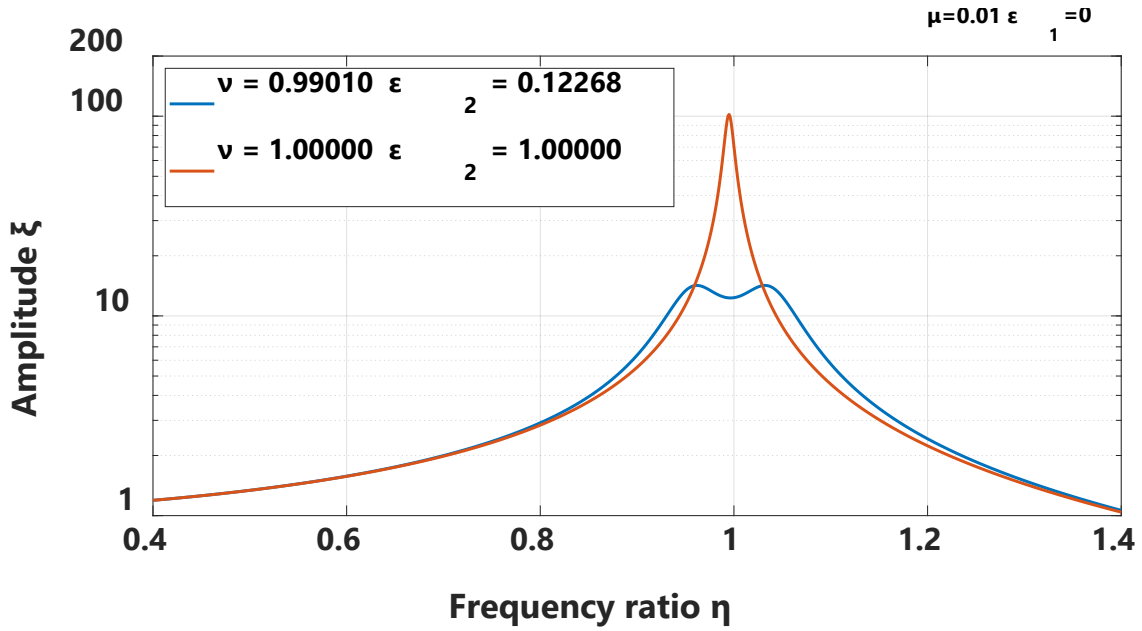
$$\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\mu}+2} \tag{8.5.6}$$

そのときの無次元共振振動数

$$\eta = \sqrt{\frac{2+\mu}{2(1+\mu)}\left(1 \pm \frac{\sqrt{\mu(2+\mu)}}{1+\mu}\right)} \tag{8.5.7}$$

このことから、例えば以下のことがわかる。

1) 共振倍率は$\sqrt{2}$より小さくなることはない。
2) 動吸振器の質量が小さい場合には、共振倍率は質量比の0.5乗にほぼ反比例する。
3) 動吸振器の固有振動数は対象物の固有振動数よりも小さくする。



動吸振器の2自由度モデル(粘性減衰が一定の場合)

★最適解

西原、松久、「動吸振器の最大振幅倍率最小化設計(代数的な厳密解の導出)」、日本機械学会論文集(C編)、63巻614号、pp.3438-3445、1997.

結果だけ記すと,

最適な固有振動数比:

$$\nu = \frac{2}{1+\mu}\sqrt{\frac{2a}{3(64+80\mu+27\mu^2)}} \tag{8.5.8}$$

ただし、

$$a = 16+23\mu+9\mu^2+2(2+\mu)\sqrt{4+3\mu} \tag{8.5.9}$$

最適な粘性減衰比:

$$\zeta_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8+9\mu-4\sqrt{4+3\mu}}{1+\mu}} \tag{8.5.10}$$

このときの共振倍率:

$$\xi_1 = \frac{1}{3\mu}\sqrt{\frac{b}{3(32+27\mu)}} \tag{8.5.11}$$

ただし、

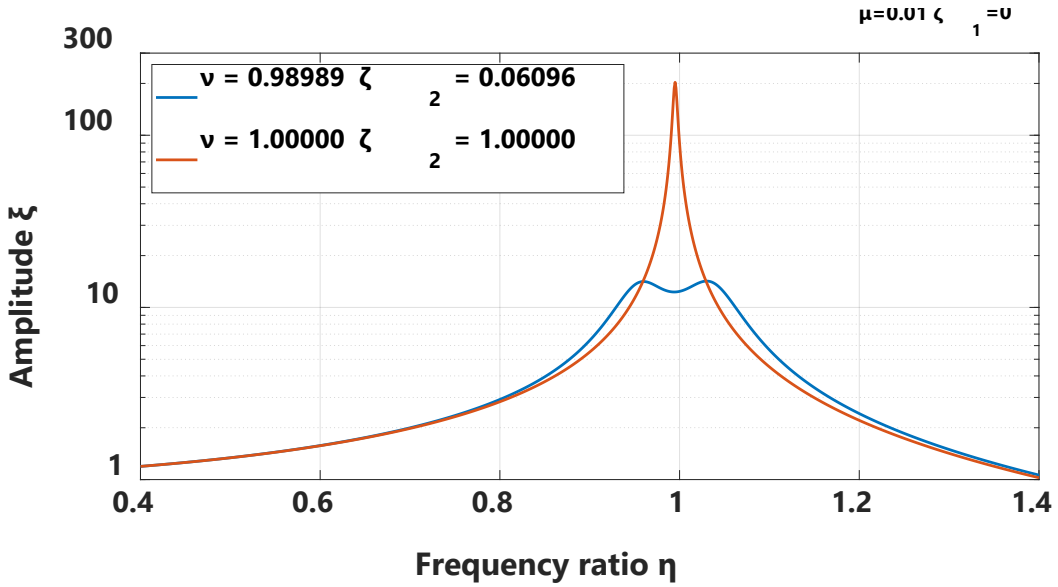
$$b = (8+9\mu)^2(16+9\mu)-128(4+3\mu)\sqrt{4+3\mu} \tag{8.5.12}$$

このときの無次元共振振動数

$$\eta = \sqrt{\frac{-b_1 \pm \sqrt{{b_1}^2-4b_2}}{4}} \tag{8.5.13}$$

ただし、

$$\begin{cases} b_1 = -2-2(1+\mu)\left[1-2{\zeta_1}^2(1+\mu)\right]\nu^2 \\ b_2 = \left(1-\dfrac{1}{{\xi_1}^2}\right)\nu^4 \end{cases} \tag{8.5.14}$$



第5章のまとめ(1/2)

- 動吸振器（dynamic damper)とは、 振動を抑制したい対象物に付加することで、対象物の振動を抑制する装置のことであり、2自由度のバネ・マス・ダッシュポット系でモデル化が可能である。
- 動吸振器の代表的なものとしては、tuned mass damper (TMD)が挙げられる。
- 加振振動数が既知の場合、対象物の固有振動数を加振振動数と同じ値にし, わずかに質量を付加することで、加振してもほとんど振動しないようにすることができる。
- 加振振動数が幅広い範囲にわたる場合、動吸振器の固有振動数と減衰を最適化することで、対象物の共振倍率を最小にすることができる。

第5章のまとめ(2/2)

- 与えられた質量のもとで、対象物の共振倍率を最小化する動吸振器の固有振動数および構造減衰係数(または粘性減衰比)は、2つの共振点の共振倍率が等しく、かつ、それを実現する構造減衰係数(または粘性減衰比)が1つしか存在しない、という条件から導くことができる。

- 構造減衰係数が一定の場合、共振倍率は$\sqrt{2}$を下回ることはなく、質量が小さい場合には、質量の平方根にほぼ反比例する。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第8回　振動絶縁と動吸振器

2025年6月2日(月)2限

課題

2025年6月8日(日)18時00分締切

[1] 宇宙機における振動絶縁の具体例について調べなさい（+1～2点）。 また、調べたことに対する自身の感想を述べなさい（+1～３点）。なお、レポートの中身はA4で2枚以内にまとめること。

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第8回　振動絶縁と動吸振器

おわり

宮崎 康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第9回　　モード法の基礎

宮崎　康行

miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

本講義の構成

1自由度線形運動の復習

- 第1回 序論
- 第2回 1自由度線形振動
- 第3回 任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移
- 第4回 宇宙機の設計・開発における振動解析

強制振動と共振

- 第5回 1自由度線形振動系の強制振動と共振
- 第6回 減衰のない2自由度線形振動系の自由振動
- 第7回 2自由度線形振動系の強制振動
- 第8回 振動絶縁と動吸振器

多自由度系の振動

- 第9回 モード法の基礎
- 第10回 刺激係数と有効質量
- 第11回 パワースペクトル密度
- 第12回 ランダム振動

試験による評価

- 第13回 ランダム加振される物体に作用する荷重
- 第14回 振動に対する耐性の評価法
- 第15回 衝撃に対する耐性の評価法

第9回の学修目標

★ モード法について説明できる。

★ モード法を用いて過渡応答を計算する際の、 減衰の取り扱いについて説明できる。

★ モード法を用いた多自由度線形系の過渡応答の計算手順について説明できる。

※ 固有振動数や固有振動モードの利用法について学びましょう。

第9回の全体構成

第1章　モード法

第2章　モード法における減衰の取り扱い

第3章　モード法による過渡応答の計算

付録　ステップ応答とインパルス応答

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

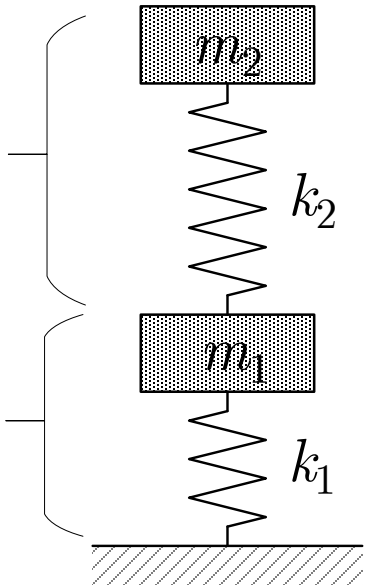
2025年6月9日(月)2限

第9回　モード法の基礎

第1章　モード法

第1章の学修目標

★ モード法について説明できる。



モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★過渡応答の効率的な計算方法は？

一般に、外力が作用するバネ・マス系など、内部減衰を有しないの運動方程式は、

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{9.1.1}$$

と書くことができる。これを、初期値

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad , \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \tag{9.1.2}$$

で解く（過渡応答を求める）場合、第3回第4章では、状態遷移行列を用いた。すなわち、状態量を

$$\boldsymbol{z} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{9.1.3}$$

として、時刻t_nでの状態量を$\boldsymbol{z}_n$、外力を質量で無次元化したベクトルを$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n}$として、

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{n} \tag{3.4.1}$$

ただし、$\boldsymbol{P}$や$\boldsymbol{Q}$の中身については、1自由度系であれば、式$(3.4.3)$〜$(3.4.5)$のように求められるが、より多自由度の場合、かなり煩雑な計算を必要とし、現実的でない。

多自由度系の場合、コンピュータープログラミング2で学んだ、「Runge-Kutta法」等，微分方程式の解法を利用できる。すなわち、

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{9.1.4}$$

この場合、例えばN自由度の系の場合、$2N$個の連立微分方程式を計算する必要があり、M^{-1}の処理などで計算時間を要してしまう（実際、連立方程式をガウスの消去法等で解くのはちょっと時間がかかったはず）。

しかし、ほとんどの場合、過渡応答では高い振動数の振動は減衰するので、実際には、低次の振動の和で近似してもほとんど問題ない。

どうすれば、効率的に計算できる？

モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★過渡応答の効率的な計算方法は？

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{9.1.1}$$

ここで、第6回第3章で学んだ通り、固有振動モード$\boldsymbol{\phi}_k$は完全性を有するので、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)\boldsymbol{\phi}_k \tag{9.1.5}$$

とおける（w_kはモード座標と呼ばれる）。

式(9.1.4)をを式(9.1.1)に代入すると、

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k\ddot{w}_k + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_k w_k\right) = \boldsymbol{F} \tag{9.1.6}$$

ここで、両辺に左から${\boldsymbol{\phi}_i}^T$をかけると、

$$\sum_{k=1}^{N}\left({\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k\ddot{w}_k + {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_k w_k\right) = {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{F} \tag{9.1.7}$$

いま、モードの直交性・正規性より、

$${\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k = \delta_{ik}\ , \quad {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_k = {\Omega_i}^2\delta_{ik} \tag{9.1.8}$$

よって、式(9.1.8)より、次のモード方程式が得られる。

$$\ddot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{F} \tag{9.1.9}$$

つまり、外力$\boldsymbol{F}$がw_1～w_Nや$\dot{w}_1$～$\dot{w}_N$に依存しなければ、

1）w_1～w_Nに関する別々の微分方程式を独立・並列に解くことができる。したがって、高速に計算することができる！

2）もし、低次のモードだけを考えるのであれば、式(9.1.9)のiの範囲を1～Nではなく、iが小さい値の範囲だけにして、それ以上のw_iは無視する（0とする）ことで，より高速に計算できる！

そして、そうやって求めたw_1～w_Nを式(9.1.5)に代入することで、$\boldsymbol{x}$を求めるのがモード法．

ちなみに、式(9.1.5)より、

$${\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k{\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)\delta_{ik} = w_i \tag{9.1.10}$$

モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★モード方程式を解いてモード座標を求めてから物理座標に引き戻す

まとめると、具体的な計算手順は以下の通り：

① 運動方程式を立てる.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{9.1.1}$$

② 固有角振動数Ω_iと固有振動モード$\boldsymbol{\phi}_i$を求める。

$$(\boldsymbol{K} - {\Omega_i}^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{0}\ , \quad {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i = 1 \tag{9.1.11}$$

③ 初期値を与える。

$$\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}(0)\ , \quad \boldsymbol{v}_0 \equiv \dot{\boldsymbol{x}}(0) \tag{9.1.12}$$

④ モード座標の初期値を求める。

$$w_i(0) = {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0\ , \quad \dot{w}_i(0) = {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0 \tag{9.1.13}$$

⑤ モード方程式を解き、時々刻々のw_iと$\dot{w}_i$を求める。

$$\ddot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i\ , \quad \beta_i \equiv {\boldsymbol{\phi}_i}^T\boldsymbol{F} \tag{9.1.14}$$

⑥ 次式にw_iを代入することで、時々刻々の$\boldsymbol{x}$と$\dot{\boldsymbol{x}}$を求める：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)\boldsymbol{\phi}_k\ , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{k=1}^{N} \dot{w}_k(t)\boldsymbol{\phi}_k \tag{9.1.15}$$

ちなみに、式(9.1.14)は1自由度系なので、第3回第4章の状態遷移関係

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \tag{3.4.1}$$

$$\boldsymbol{z}_n = \begin{bmatrix} w_i(t_n) \\ \dot{w}_i(t_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n = \begin{bmatrix} \beta_i(t_n) \\ \beta_i(t_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{9.1.16}$$

を用いて解を求めることができる！

モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★モード方程式を解いてモード座標を求めてから物理座標に引き戻す

【例題9.1.1】質量が $m_1 = 25\mathrm{kg}$ で固有振動数が $f_1 = 80\,\mathrm{Hz}$ のバネ・マス系1と，質量が $m_2 = 3\mathrm{kg}$ で固有振動数が $f_2 = 0.5\,\mathrm{Hz}$ のバネ・マス系2から成る2自由度系がある。いま、系2のバネを $x_1 = 2\mathrm{mm}$ だけ伸ばして静かに手を離した。$t = 10.0\,\mathrm{sec}$ だけ時間が経ったときの系1の変位を以下の手順で求めなさい。

（1）2自由度系の固有振動数を求めなさい。

（2）正規化された固有振動モードベクトルを 求めなさい。

（3）モード座標およびモード速度の初期値を 求めなさい。

（4）$t = 10.0\,\mathrm{sec}$ だけ時間が経ったとのモード座標の値を求めなさい。

（5）$t = 10.0\,\mathrm{sec}$ だけ時間が経ったときの系1の変位を求めなさい。

※ 減衰がないので、モード方程式は自由振動の方程式

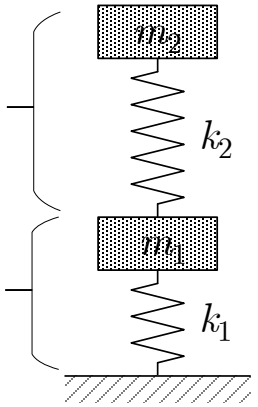
$$\ddot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = 0 \tag{9.1.17}$$

となり、解は、第2回第2章の式(2.2.14)より、

$$w_i(t) = \frac{\dot{w}_i(0)}{2\pi f_i}\sin(2\pi f_i t) + w_i \cos(2\pi f_i t) \tag{9.1.18}$$

（ただし、$f_i = \Omega_i \,/\, (2\pi)$）。この式から $w_i(10)$ を求めると、式(9.1.15)より、次式で $x_2(10)$ を求めることができる。

$$\boldsymbol{x}(10) = \sum_{i=1}^{2} w_i(10)\boldsymbol{\phi}_i \tag{9.1.19}$$



モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★モード方程式を解いてモード座標を求めてから物理座標に引き戻す

【略解】

(1) 問題文より、2つの系の質量と固有振動数は

$$m_1 = 25\,\mathrm{kg} \quad , \quad f_{o1} = 80\,\mathrm{Hz} \tag{1}$$

$$m_2 = 3\,\mathrm{kg} \quad , \quad f_{o2} = 0.5\,\mathrm{Hz} \tag{2}$$

系1と系2の質量比 μ と固有振動数比 ν は

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{25} = 0.12 \ , \ \nu = \frac{f_{o2}}{f_{o1}} = \frac{0.5}{80} = 0.00625 \tag{3}$$

定数 γ を

$$\gamma \equiv 1 + (1+\mu)\nu^2 = 1.00004375 \tag{4}$$

と定義すれば、2自由度系の固有振動数と系1の固有振動数との比 α_1 および α_2 は

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} = 0.006249985 \tag{5}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} = 1.000002344 \tag{6}$$

よって、固有振動数 f_1 および f_2 は

$$f_1 = \alpha_1 \times 25 = 0.499998828\ \mathrm{Hz} \tag{7}$$

$$f_2 = \alpha_2 \times 25 = 80.00018751\ \mathrm{Hz} \tag{8}$$

(2) 固有振動数は

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00625^2 - 0.006249985^2 \\ 0.00625^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.83112 \times 10^{-10} \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00625^2 - 1.000002344^2 \\ 1.000002344^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.999965625 \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{10}$$

質量マトリクス M は

モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★モード方程式を解いてモード座標を求めてから物理座標に引き戻す

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

であり、$\boldsymbol{M}$ を用いて z_1 と z_2 をこれを正規化すると、

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{{z_1}^T \boldsymbol{M} z_1}} z_1 \quad , \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{{z_2}^T \boldsymbol{M} z_2}} z_2 \tag{12}$$

ここで、

$${z_1}^T \boldsymbol{M} z_1 = \begin{bmatrix} 1.83112 \times 10^{-10} & 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.83112 \times 10^{-10} \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = 4.57764 \times 10^{-9} \tag{13}$$

$${z_2}^T \boldsymbol{M} z_2 = \begin{bmatrix} -0.999965625 & 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.999965625 \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = 24.99828129 \tag{14}$$

よって、

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{4.57764 \times 10^{-9}}} \begin{bmatrix} 1.83112 \times 10^{-10} \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.70642 \times 10^{-6} \\ 0.577350269 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{24.99828129}} \begin{bmatrix} -0.999965625 \\ 3.90625 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 7.81277 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \tag{16}$$

（3） 問題文より、変位と速度の初期値は

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

よって、モード座標およびモード速度の初期値は

$$w_1(0) = \boldsymbol{\phi}_1{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2.70642 \times 10^{-6} & 0.577350269 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 6.76606 \times 10^{-8} \tag{18}$$

モード法による多自由度バネ・マス系の過渡応答の算出

★モード方程式を解いてモード座標を求めてから物理座標に引き戻す

$$\dot{w}_1(0) = \boldsymbol{\phi}_1{}^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{\phi}_1{}^T \boldsymbol{M}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} w_2(0) &= \boldsymbol{\phi}_2{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix}-0.2 & 7.81277\times10^{-6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\times10^{-3}\\0\end{bmatrix} \\ &= -0.005 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\dot{w}_2(0) = \boldsymbol{\phi}_2{}^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{\phi}_2{}^T \boldsymbol{M}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0 \tag{1219}$$

（4） モード座標の時間変化は次式で表される。

$$w_i(t) = \frac{\dot{w}_i(0)}{2\pi f_i}\sin(2\pi f_i t) + w_i\cos(2\pi f_i t) \tag{9.1.18}$$

よって、10秒後のモード座標は

$$\begin{aligned} w_1(10) &= \frac{0}{2\pi f_1}\sin(2\pi f_1\times10) \\ &+ 6.76606\times10^{-8}\times\cos(2\times\pi\times0.499998828\times10) \\ &= 6.76606\times10^{-8} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} w_2(10) &= \frac{0}{2\pi f_2}\sin(2\pi f_2\times10) \\ &- 0.005\times\cos(2\times\pi\times80.00018751\times10) \\ &= -0.004992007 \end{aligned} \tag{22}$$

（5） 10秒後の変位ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(10) &= w_1(10)\boldsymbol{\phi}_1 + w_2(10)\boldsymbol{\phi}_2 \\ &= 6.76606\times10^{-8}\times\begin{bmatrix}2.70642\times10^{-6}\\0.577350269\end{bmatrix} \\ &\quad - 0.004992007\times\begin{bmatrix}-0.2\\7.81277\times10^{-6}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0.000999722\\1.08477\times10^{-11}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

したがって、系1の変位は

$$x_1(10) = 0.000999722\,\mathrm{m} \approx 0.9997\,\mathrm{mm} \tag{24}$$

第1章のまとめ

- モード法とは、変位ベクトルを固有振動モードベクトルの線形和で記述し、係数(モード座標)に関する運動方程式(モード方程式)を解くことで、 変位ベクトルの時々刻々の値(過渡応答)を求める方法である。
- モード法の利点は、外力が変位に依存しなければ、モード座標に関する運動方程式を並列に解けることと、 高次のモードが減衰しやすい系であれば、低次のモード座標だけを求めることで、高速に近似計算をすることができる点。
- モード方程式は1自由度であるので、第3回第4章で学んだ状態遷移関係式を用いて、容易に解を得ることもできる。

※ この文章を読んだだけで、式や図を思い描くことができますか？ また、プログラムの構成(フローチャート)を思い描くことができますか？

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

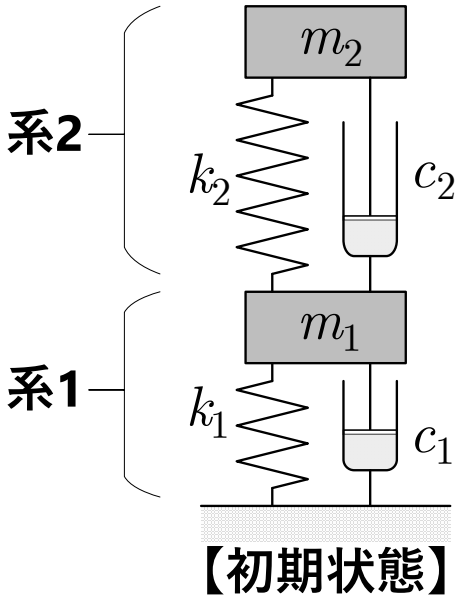
2025年6月9日(月)2限

第9回　モード法の基礎

第2章　モード法における減衰の取り扱い

第2章の学修目標

★ モード法における減衰の取り扱いについて説明できる。



モード法によるバネ・マス・ダンパー系の運動方程式の解法

★減衰項をどうするか？

運動方程式は、

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t) \tag{9.2.1}$$

正規化された固有振動モードベクトルを$\boldsymbol{\phi}_k$として、変位ベクトル$\boldsymbol{x}$を

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)\boldsymbol{\phi}_k \tag{9.2.2}$$

とおき、

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k = \delta_{ik}\ , \quad \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_k = \Omega_i{}^2\delta_{ik} \tag{9.2.3}$$

であることを用いると、

$$\ddot{w}_i + \sum_{k=1}^{N}\chi_{ik}\dot{w}_k + \Omega_i{}^2 w_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{F}(t) \equiv \beta_i(t) \tag{9.2.4}$$

となる。ただし、

$$\chi_{ik} \equiv \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}_k \tag{9.2.5}$$

つまり、χ_{ik}のせいで、式(4)がw_iについて独立にならない。

例えば、2自由度系の場合であれば、

$$\begin{cases} \ddot{w}_1 + \chi_{11}\dot{w}_1 + \chi_{12}\dot{w}_2 + \Omega_1{}^2 w_1 = \beta_1(t) \\ \ddot{w}_2 + \chi_{21}\dot{w}_1 + \chi_{22}\dot{w}_2 + \Omega_2{}^2 w_2 = \beta_2(t) \end{cases} \tag{9.2.6}$$

となって、$\chi_{12}\dot{w}_2$ や $\chi_{21}\dot{w}_1$ が余計。つまり、減衰があるとモード方程式に連成項が生じる。

ただし、$i \neq k$のときに$\chi_{ik} = 0$ になってくれれば、独立になる。つまり、

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}_k = \gamma_i\delta_{ik} \tag{9.2.7}$$

と書ければ、すなわち,$\boldsymbol{\phi}_i$が$\boldsymbol{C}$を介して直交すれば、次の通り、モード方程式は互いに独立になる。

$$\ddot{w}_i + \gamma_i\dot{w}_i + \Omega_i{}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.8}$$

これであれば、解を求めることは容易。実際、

$$\gamma_i = 2\zeta_i\Omega_i \quad \text{すなわち} \quad \zeta_i = \frac{\gamma_i}{2\Omega_i} \tag{9.2.9}$$

とすれば、今までの1自由度系の結果が使える。

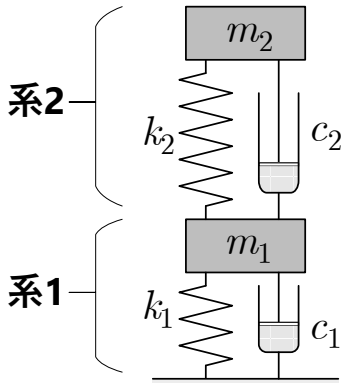
モード法によるバネ・マス・ダンパー系の運動方程式の解法

★減衰項をどうするか？

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_k = \gamma_i \delta_{ik} \tag{9.2.7}$$

$$\ddot{w}_i + \gamma_i \dot{w}_i + \Omega_i{}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.8}$$

$$\gamma_i = 2\zeta_i \Omega_i \quad \text{すなわち} \quad \zeta_i = \frac{\gamma_i}{2\Omega_i} \tag{9.2.9}$$



【初期状態】

右上図の2自由度系の場合、

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \tag{9.2.10}$$

であり、第6回第1、2章で求めた通り、

$$\alpha^4 - \left[1 + (1+\mu)\nu^2\right]\alpha^2 + \nu^2 = 0 \tag{6.1.12}$$

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

であるので、直交条件

$$\boldsymbol{z}_1{}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{z}_2 = 0 \tag{9.2.11}$$

を満たすのは、次のときだけで、一般には直交しない。

$$c_1 k_2 = c_2 k_1 \tag{9.2.12}$$

実際にはどうしている？

モード法によるバネ・マス・ダンパー系の運動方程式の解法

★減衰の入り方がわからない場合は，とりあえず直交性を仮定

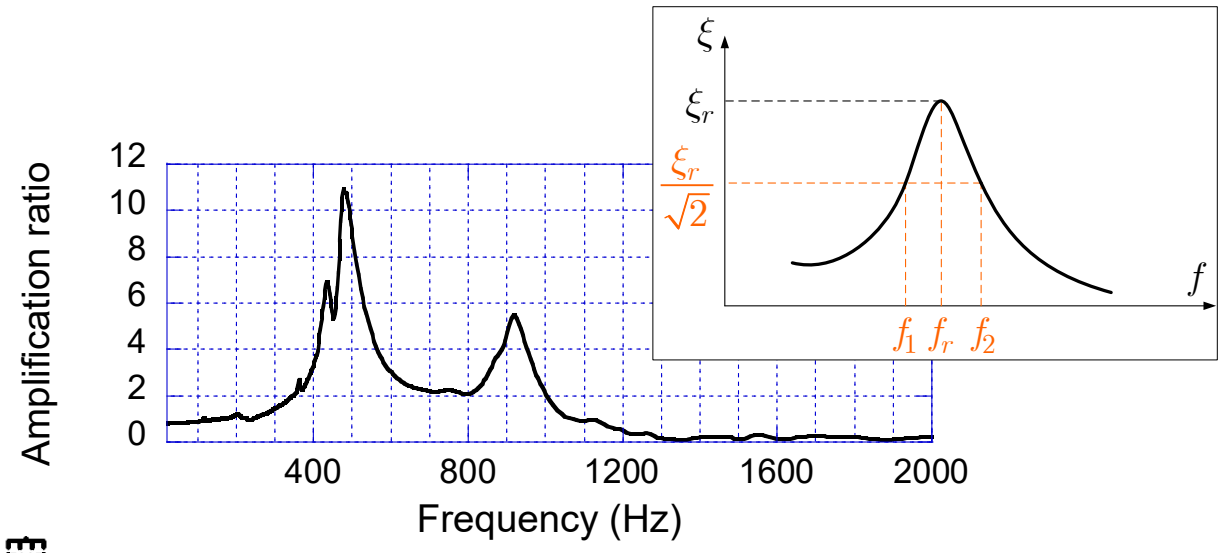
【例1】モード比例減衰

振動試験で得た共振時の減衰比ζ_iを用いて（設計時においては、$\zeta_i = 0.025$とでもして）、モード方程式

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i\Omega_i\dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.13}$$

を解いてモード座標を求め、次式で変位を求める。

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)\boldsymbol{\phi}_k \ , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{k=1}^{N} \dot{w}_k(t)\boldsymbol{\phi}_k \tag{9.1.15}$$



【例2】レイリー減衰（Reyleigh damping）

減衰マトリクスを質量マトリクスと剛性マトリクス の線形和で仮定。

$$\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K} \tag{9.2.14}$$

（ただし，αとβは定数）。このとき、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}_k &= \alpha\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k + \beta\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_k \\ &= \alpha\delta_{ik} + \beta{\Omega_i}^2\delta_{ik} = (\alpha + \beta{\Omega_i}^2)\delta_{ik}\end{aligned} \tag{9.2.15}$$

であるので、確かに直交条件を満たし、

$$\gamma_i = \alpha + \beta{\Omega_i}^2 \tag{9.2.16}$$

となる。したがって、モード方程式は

$$\ddot{w}_i + (\alpha + \beta{\Omega_i}^2)\dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.17}$$

どうやってαやβの値を決める？

モード法によるバネ・マス・ダンパー系の運動方程式の解法

★減衰の入り方がわからない場合は，とりあえず直交性を仮定

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.13}$$

$$\ddot{w}_i + (\alpha + \beta {\Omega_i}^2)\dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.17}$$

結論としては、2つのモードについて、数値解析か強制加振実験から固有振動数を求め、減衰比を仮定して（あるいは強制加振実験の結果から求めて）、その2つのモードのモード方程式の減衰項が 粘性減衰の場合のモードと一致するようにα、βを求めればよい。

例えば、1次と2次の固有角振動数Ω_1およびΩ_2と減衰比ζ_1およびζ_2を決めたら、

$$\begin{cases} \alpha + \beta {\Omega_1}^2 = 2\zeta_1 \Omega_1 \\ \alpha + \beta {\Omega_2}^2 = 2\zeta_2 \Omega_2 \end{cases} \tag{9.2.18}$$

を連立させることでαとβを求めればよい。すなわち、

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2(\zeta_1 \Omega_1 - \zeta_2 \Omega_2)\Omega_1 \Omega_2}{{\Omega_1}^2 - {\Omega_2}^2} \\ \beta = \dfrac{2(\zeta_1 \Omega_1 - \zeta_2 \Omega_2)}{{\Omega_1}^2 - {\Omega_2}^2} \end{cases} \tag{9.2.19}$$

ちなみに、

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{M} \quad , \quad \alpha = 2\zeta_1 \Omega_1 \tag{9.2.20}$$

としたものは**質量比例減衰**と呼ばれ、

$$\boldsymbol{C} = \beta \boldsymbol{K} \quad , \quad \beta = \frac{2\zeta_1}{\Omega_1} \tag{9.2.21}$$

としたものは**剛性比例減衰**と呼ばれる。

モード法によるバネ・マス・ダンパー系の運動方程式の解法

★減衰の入り方がわからない場合は，とりあえず直交性を仮定

【例題9.2.1】例題9.1.1において、 減衰が0ではなく、系1の減衰比は0.001、系2は0.0005であった場合の10秒後の系1の変位を求めなさい。

【略解】例題9.1.1の結果より、固有振動数は

$$f_1 = 0.499998828 \text{ Hz} \tag{1}$$

$$f_2 = 80.00018751 \text{ Hz} \tag{2}$$

であり、モード座標およびモード速度の初期値は

$$w_1(0) = 6.76606 \times 10^{-8} \quad , \quad \dot{w}_1(0) = 0 \tag{3}$$

$$\dot{w}_1(0) = -0.005 \quad , \quad \dot{w}_2(0) = 0 \tag{4}$$

モード座標の時間変化は、式$(2.2.28)$より、次式で表される。

$$w_i(t) = e^{-2\pi f_i \zeta_i t} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{w}_i(0) + 2\pi f_i \zeta_i w_i(0)}{2\pi f_i \sqrt{1-{\zeta_i}^2}} \sin\left(2\pi f_i \sqrt{1-{\zeta_i}^2} t\right) \\ +w_i(0) \cos\left(2\pi f_i \sqrt{1-{\zeta_i}^2} t\right) \end{bmatrix} \tag{5}$$

したがって、この式に$t = 20$、および、式(1)〜(4)を代入すると、

$$w_1(20) = 6.35401289 \times 10^{-8} \tag{6}$$

$$w_2(20) = -3.28570906 \times 10^{-5} \tag{7}$$

正規化された固有振動モードは

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 2.70642 \times 10^{-6} \\ 0.577350269 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 7.81277 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \tag{8}$$

であったので、変位ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(10) &= w_1(10)\boldsymbol{\phi}_1 + w_2(10)\boldsymbol{\phi}_2 \\ &= 6.35401289 \times 10^{-8} \times \begin{bmatrix} 2.70642 \times 10^{-6} \\ 0.577350269 \end{bmatrix} \\ &\quad - 3.28570906 \times 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -0.2 \\ 7.81277 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6.57141829 \times 10^{-6} \\ 3.64282057 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

第2章のまとめ(1/3)

- 系に減衰がある場合には、式(9.2.5)

$$\chi_{ik} \equiv \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_k \tag{9.2.5}$$

により減衰係数を求め、モード方程式(4)

$$\ddot{w}_i + \sum_{k=1}^{N} \chi_{ik} \dot{w}_k + \Omega_i{}^2 w_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{F}(t) \equiv \beta_i(t) \tag{9.2.4}$$

を解いて、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t) \boldsymbol{\phi}_k \tag{9.2.2}$$

に代入することで、過渡応答を求めることができる。

- 固有振動モードベクトルが 減衰マトリクスを介して直交しない場合、すなわち,$i \neq k$のときにχ_{ik}が0にならない場合には、各モードの振動が他の振動に影響を与える(モードが連成する)。

第2章のまとめ(2/3)

- 減衰が直交条件

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_k = \gamma_i \delta_{ik} \tag{9.2.7}$$

を満たせば、, モード方程式は

$$\ddot{w}_i + \gamma_i \dot{w}_i + \Omega_i{}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.8}$$

となって、これまでに学んできた、1自由度系の解法や知見をそのまま利用できる、つまり、どんなに自由度の大きい大規模構造システムであっても、その解は1自由度系の解の和で記述できる！

第2章のまとめ(3/3)

- 多自由度系でモードが連成しないためには、減衰マトリクスが直交条件を満たす必要があるが、直交条件を満たす例としては、モード毎の減衰比を一定とするもの(モード比例減衰)

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.13}$$

や、 減衰マトリクスが質量マトリクスと剛性マトリクスの線形和で表されると仮定するもの(レイリー減衰)

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{M} + \beta \boldsymbol{K} \tag{9.2.14}$$

$$\ddot{w}_i + (\alpha + \beta {\Omega_i}^2)\dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.2.17}$$

が挙げられる。

- モード比例減衰の場合の各モードの減衰比や、レイリー減衰の場合の線形和の係数は、強制振動実験を行って減衰比を求めることで算出できる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年6月9日(月)2限

第9回　モード法の基礎

第3章　モード法による過渡応答の計算

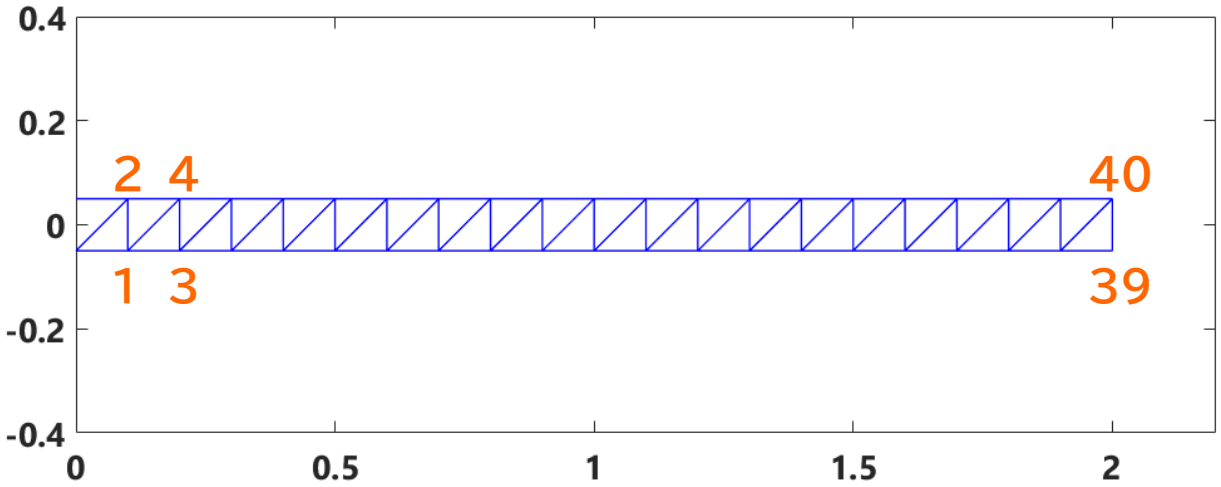
第3章の学修目標

★ 外力を受ける多自由度モード非連成系の運動を、 モード法を用いて計算する手順を説明できる。

★ モード法で過渡応答を近似計算する効率的な方法に ついて説明できる。

多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する



上図の片持ちトラスの自由度は80であり、運動方程式は

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t) \tag{9.4.1}$$

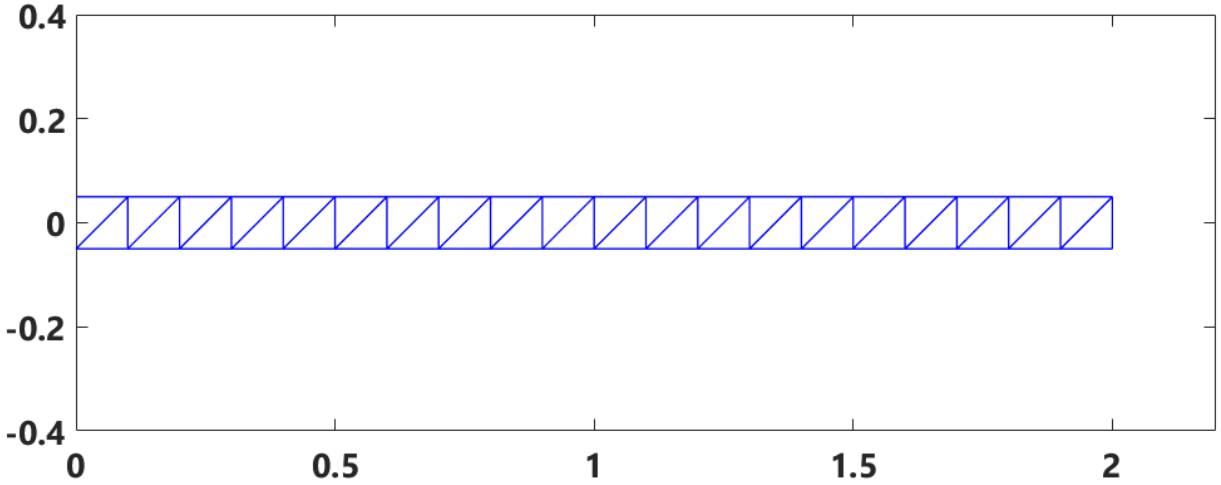
と書ける。ただし、$\boldsymbol{x}$はトラスの頂点の変位を並べた80行のベクトルであり、$\boldsymbol{F}$は各頂点(ノード)に作用する外力を並べたベクトル。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{39} \\ u_{40} \\ v_{40} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \vdots \\ F_{y39} \\ F_{x40} \\ F_{y40} \end{bmatrix} \tag{9.4.2}$$

※ ちなみに、質量マトリクスMや剛性マトリクスKの具体的な中身については、興味があれば「有限要素法」に関する本を読んでもらえればと思います。

多自由度系の過渡応答の計算

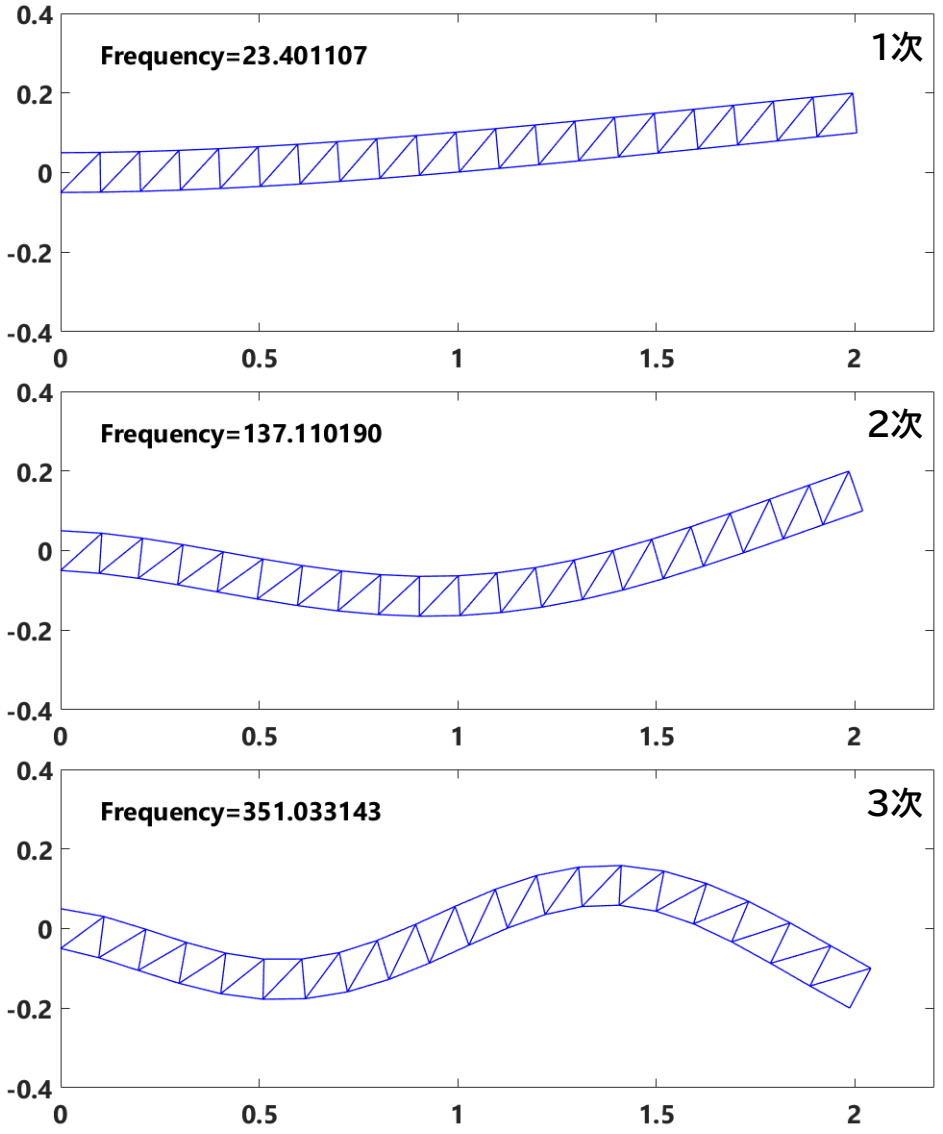
★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する



固有角振動数Ω_iと固有振動モードϕ_i $(i = 1 \sim 80)$ は次式から求められる。

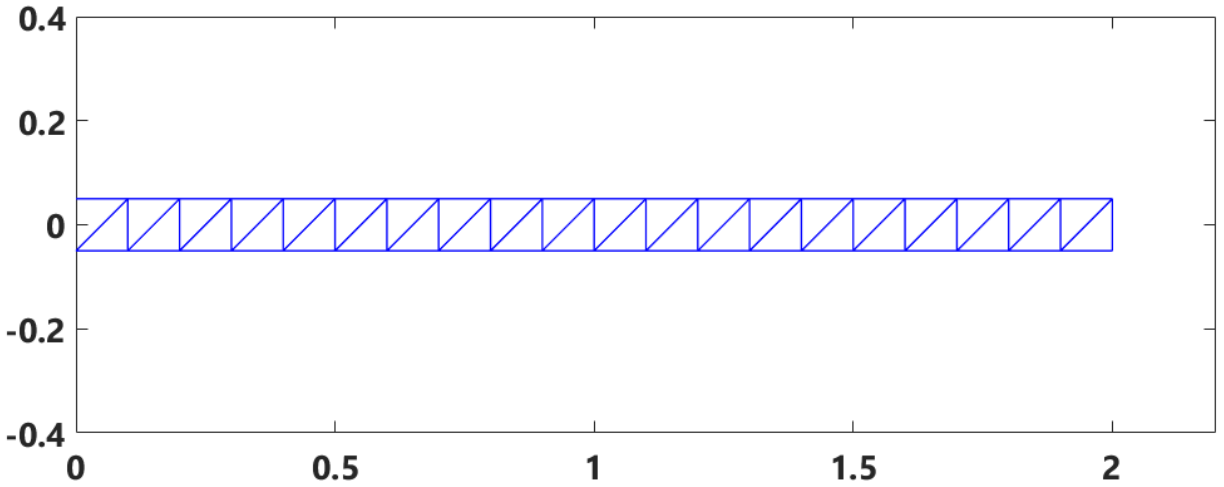
$$\Omega_i{}^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_i \quad , \quad \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i = 1 \qquad (9.4.3)$$

また、固有振動モードを図示すると右のようになる（トラスの縦は$10\mathrm{cm}$, トラスは直径$1\mathrm{cm}$、厚さ$1.0\mathrm{mm}$の中空の棒で、ヤング率は$70\mathrm{GPa}$、密度は$2700\mathrm{kg/m^3}$）。



多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する



いま、モード外力 f_i は

$$\beta_i \equiv \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{F}(t) \tag{9.4.4}$$

で定義され、このとき、モード方程式は

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + \Omega_i{}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.4.5}$$

と書ける。この微分方程式を解いて、時々刻々のw_iを求める。そして、時々刻々の$\boldsymbol{x}$と$\dot{\boldsymbol{x}}$を式(9.4.6)で求める。

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} w_i \boldsymbol{\phi}_i \ , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{w}_i \boldsymbol{\phi}_i \quad , \quad N = 80 \tag{9.4.6}$$

式(9.4.5)は1自由度系なので、第3回第4章で求めた状態遷移関係

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \tag{3.4.1}$$

$$\boldsymbol{z}_n = \begin{bmatrix} w_i(t_n) \\ \dot{w}_i(t_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n = \begin{bmatrix} \beta_i(t_n) \\ \beta_i(t_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{9.1.16}$$

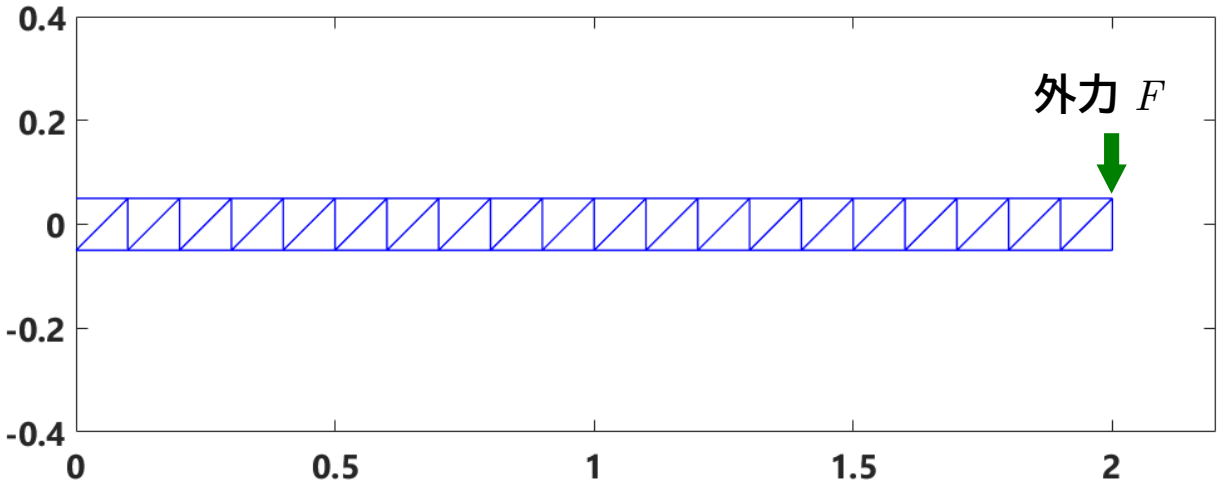
を用いて、効率的に解を求めることができる。 その際、変位xおよび$\dot{x}$の初期値　x_0およびv_0がわかっていれば、モード座標とモード速度の初期値は、式(9.1.13)で求められる。

$$w_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0 \ , \quad \dot{w}_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0 \tag{9.1.13}$$

多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する

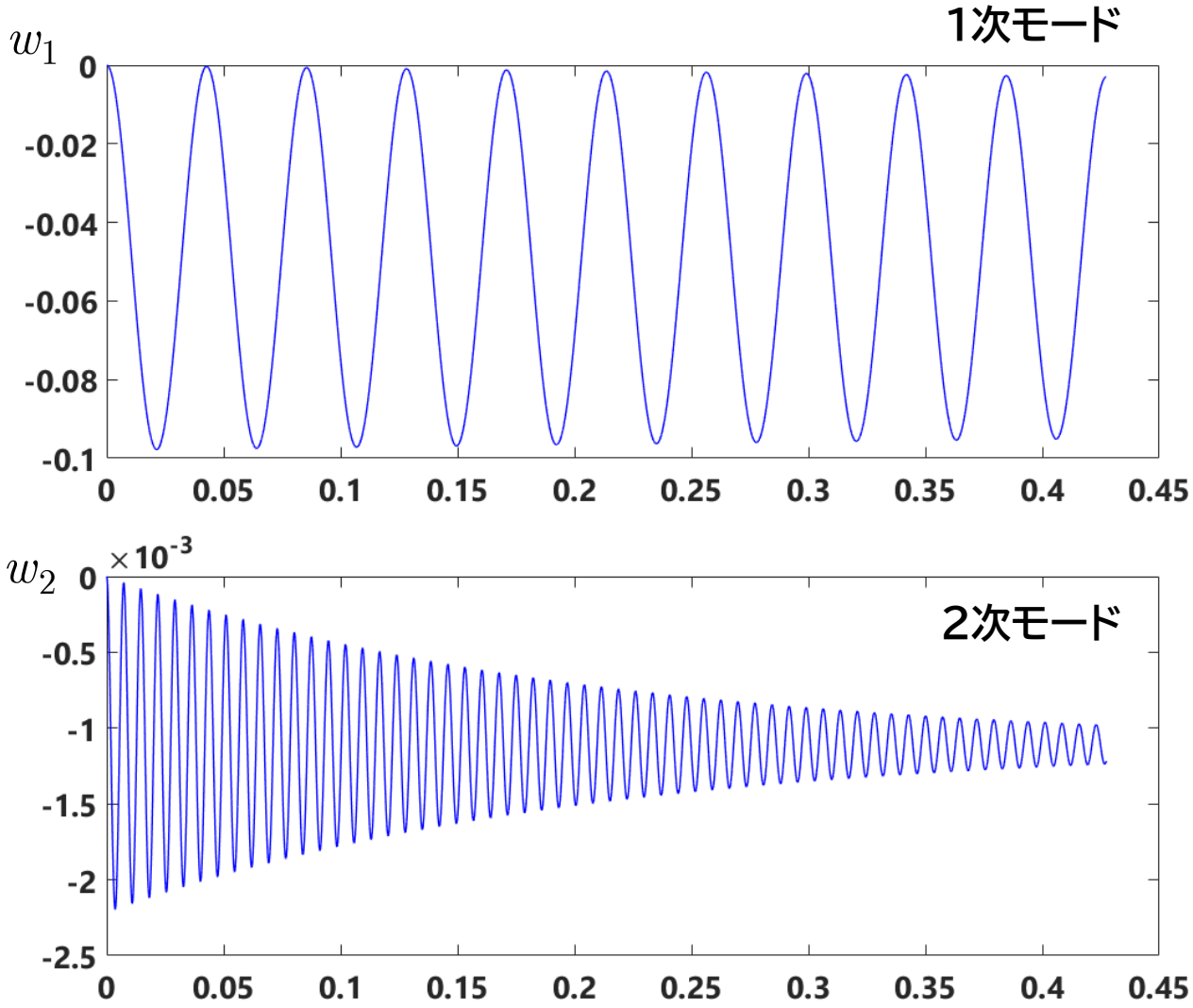
【例題】ステップ応答



$$F = 500\mathrm{N} \tag{9.4.7}$$

$$\zeta_i = \frac{0.001}{\Omega_1}\Omega_i \tag{9.4.8}$$

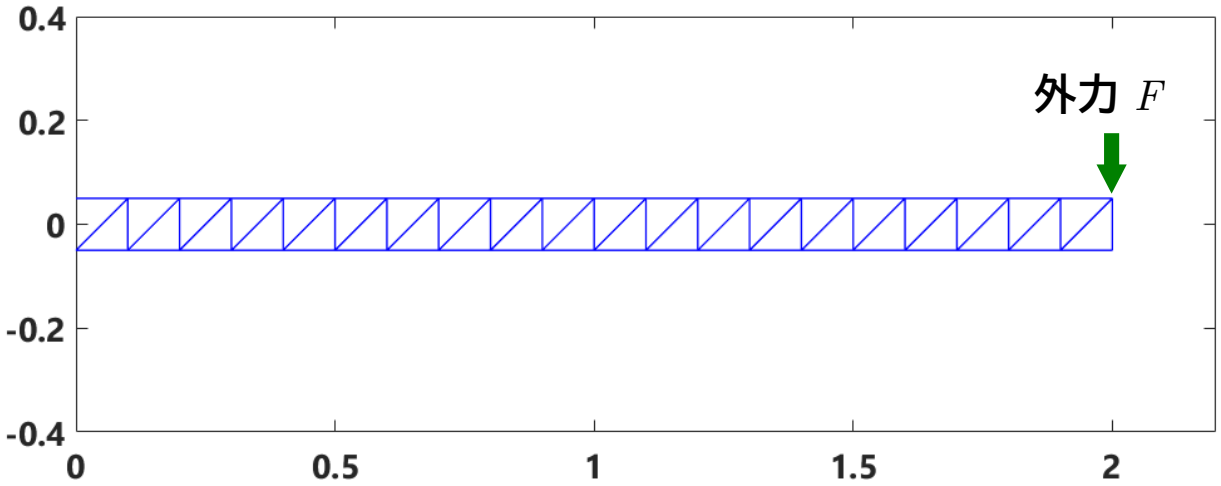
とすると（すなわち、1次の減衰比が0.001になるような剛性比例減衰を仮定すると）、モード座標の時間変化は次のようになる。



多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する

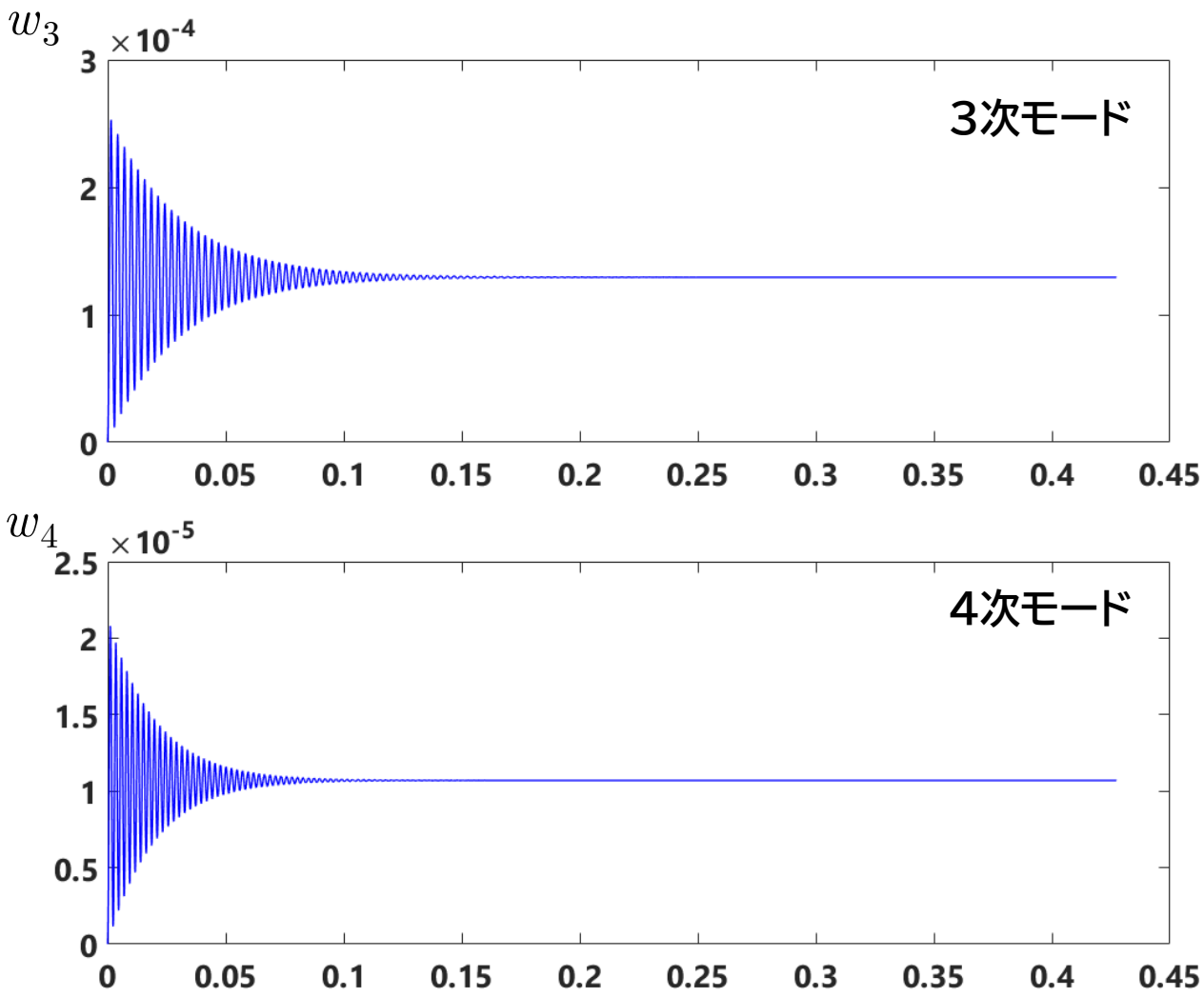
【例題】ステップ応答



$$F = 500\mathrm{N} \tag{9.4.7}$$

$$\zeta_i = \frac{0.001}{\Omega_1}\Omega_i \tag{9.4.8}$$

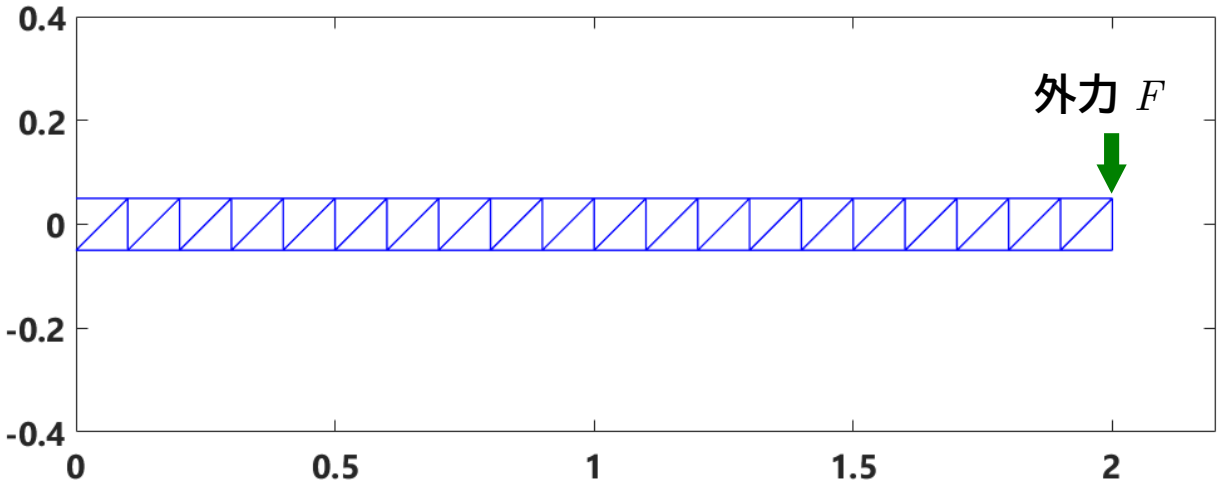
とすると（すなわち、1次の減衰比が0.001になるような**剛性比例減衰**を仮定すると）、モード座標の時間変化は次のようになる。

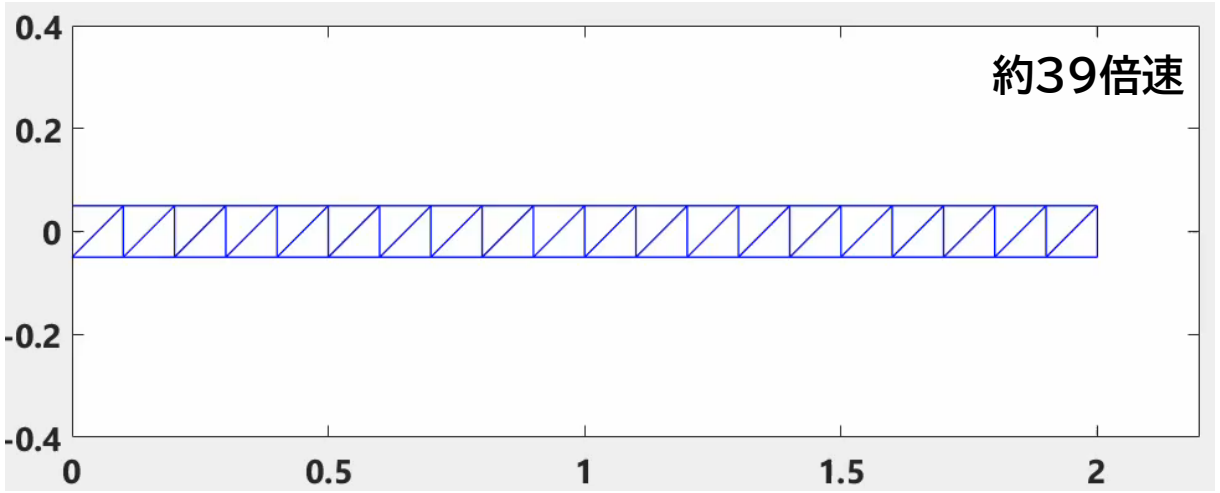


多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する

【例題】ステップ応答





そして、次式で変位ベクトル x を求めればよい。

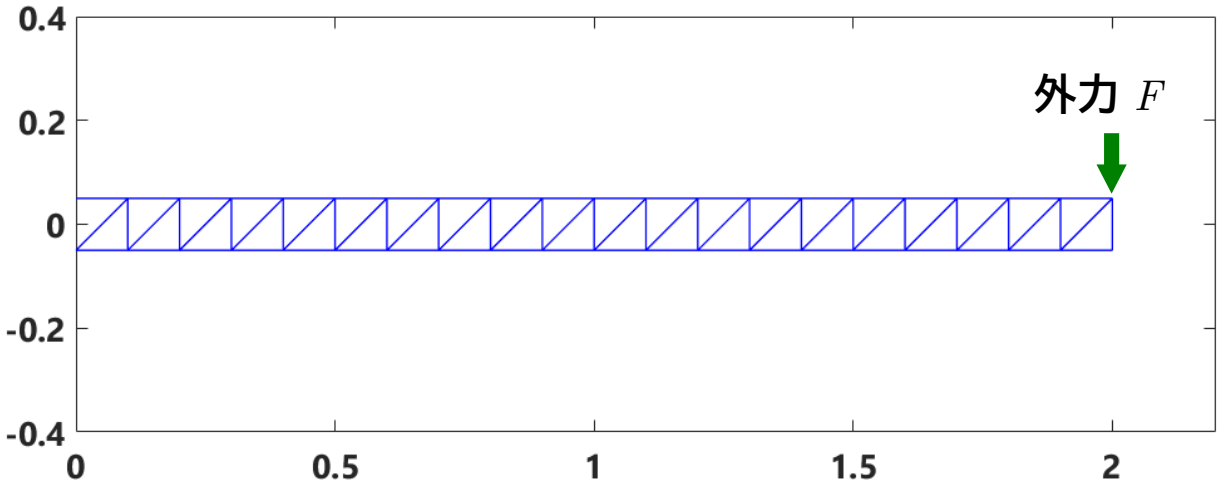
$$x = \sum_{i=1}^{80} w_i \phi_i \qquad (9.4.9)$$

実際に計算して描画すると、 トラスの振動は右上の動画の通り。

多自由度系の過渡応答の計算

★モード座標を求めて元の“座標”に“写像”する

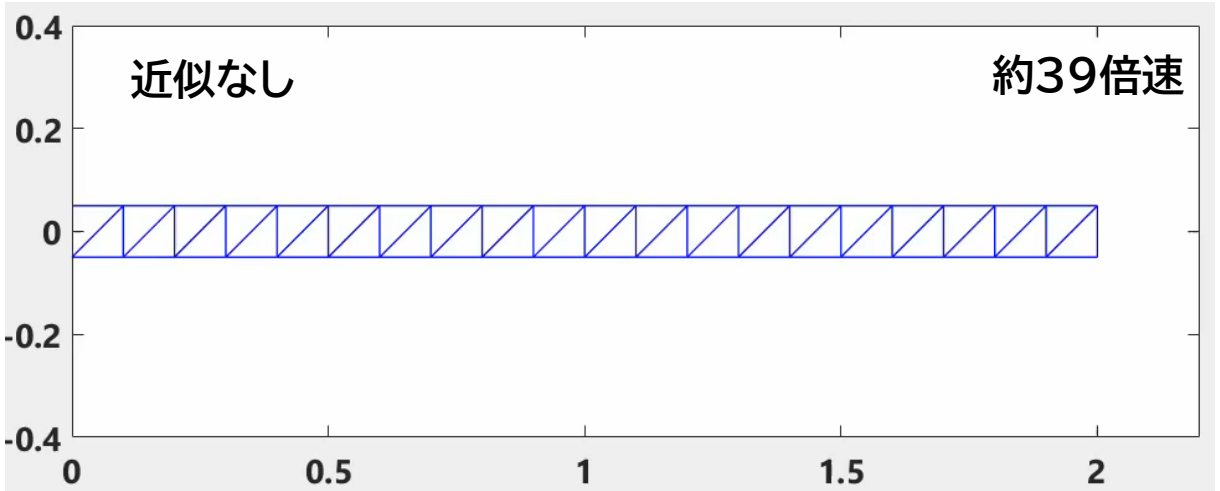
【例題】ステップ応答

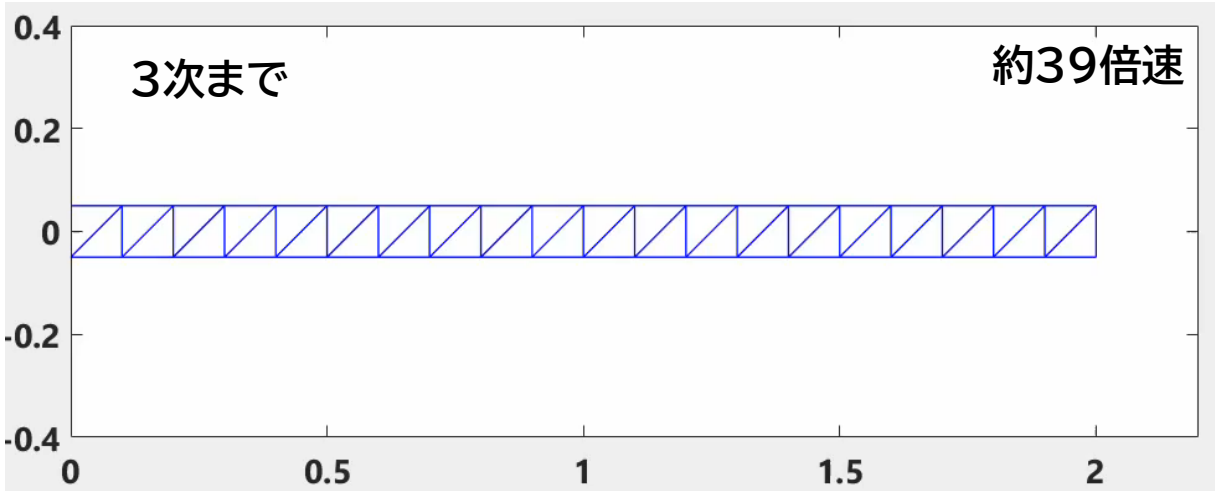


3次モードまでで近似するとすると、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} w_i \boldsymbol{\phi}_i \qquad (9.4.9)$$

このときのトラスの振動は右下の動画の通り。たった3つだけでもよくあってる！





第3章のまとめ

- 減衰が直交条件を満たす場合、モード方程式は式$(9.4.5)$

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i = \beta_i(t) \tag{9.4.5}$$

のように書くことができ、第3回第4章で学んだ状態遷移関係式

$$\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \tag{3.4.1}$$

を用いてモード座標を計算し、式$(9.4.6)$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} w_i \boldsymbol{\phi}_i \ , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{w}_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{9.4.6}$$

によって物理的な変位を求めることができる。

- 高周波の振動があまり生じないような運動であれば、 式$(9.4.6)$のモードの和をより少ないモード数(N までではなく、より少ないモード数までの和)にすることで、計算時間を短縮した効率的な計算をすることが可能である。

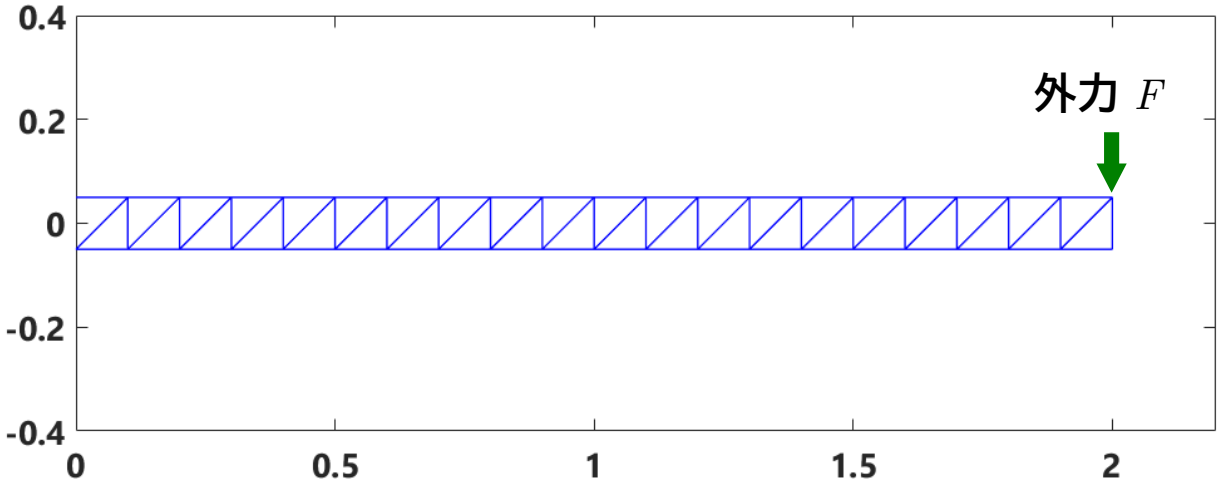
付録　ステップ応答とインパルス応答

付録の学修目標

★ モード法を用いて、ステップ応答およびインパルス応答を求めることができる。

ステップ応答の厳密解

★外力が定数であれば厳密解を求めることができる



この例題では、そもそも、

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -F \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \beta_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{F} = -[\boldsymbol{\phi}_i]_{80} F \tag{9.A.1}$$

となって、f_i は定数。したがって、モード方程式

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + \Omega_i{}^2 w_i = \beta_i \tag{9.A.2}$$

の解を

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} w_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} \tag{9.A.3}$$

とすれば、特解 z^* は定数であり、

$$\boldsymbol{z}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_i}{\Omega_i{}^2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.A.4}$$

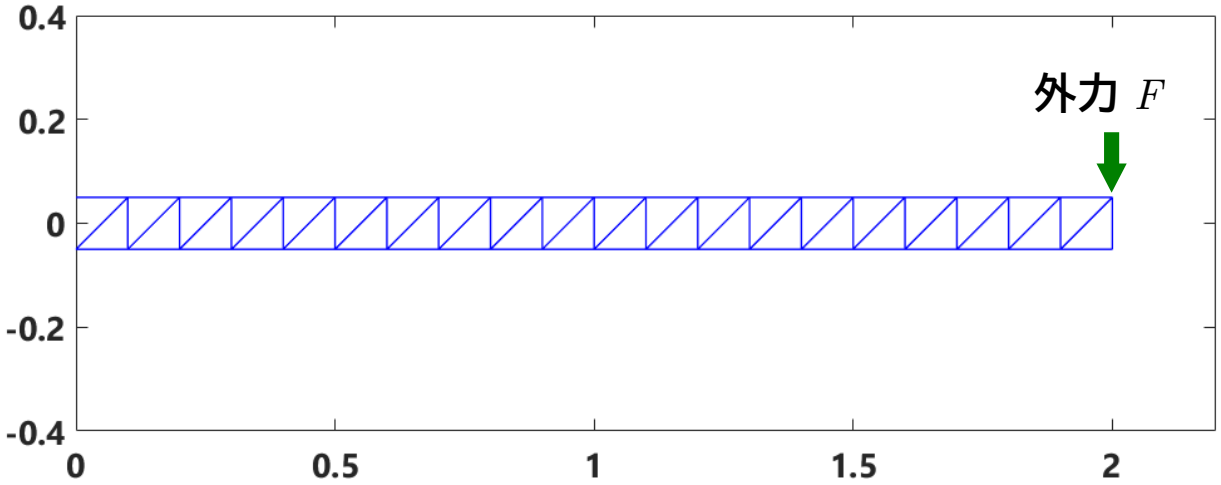
斉次解 $\tilde{z}$ は、第2回第4章で求めた通り、

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q} \quad , \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{9.A.5}$$

$$\begin{cases} B_{11} \equiv e^{-\zeta_i \Omega_i t}\left[c(t) + \zeta_i s(t)\right] \\ B_{12} \equiv e^{-\zeta_i \Omega_i t}\,\dfrac{s(t)}{\Omega_i} \quad , \quad B_{21} \equiv -\Omega_i e^{-\zeta_i \Omega_i t} s(t) \\ B_{22} \equiv e^{-\zeta_i \Omega_i t}\left[c(t) - \zeta_i s(t)\right] \\ c \equiv \cos\left(\sqrt{1-\zeta_i{}^2}\,\Omega_i t\right), \quad s \equiv \dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta_i{}^2}\,\Omega_i t\right)}{\sqrt{1-\zeta_i{}^2}} \end{cases} \tag{9.A.6}$$

ステップ応答の厳密解

★外力が定数であれば厳密解を求めることができる



$$\boldsymbol{z}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_i}{{\Omega_i}^2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.A.4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q} \quad , \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{9.A.5}$$

そして、一般解は、

$$\boldsymbol{z} = \tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q} + \boldsymbol{z}^* \tag{9.A.7}$$

$\boldsymbol{x}$の初期値は$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{0}$であるので，　$\boldsymbol{z}$の初期値は

$$\boldsymbol{z}(0) = \begin{bmatrix} w_i(0) \\ \dot{w}_i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\boldsymbol{\phi}_i}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) \\ {\boldsymbol{\phi}_i}^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.A.8}$$

であり，

$$\boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{I} \tag{9.A.9}$$

であるので，式(9.A.7)より，

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{z}^* \tag{9.A.10}$$

つまり，

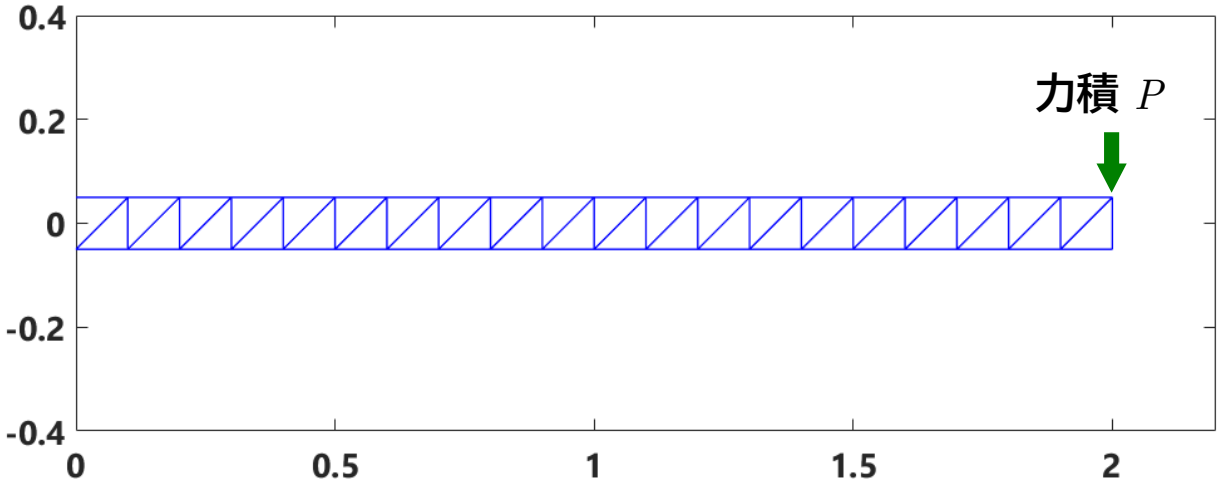
$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{z}^* \tag{9.A.11}$$

したがって，解は

$$\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{I}]\boldsymbol{z}^* = [\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_i}{{\Omega_i}^2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.A.12}$$

インパルス応答の厳密解

★外力が定数であれば厳密解を求めることができる



上図のように、 片持ちとラスの先端に衝撃荷重を与えたときの応答(インパルス応答)は、 衝撃による初速度を与えられた自由振動となる。実際、運動方程式より、

$$\int_{-0}^{+0}(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})dt=\int_{-0}^{+0}\boldsymbol{F}dt \tag{9.A.13}$$

つまり、

$$\boldsymbol{M}\left[\dot{\boldsymbol{x}}(+0)-\dot{\boldsymbol{x}}(-0)\right]+\boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{x}(+0)-\boldsymbol{x}(-0)\right]=\int_{-0}^{+0}\boldsymbol{F}dt \tag{9.A.14}$$

ここで、

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(+0)=\boldsymbol{v}_0\ ,\ \ \dot{\boldsymbol{x}}(-0)=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}(+0)=\boldsymbol{x}(-0)=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{9.A.15}$$

であるので、衝撃による力積ベクトルを$\boldsymbol{P}$とすれば、

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{P} \tag{9.A.16}$$

すなわち、

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{9.A.17}$$

により求められる。そして、このときのモード座標の初速度は次式で求められる。

$$\dot{w}_i(0)=\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{P} \tag{9.A.18}$$

あとは、初期値を

$$\boldsymbol{z}(0)=\begin{bmatrix}w_i(0)\\ \dot{w}_i(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{P}\end{bmatrix} \tag{9.A.19}$$

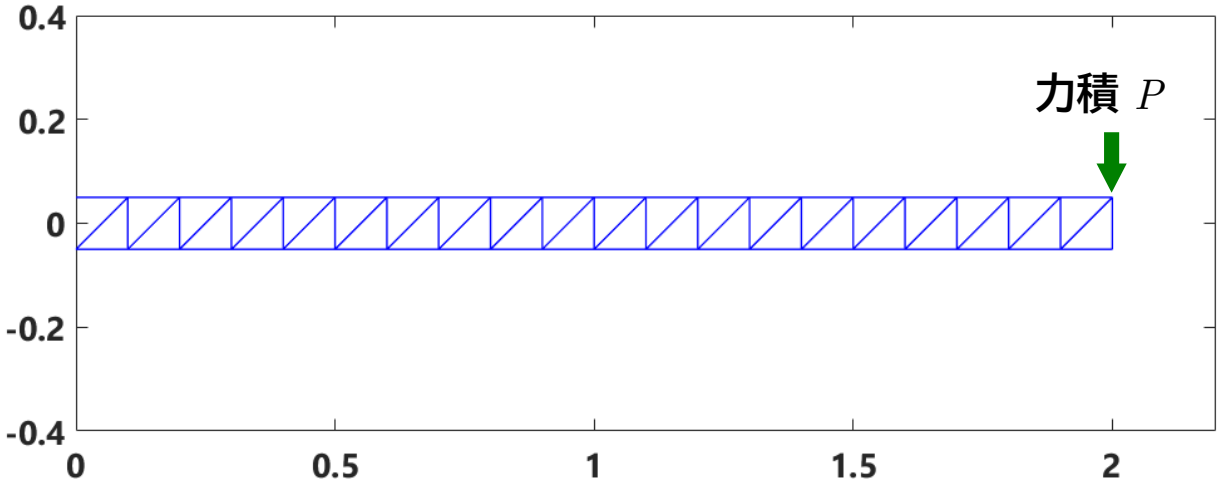
として、モード方程式

$$\ddot{w}_i+2\zeta_o\Omega_i\dot{w}_i+\Omega_i{}^2w_i=0 \tag{9.A.20}$$

を解けばよい。つまり、

インパルス応答の厳密解

★外力が定数であれば厳密解を求めることができる



$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} w_i(t) \\ \dot{w}_i(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \tag{9.A.21}$$

付録のまとめ

- ステップ応答は、モード方程式の厳密解

$$\begin{bmatrix} w_i(t) \\ \dot{w}_i(t) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{F}}{\Omega_i{}^2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.A.11}$$

を用いて，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} w_i \boldsymbol{\phi}_i \ , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{w}_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{9.4.6}$$

- インパルス応答は，モード方程式の厳密解

$$\begin{bmatrix} w_i(t) \\ \dot{w}_i(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{P} \end{bmatrix} \tag{9.A.20}$$

を用いて，式(9.4.6)で与えられる．

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第9回　モード法の基礎

2025年6月9日(月)2限

課題

2025年6月15日(日)18時00分締切

[1] 質量が$9\mathrm{kg}$で固有振動数が$120\mathrm{Hz}$のバネ・マス・ダンパー系1と、質量が$1.5\mathrm{kg}$で固有振動数が$0.2\mathrm{Hz}$　のバネ・マス・ダンパー系を直列に連結した2自由度系の振動試験をしたところ、 1次の共振点付近の減衰比が0.01，2次の共振点付近の減衰比が0.004であることがわかった。 いま、系1のバネを$2\mathrm{mm}$、系2のバネを$3\mathrm{mm}$だけ伸ばして静かに手を離した。次の問いに答えなさい。

（1）この2自由度系の固有振動数、ならびに、正規化された固有振動モードベクトルを求めなさい。（1点）

（2）静かに手を離したときの1次および2次のモード座標の値を求めなさい。（1点）

（3）手を離してから1分後の1次および2次のモード座標の値を求めなさい。（1点）

（4）手を離してから1分後の系2のバネの伸びを求めなさい。（2点）

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第9回　　モード法の基礎

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第10回　刺激係数と有効質量

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第10回の学修目標

★ 多自由度系の自由振動の特徴を説明できる。

★ 有効質量の概念について説明できる。

★ 刺激係数の計算法について説明できる。

★ 有効質量の計算法について説明できる。

★ 有効質量の必要性について説明できる。

（★刺激係数の必要性について説明できる。）

第10回の全体構成

第1章　有効質量の概念

第2章　刺激係数と有効質量

第3章　刺激係数と有効質量の計算例

第4章　有効質量の利用例

付録　　刺激係数の利用例

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第10回　刺激係数と有効質量

2025年6月16日(月)2限

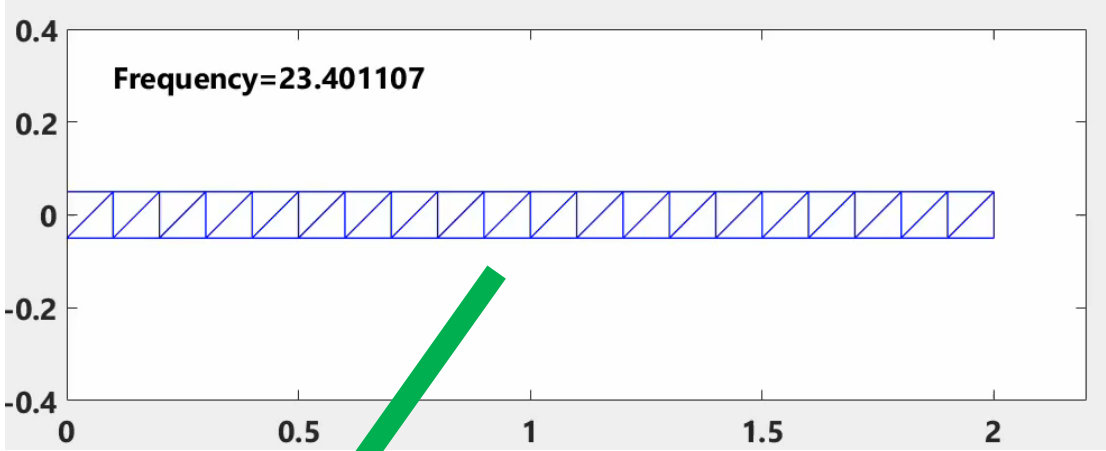
第1章　有効質量の概念

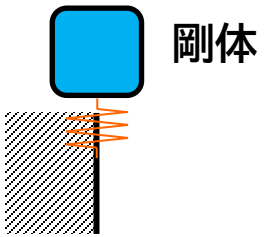
第1章の学修目標

★ 有効質量について説明できる。

土台に対する影響が大きいモードはどれか？

★各モードの振動を土台に一つの剛体がついている振動と同等とみなすと・・・





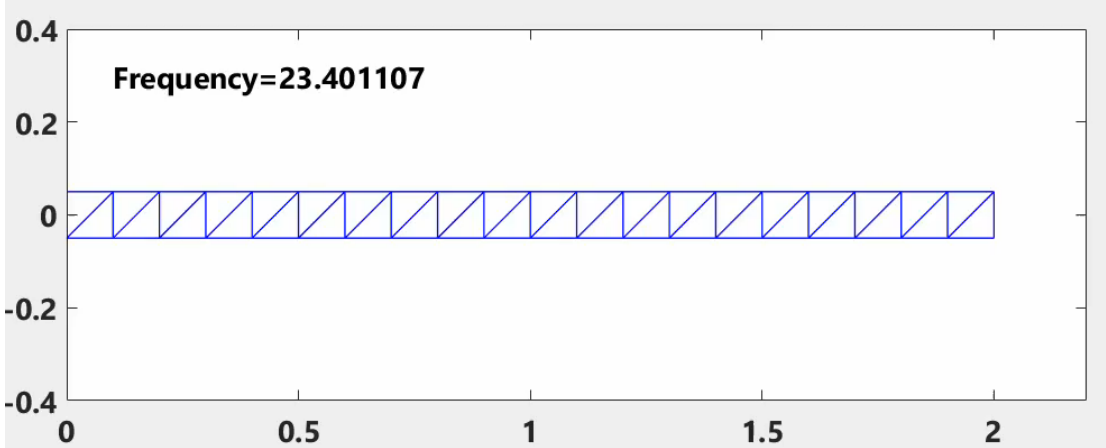
土台＝衛星本体

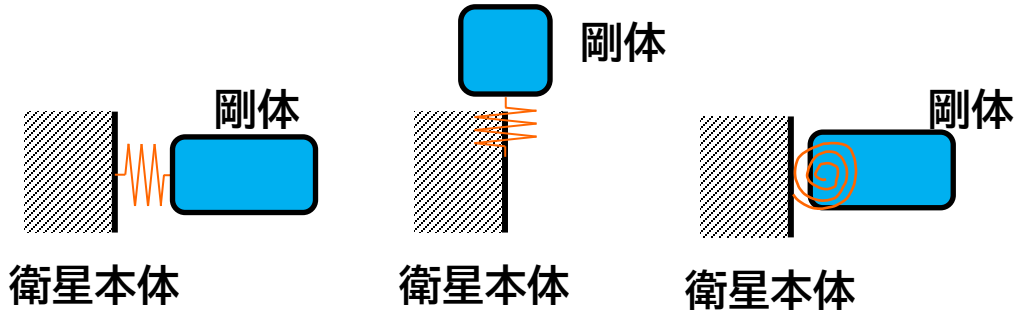
例えば、衛星本体に左図のようなトラスが連結されているとすると、トラスが1次モードで振動したとき、衛星本体に与える影響は大きいか？

当然、衛星に与える影響は振幅によって異なるが、衛星本体に質点（あるいは剛体）が結合しているのと等価とみなして、その質点の質量（あるいは慣性モーメント）を求めれば、影響が大きいか小さいかの評価はできるはず（例えば、等価な質量が大きければ、影響は大きいはず）。

土台に対する影響が大きいモードはどれか？

★各モードの振動を土台に一つの剛体がついている振動と同等とみなすと・・・



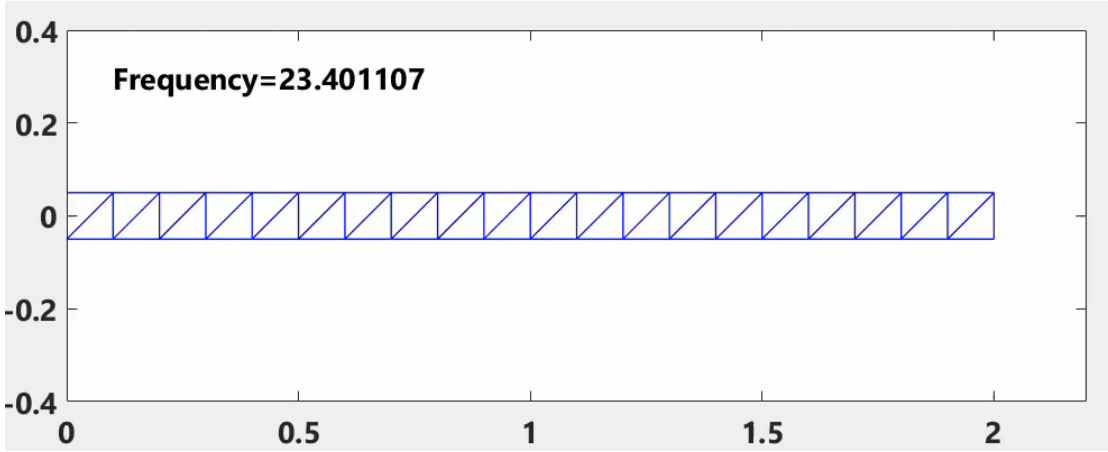


例えば、 トラスの1次モードを 剛体・バネ系で置き換える場合、①x方向に振動する際の等価質量、②y方向に振動する際の等価質量、 ③z軸まわりに回転する際の慣性モーメントをそれぞれ求める。なお、①～③の剛体・バネ系の固有振動数はトラスの固有振動数と同じものとする。

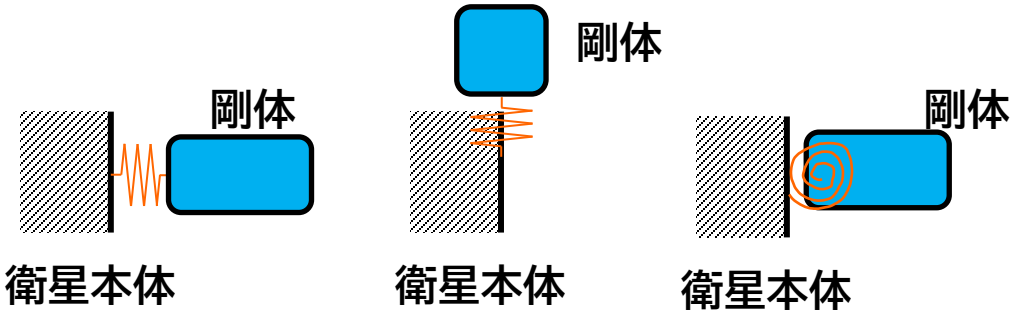
このとき、 等価質量や等価慣性モーメントを有効質量（effective mass）と呼ぶ。 つまり、有効質量は1つのモードにつき3種類ある（3次元運動を考える場合であれば並進3方向、回転3方向の6種類）。

土台に対する影響が大きいモードはどれか？

★各モードの振動を土台に一つの剛体がついている振動と同等とみなすと・・・



土台＝衛星本体



有効質量が小さければ、「ローカルにちょっと振動しているだけなので、無視しても大丈夫だろう」となる。 逆に、比較的大きいと、「姿勢制御に影響を与えるので、このモードの振動はちゃんと考慮して制御すべき」となる。

モードによっては、例えば、 y 軸方向の並進と z 軸まわりの回転が連成しているような振動もあり得る。そのような振動は、有効質量をみればわかる（第4章で確認）。

力学的には、土台（衛星）が付属物（トラス）から受ける、慣性力や慣性力によるモーメントの大きさに 対応したもの（正の相関があるもの）と考えるとよい。

第1章のまとめ

- 有効質量とは、各振動モードの振動を、ある固定点に 取り付けられたバネ・マス系（回転バネ・回転マス系）で近似した場合の等価な質量（慣性モーメント）である。
- したがって、 各振動モードの有効質量は並進自由度と回転自由度のそれぞれについて定義される（平面運動であれば、 並進は2方向, 回転は1軸周りで合計3つ）。
- 有効質量をみることで、例えば、ある物体に振動体を取り付けた場合、各振動モードの振動が物体にどれくらいの影響を与えるかを イメージすることができる。

2025年6月16日(月)2限

第2章　刺激係数と有効質量

第2章の学修目標

★ 多自由度系の自由振動の特徴を説明できる。

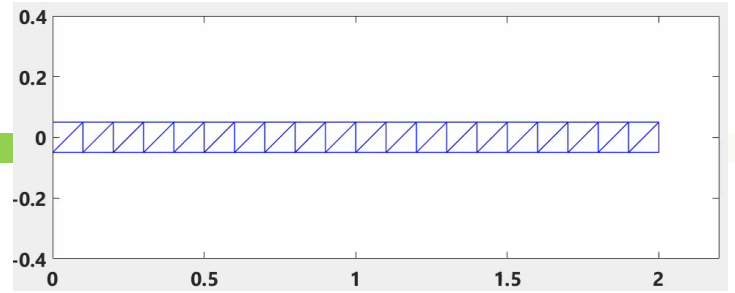
★ 並進運動と質量マトリクスとの関係について説明できる。

★ 回転運動と質量マトリクスとの関係について説明できる。

★ 刺激係数の定義を説明できる。

★ 有効質量の定義を説明できる。

多自由度系の自由振動の力学的エネルギ



★減衰がない場合の自由振動は固有振動の和

一般に、自由運動の運動方程式が

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{10.2.1}$$

と書かれる非減衰多自由度線形系の力学的エネルギ Π は式(10.2.2)のように書ける。

$$\Pi = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{10.2.2}$$

この系の自由振動は固有振動の和になるので、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \left[A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)\right] \tag{10.2.3}$$

と書ける。あるいは、ちょっと見栄えを変えると、

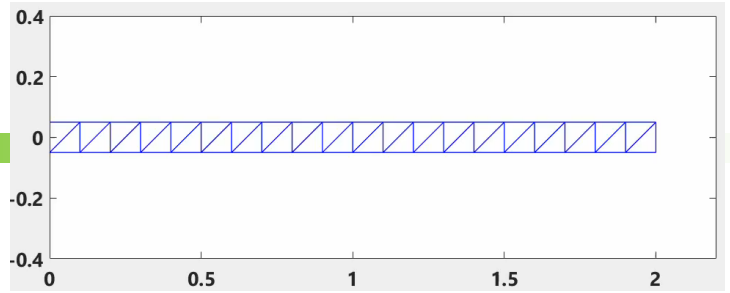
$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i \boldsymbol{\phi}_i \cos(\Omega_i t + \theta_i) \tag{10.2.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i \Omega_i \boldsymbol{\phi}_i \sin(\Omega_i t + \theta_i) \tag{10.2.5}$$

と書ける（ちなみに、ϕ_i の次元は質量の$1/2$乗の逆数であるので、$\tilde{r}_i$の次元は質量の$1/2$乗に長さをかけたものである）。これらを式(10.2.2)に代入し、第6回第3章、第4章で学んだ、モードの直交性と正規性を利用すると、

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{r}_i\tilde{r}_j\Omega_i\Omega_j \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_j \sin(\Omega_i t+\theta_i)\sin(\Omega_j t+\theta_j) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{r}_i\tilde{r}_j \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_j \cos(\Omega_i t+\theta_i)\cos(\Omega_j t+\theta_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{r}_i\tilde{r}_j\Omega_i\Omega_j \delta_{ij} \sin(\Omega_i t+\theta_i)\sin(\Omega_j t+\theta_j) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{r}_i\tilde{r}_j{\Omega_i}^2\delta_{ij} \cos(\Omega_i t+\theta_i)\cos(\Omega_j t+\theta_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i{}^2{\Omega_i}^2 \sin^2(\Omega_i t+\theta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i{}^2{\Omega_i}^2 \cos^2(\Omega_i t+\theta_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i{}^2{\Omega_i}^2
\end{aligned} \tag{10.2.6}$$

多自由度系の自由振動の力学的エネルギ



★減衰がない場合の自由振動は固有振動の和

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i \boldsymbol{\phi}_i \cos(\Omega_i t + \theta_i) \tag{10.2.4}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i{}^2 \Omega_i{}^2 \tag{10.2.6}$$

式(10.2.4)、(10.2.6)からわかる通り、各モードの振動は独立している(連成していない)。

一般に、1自由度バネ・マス系の場合は、

$$x = r\cos(\omega_o t + \theta)\,, \quad \dot{x} = -r\omega_o \sin(\omega_o t + \theta) \tag{10.2.7}$$

であり、力学的エネルギは

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} mr^2 {\omega_o}^2 \cos^2(\omega_o t + \theta) + \frac{1}{2} kr^2 \sin^2(\omega_o t + \theta) \\ &= \frac{1}{2} mr^2 {\omega_o}^2 \cos^2(\omega_o t + \theta) + \frac{1}{2} m{\omega_o}^2 r^2 \sin^2(\omega_o t + \theta) \\ &= \frac{1}{2} mr^2 {\omega_o}^2 \end{aligned} \tag{10.2.8}$$

これに対し、多自由度系の場合のi次のモードの力学的エネルギΠ_iは式(10.2.6)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \tilde{r}_i{}^2 \Omega_i{}^2 \tag{10.2.6}$$

であるので、物理的な"振幅"rと、それに対応したモード振幅$\tilde{r}_i$の比がわかっていたら、i次モードの振動を1自由度バネ・マス系の振動に置き換えたときの等価的な質量μ_iを定義することができる。これはまさに有効質量(effective mass)に相当するもの！

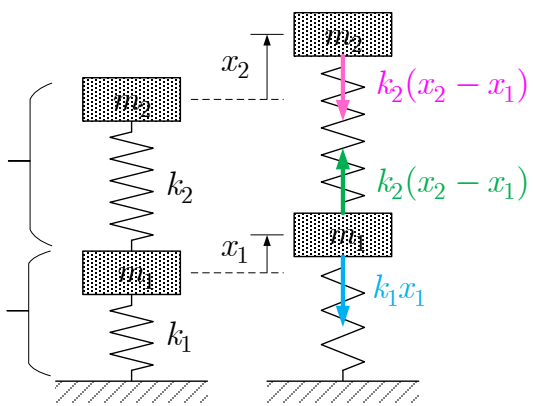
$$\tilde{r}_i{}^2 = \mu_i r^2 \qquad or \qquad \mu_i = \left(\frac{\tilde{r}_i}{r}\right)^2 \tag{10.2.9}$$

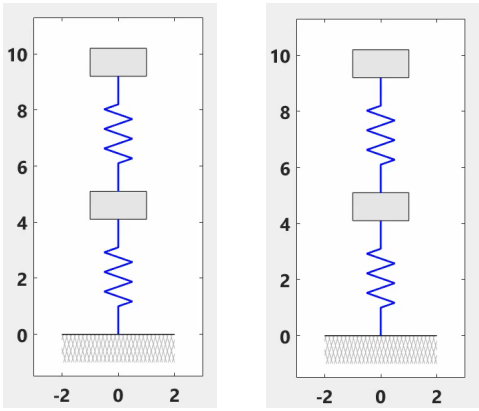
そして、刺激係数(participation factor、結合係数とも呼ばれる)は、振幅の比に相当するもの！

$$p_i = \frac{\tilde{r}_i}{r} \tag{10.2.10}$$

刺激係数と有効質量の具体的な計算法

★各モードの振動を単振動で表す？





1次

2次

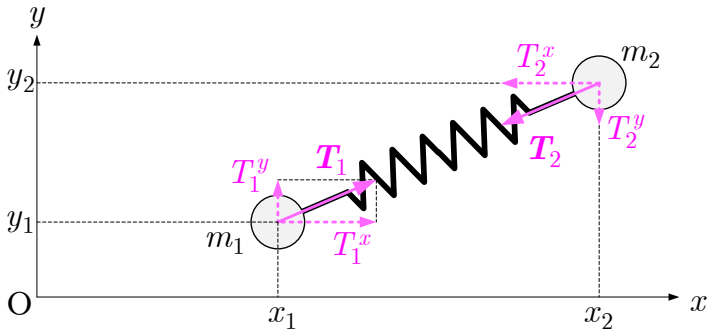
刺激係数 $p_i^x = \tilde{r}_i \,/\, r$ は、 質点1、2が一つの「塊まり」として振幅 r で振動する場合、つまり、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r\cos\Omega t \\ r\cos\Omega t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\Omega t$$

となると仮想的に考えた場合の i 次の振動モードの「割合」を表している。そこで、振幅の部分を次式のように、1次と2次のモードの振幅に振り分けてみてはどうか？

$$r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{r}_1\boldsymbol{\phi}_1 + \tilde{r}_2\boldsymbol{\phi}_2$$

★平面問題の場合



上図のような二自由度系の平面運動の場合は

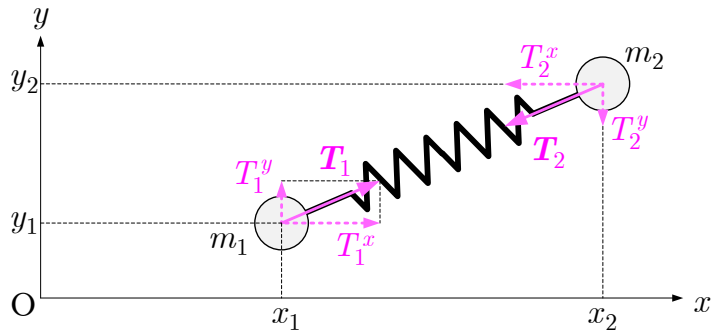
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^x \\ T_1^y \\ T_2^x \\ T_2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.2.11}$$

であり、変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ と質量マトリクス M は

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{10.2.12}$$

刺激係数と有効質量の具体的な計算法

★平面運動における振動：動く方向が1方向ではなく2方向に増えるだけ



$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{10.2.12}$$

系全体が x 方向に $r\cos\Omega t$ で振動するベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = r\cos(\Omega t)\boldsymbol{e}_x \quad , \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{10.2.13}$$

ここで、$r\boldsymbol{e}_x$ を固有振動モード $\boldsymbol{\phi}_k$ で分解すると，

$$r\boldsymbol{e}_x = \sum_{k=1}^{N} \tilde{r}_k \boldsymbol{\phi}_k \quad , \quad N = 4 \tag{10.2.14}$$

（$\boldsymbol{\phi}_k$ の完全性より、この式を満たす $\tilde{r}_k$ が存在）。

式(10.2.14)の両辺に左から $\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}$ をかけると、

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}r\boldsymbol{e}_x = \sum_{k=1}^{N} \tilde{r}_k \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k = \sum_{k=1}^{N} \tilde{r}_k \delta_{ik} = \tilde{r}_i \tag{10.2.15}$$

これより、 x 方向に一様に振動するときの i 次モードの刺激係数 p_i^x と有効質量 μ_i^x は

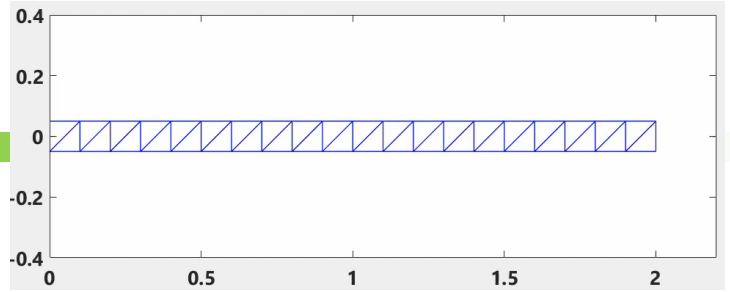
$$p_i^x = \frac{\tilde{r}_i}{r} = \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x \tag{10.2.16}$$

$$\mu_i^x = \left(\frac{\tilde{r}_i}{r}\right)^2 = (p_i^x)^2 = \left(\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x\right)^2 \tag{10.2.17}$$

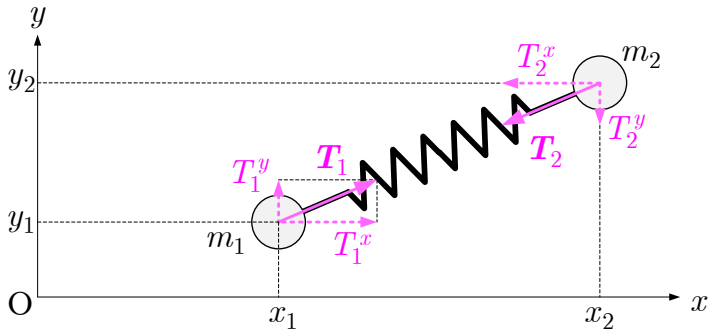
同様に、 y 軸方向に振動するときの刺激係数 p_i^y と有効質量 μ_i^y は

$$\begin{cases} p_i^y = \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_y \quad , \quad \mu_i^y = \left(\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_y\right)^2 \\ \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{10.2.18}$$

刺激係数と有効質量の具体的な計算法



★回転振動の場合



$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{10.2.12}$$

振動系を「バネが取り付けられた剛体」とみなすとすれば、平面運動の場合、「x 方向の並進運動」、「y 方向の並進運動」に加えて、「z軸まわりの回転運動」がある。

系全体が原点を中心として反時計回りに 単位回転するベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ については次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \\ -y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10.2.19}$$

z 軸まわりに一様に振動するときの i 次モードの等価的な慣性モーメント μ_i^θ は次式を満たす。

$$p_i^\theta = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_\theta \ , \quad \mu_i^\theta = (p_i^\theta)^2 \tag{10.2.20}$$

ちなみに、原点まわりの慣性モーメントを I_z とすれば,

$$\boldsymbol{e}_\theta{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_\theta = \cdots = m_1(x_1{}^2 + y_1{}^2) + m_2(x_2{}^2 + y_2{}^2) = I_z \tag{10.2.21}$$

「だから何だ？」と思うかもしれませんが・・・

有効質量の和

★固有振動モードの直交性・完全性を用いると・・・

$$\boldsymbol{x} = r\cos(\Omega t)\boldsymbol{e}_x \quad , \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{10.2.13}$$

$$\mu_i^x = \left(\frac{\tilde{r}_i}{r}\right)^2 = (p_i^x)^2 = \left(\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x\right)^2 \tag{10.2.17}$$

さて、有効質量の和を考えてみると、

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i^x = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x)^T(\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{e}_x{}^T\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_x{}^T\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{e}_x \tag{10.2.22}$$

であるが、ここで、

$$\boldsymbol{W} \equiv \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M} \tag{10.2.23}$$

とおくと、任意のkに対して、

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\phi}_k = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i\boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i\delta_{ik}$$

$$= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_k \tag{10.2.24}$$

となるので, ϕ_k の完全性より、

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M} \tag{10.2.25}$$

となることがわかる。よって、式(10.2.22)より、

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i^x = \boldsymbol{e}_x{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x \tag{10.2.26}$$

ここで、$\boldsymbol{e}_x{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x$ を計算すると、

$$\boldsymbol{e}_x{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= m_1 + m_2 = M \tag{10.2.27}$$

となって、総質量と一致する。したがって、

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i^x = M \tag{10.2.28}$$

つまり、 有効質量の和は総質量に一致する。

有効質量の和

★固有振動モードの直交性・完全性を用いると・・・

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^x = M \tag{10.2.28}$$

同様に、

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^y = \boldsymbol{e}_y{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_y = M \tag{10.2.29}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i^\theta = \boldsymbol{e}_\theta{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_\theta = I_z \tag{10.2.30}$$

つまり、各方向の有効質量の和はそれぞれ総質量、あるいはその方向軸まわりの慣性モーメントに一致する。

第2章のまとめ(1/2)

- 減衰がない場合の 多自由度系の 自由振動のエネルギは 固有振動のエネルギ和になっている。
- 個々の固有振動のエネルギは、1つの剛体にバネが取り付けられた1自由度系の並進振動や回転振動と同様の式となっている。
- 上記の個々の固有振動の等価的な振幅と、系全体の振動を1つの並進振動あるいは回転振動とみなしたときの等価的な振幅との比は 刺激係数と呼ばれる。
- また、上記の並進振動や回転振動のエネルギから、等価的な質量や慣性モーメントを定義することができる。それは総じて有効質量と呼ばれる。
- 有効質量は刺激係数の2乗になっている。したがって，並進の刺激係数の単位は $\mathrm{kg}^{1/2}$ であり、回転の刺激係数の単位は $\mathrm{kg}^{1/2}\cdot\mathrm{m}$ である。

第2章のまとめ(2/2)

- 平面運動の場合であれば、x 軸方向、y 軸方向、z 軸まわりの単位移動（回転)ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$ 、$\boldsymbol{e}_y$ 、$\boldsymbol{e}_\theta$ として、刺激係数と有効質量は次式で定義できる。

$$p_i^x = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_x \quad , \quad \mu_i^x = \left(\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_x \right)^2 \qquad (10.2.16, 17)$$

$$p_i^y = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_y \quad , \quad \mu_i^y = \left(\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_y \right)^2 \qquad (10.2.18)$$

$$p_i^\theta = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \mu_i^\theta = (p_i^\theta)^2 \qquad (10.2.20)$$

- 有効質量の和は、(バネ・マス系の場合であれば)総質量、あるいは総慣性モーメントに等しい。

2025年6月16日(月)2限

第3章　刺激係数と有効質量の計算例

第3章の学修目標

★ 刺激係数の計算法について説明できる。

★ 有効質量の計算法について説明できる。

刺激係数と有効質量の一般的な算出法

★剛体変位方向ベクトルを適切に設定するだけ

質量マトリクスをM、正規化されたi次の固有振動モードをϕ_i、x方向の剛体変位方向ベクトルをe_x、y方向の剛体変位方向ベクトルをe_yとすれば、

$$p_i^x = \phi_i{}^T M e_x \quad , \quad \mu_i^x = (p_i^x)^2 \tag{10.2.17}$$

$$p_i^y = \phi_i{}^T M e_y \quad , \quad \mu_i^y = (p_i^y)^2 \tag{10.2.18}$$

$$p_i^\theta = \phi_i{}^T M e_\theta \quad , \quad \mu_i^\theta = (p_i^\theta)^2 \tag{10.2.21}$$

であった。例えば、第9回第3章で取り上げた片持ちのトラスの場合、

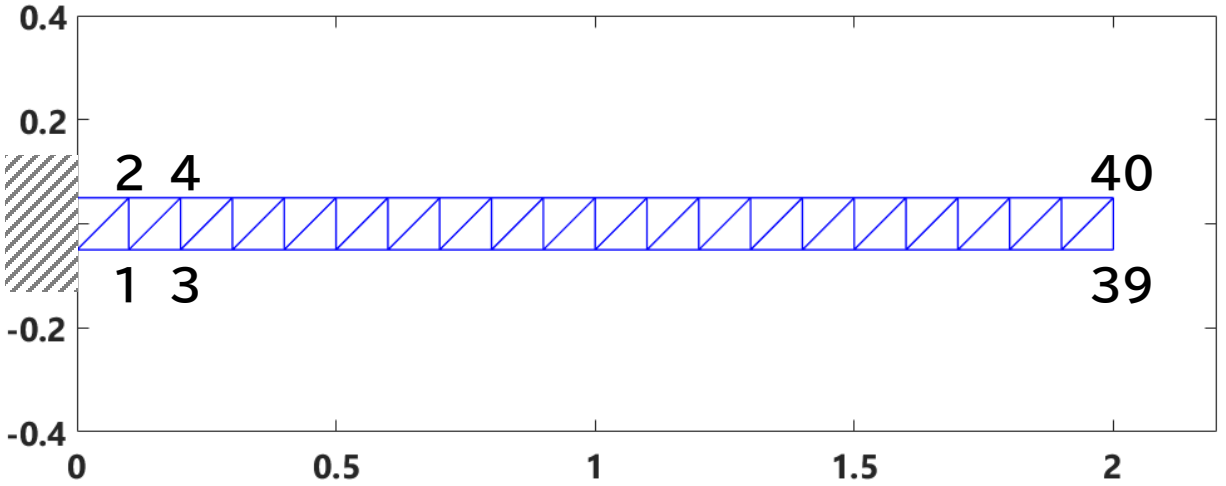
$$x = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \cdots & v_{39} & u_{40} & v_{40} \end{bmatrix}^T \tag{10.3.1}$$

であるので、

$$e_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{10.3.2}$$

$$e_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{10.3.3}$$

$$e_\theta = \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \cdots & -y_{40} & x_{40} \end{bmatrix}^T \tag{10.3.4}$$



z方向の変形も考えるのであれば、

$$x = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & \cdots & u_{40} & v_{40} & w_{40} \end{bmatrix}^T \tag{10.3.5}$$

$$e_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.3.6}$$

$$e_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.3.7}$$

$$e_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.3.8}$$

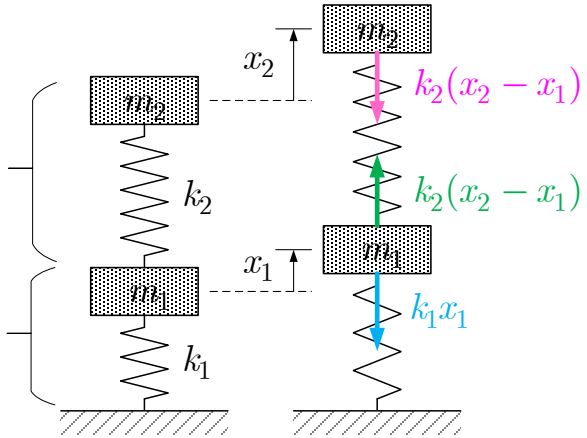
$$e_{\theta x} = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 & 0 & \cdots & -z_{40} & y_{40} \end{bmatrix}^T \tag{10.3.9}$$

$$e_{\theta y} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & -x_1 & z_2 & \cdots & 0 & -x_{40} \end{bmatrix}^T \tag{10.3.10}$$

$$e_{\theta z} = \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & 0 & y_2 & \cdots & -z_{40} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{10.3.11}$$

計算例

★2自由度バネ・マス系の場合



変位ベクトル$\boldsymbol{x}$と質量マトリクス$\boldsymbol{M}$は

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{10.3.12}$$

であり、2自由度系の固有振動数をf_1、f_2として、

$$\begin{cases} \mu \equiv \dfrac{m_2}{m_1}, \quad \nu \equiv \dfrac{f_{o2}}{f_{o1}}, \quad \alpha_1 \equiv \dfrac{f_1}{f_{o1}}, \quad \alpha_2 \equiv \dfrac{f_2}{f_{o1}} \\ \gamma \equiv 1 + (1+\mu)\nu^2 \end{cases} \tag{10.3.13}$$

と定義すれば、無次元固有振動数は

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} \tag{10.3.14}$$

であり、固有振動モードは

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_2}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} \tag{10.3.15}$$

正規化すると、

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{{\boldsymbol{z}_1}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_1}} \boldsymbol{z}_1, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{{\boldsymbol{z}_2}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_2}} \boldsymbol{z}_2 \tag{10.3.16}$$

刺激係数や有効質量を求める際には

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{10.3.17}$$

として、

$$p_i^x = {\boldsymbol{\phi}_i}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_x \quad , \quad \mu_i^x = (p_i^x)^2 \tag{10.3.18}$$

を計算すればよい。

計算例

★2自由度バネ・マス系の場合

【例題10.3.1】質量が$m_1 = 10\,\mathrm{kg}$、 固有振動数が$f_{o1} = 200\,\mathrm{Hz}$のバネ・マス系1と、質量が$m_2 = 0.1\,\mathrm{kg}$、固有振動数が$f_{o2} = 100\,\mathrm{Hz}$のバネ・マス系1の有効質量を求めなさい。

【略解】系1に対する系2の質量比μ、固有振動数比νは

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{0.1}{10} = 0.01 \quad , \quad \nu = \frac{f_{o2}}{f_{o1}} = \frac{100}{200} = 0.5 \tag{10.3.19}$$

であり、

$$\gamma = 1 + (1+\mu)\nu^2 = 1 + (1+0.01) \times 0.5^2 = 1.2525 \tag{10.3.20}$$

を用いると、2自由度系の無次元固有振動数は

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} = \cdots = 0.499170 \\ \alpha_2 = \sqrt{\dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\nu^2}}{2}} = \cdots = 1.001663 \end{cases} \tag{10.3.21}$$

従って、固有振動モードは

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 0.00082965 \\ 0.25 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} \nu^2 - {\alpha_1}^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} -0.75332965 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{10.3.22}$$

よって、

$$\begin{cases} {\boldsymbol{z}_1}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0.00082965 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00082965 \\ 0.25 \end{bmatrix} \\ \quad = \begin{bmatrix} 0.00082965 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \times 0.00082965 + 0 \times 0.25 \\ 0 \times 0.00082965 + 0.1 \times 0.25 \end{bmatrix} \\ \quad = \begin{bmatrix} 0.00082965 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0082965 \\ 0.025 \end{bmatrix} \\ \quad = 0.00082965 \times 0.0082965 + 0.25 \times 0.025 \\ \quad = 0.006256883 \\ {\boldsymbol{z}_2}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{z}_2 = \cdots = 5.681305617 \end{cases} \tag{10.3.23}$$

計算例

★2自由度バネ・マス系の場合

$$\begin{cases}\sqrt{\boldsymbol{z}_1{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_1}=\sqrt{0.006256883}=0.079100463\\ \sqrt{\boldsymbol{z}_2{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_2}=\sqrt{5.681305617}=2.383548954\end{cases}\tag{10.3.24}$$

となるので、正規化された固有振動モードは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_1&=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_1{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_1}}\boldsymbol{z}_1=\frac{1}{0.079100463}\begin{bmatrix}0.00082965\\0.25\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0.010488562\\3.160537772\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{10.3.25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_2&=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{z}_2{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_2}}\boldsymbol{z}_2=\frac{1}{2.383548954}\begin{bmatrix}-0.75332965\\0.25\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-0.316053777\\0.104885616\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{10.3.26}$$

よって、1次モードおよび2次モードの（x 方向の並進の）刺激係数は

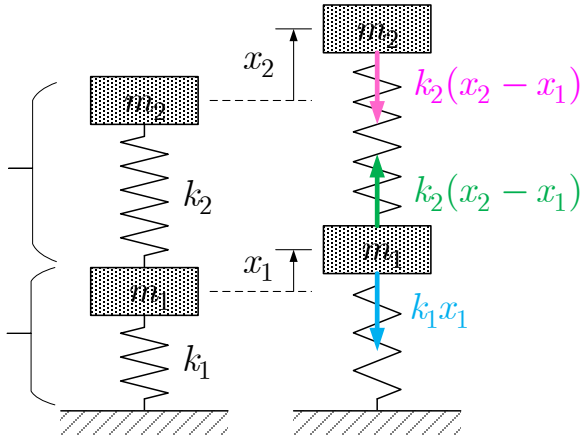
$$\begin{cases}p_1^x=\boldsymbol{\phi}_1{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x\\ \quad=\begin{bmatrix}0.010488562 & 3.160537772\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ \quad=\begin{bmatrix}0.010488562 & 3.160537772\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\times1+0\times1\\0\times1+0.1\times1\end{bmatrix}\\ \quad=\begin{bmatrix}0.010488562 & 3.160537772\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\0.1\end{bmatrix}\\ \quad=0.010488562\times10+3.160537772\times0.1\\ \quad=0.42093939\\ p_2^x=\boldsymbol{\phi}_2{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_x=\cdots=-3.1500492\end{cases}\tag{10.3.27}$$

したがって、有効質量は

$$\begin{cases}\mu_1^x=(p_1^x)^2=0.17719\,\mathrm{kg}\\ \mu_2^x=(p_2^x)^2=9.92281\,\mathrm{kg}\end{cases}\tag{10.3.28}$$

計算例

★2自由度バネ・マス系の場合



$$\begin{cases}\mu_1^x = (p_1^x)^2 = 0.17719\,\mathrm{kg} \\ \mu_2^x = (p_2^x)^2 = 9.92281\,\mathrm{kg}\end{cases} \tag{10.3.28}$$

【考察】

$$\begin{cases}m_1 = 10\,\mathrm{kg} \quad , \quad m_2 = 0.1\,\mathrm{kg} \\ f_{o1} = 200\,\mathrm{Hz} \quad , \quad f_{o2} = 100\,\mathrm{Hz}\end{cases} \tag{10.3.19}$$

$$\alpha_1 = 0.499170 \quad , \quad \alpha_2 = 1.00166 \tag{10.3.21}$$

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix}0.010488562 \\ 3.160537772\end{bmatrix} \tag{10.3.25}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix}-0.316053777 \\ 0.104885616\end{bmatrix} \tag{10.3.26}$$

これらの式より、2自由度系の固有振動数は

$$\begin{cases}f_1 = \alpha_1 f_{o1} = 0.499170 \times 200 = 99.83\,\mathrm{Hz} \\ f_2 = \alpha_2 f_{o1} = 1.00166 \times 200 = 200.33\,\mathrm{Hz}\end{cases} \tag{10.3.29}$$

わずか 1% の質量が付加されただけで、固有振動数がほぼ半分になってしまった！

しかし！、1次の有効質量は$0.177\,\mathrm{kg}$程度と，全体$10.1\mathrm{kg}$に比べて小さい。また、ϕ_1 の成分をみればわかる通り、1次モードでは、質点1はほとんど振動しない。したがって、1次モードは“ローカルな振動”とみなすことができて、無視してもよい！

詳しくは第4章で！

第3章のまとめ

- 剛体変位ベクトル（e_x 等）を適切に設定することで、刺激係数や有効質量を計算することができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第10回　刺激係数と有効質量

2025年6月16日(月)2限

第4章　有効質量の利用例

第4章の学修目標

★ 有効質量の利用法の例について説明できる.

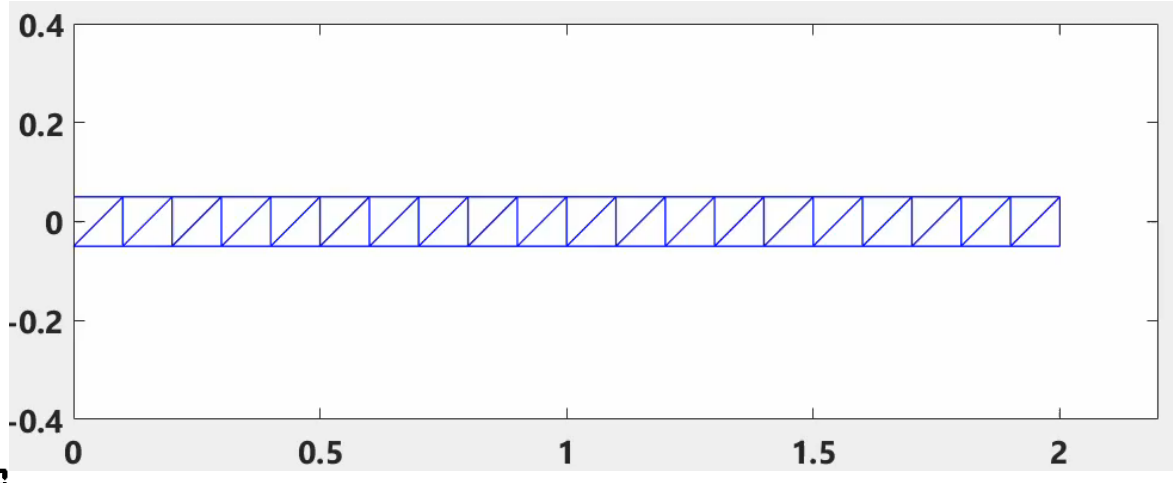
有効質量比

★有効質量の総和に対する個々の有効質量の割合

有効質量比は有効質量を全てのモードの 有効質量の和で割った割合。平面問題であれば、

$$\begin{cases} \mu^x \equiv \sum_{j=1}^{N} \mu_j^x \,, \quad \mu^y \equiv \sum_{j=1}^{N} \mu_j^y \,, \quad \mu^\theta \equiv \sum_{j=1}^{N} \mu_j^\theta \\ \varphi_i^x = \dfrac{\mu_i^x}{\mu^x} \,, \quad \varphi_i^y = \dfrac{\mu_i^y}{\mu^y} \,, \quad \varphi_i^x = \dfrac{\mu_i^\theta}{\mu^\theta} \end{cases} \tag{10.4.1}$$

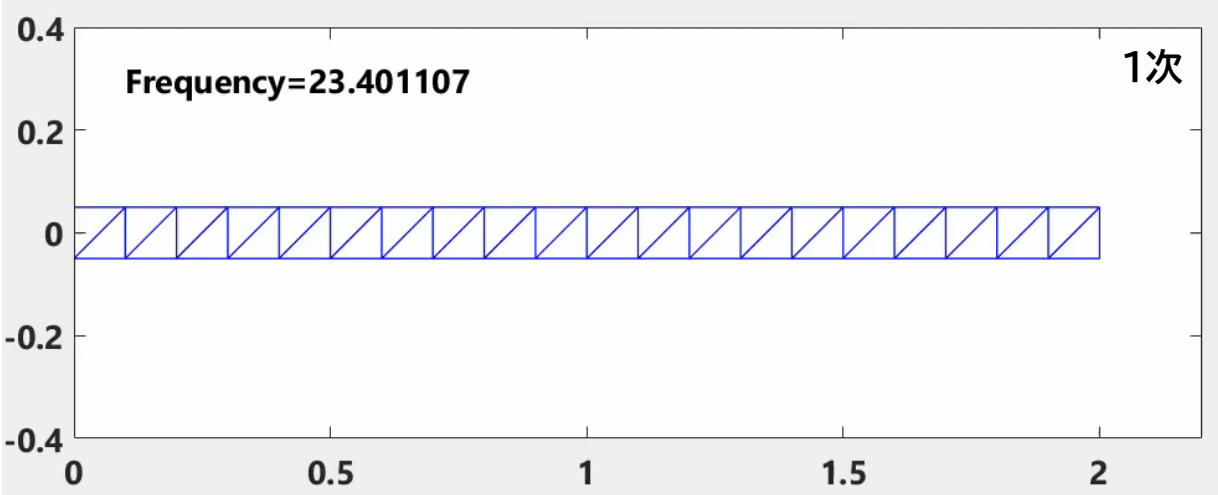
トラスの例で、有効質量比を%表示したものが右の表。
衛星の設計をする際は、例えば、「有効質量比が〇%以上のものを考慮して姿勢制御系の設計を行う」など。

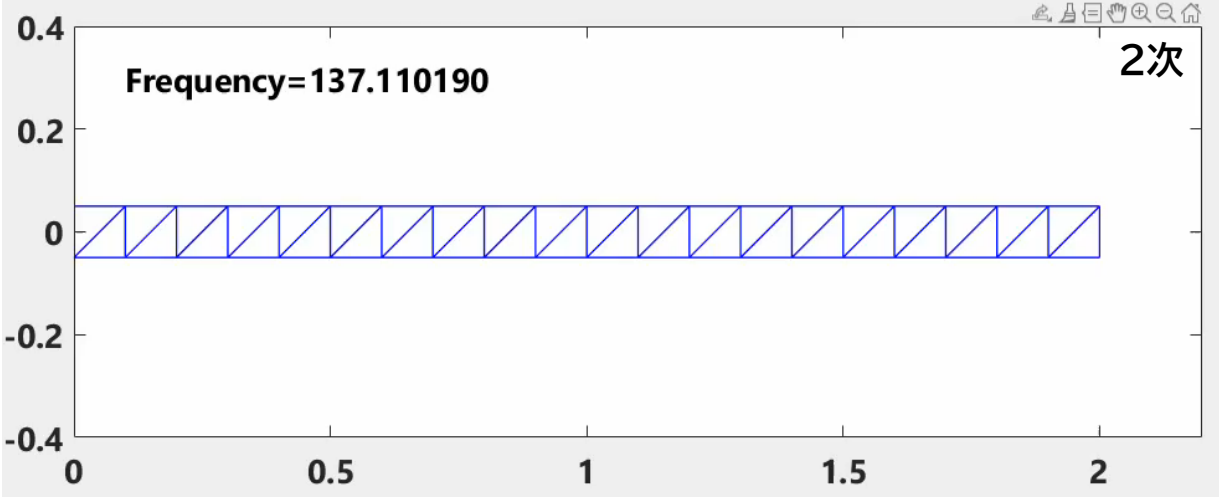


	x 並進	y 並進	z 回転
1	0.000989969	63.71388385	97.25876598
2	0.086571408	20.33003327	2.375263173
3	1.360477479	6.917364385	0.260741092
4	81.36535817	0.07611093	0.013136147
5	0.226041152	3.513233888	0.061089774
6	0.021569973	1.926137698	0.016474052
7	0.858469609	0.951520531	0.003596772
8	8.186232623	0.216859419	0.00376
9	0.028618625	0.741389843	0.002510241
10	0.078459241	0.43033509	0.000755046
11	3.165827706	0.05301053	0.000764159
12	0.000280549	0.314823085	0.000473696
13	0.005894066	0.224687699	0.000282069
14	1.270432702	0.003314962	6.46446E-05

有効質量比

★有効質量の総和に対する個々の有効質量の割合

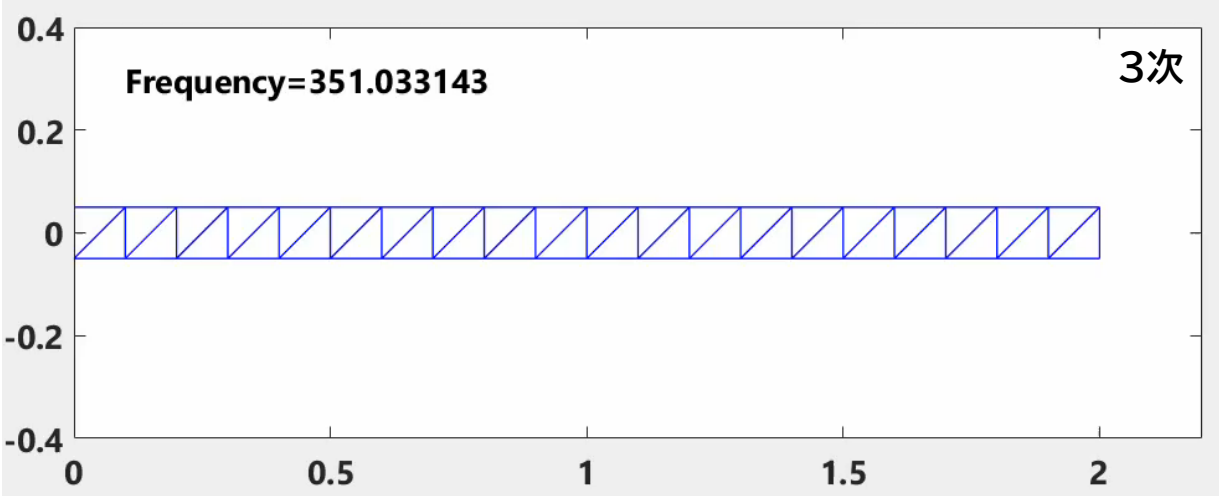


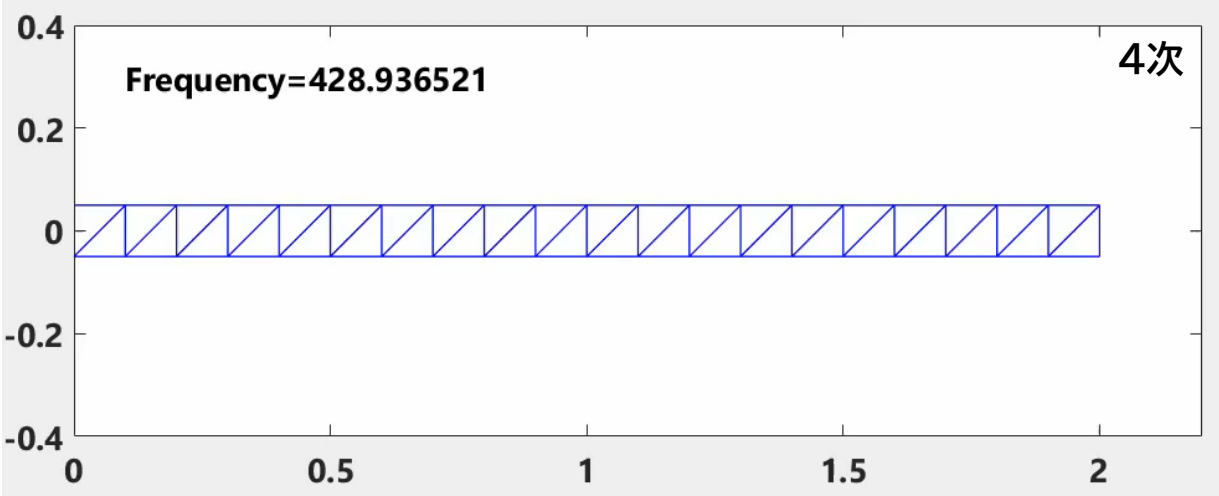


	x 並進	y 並進	z 回転
1	0.000989969	63.71388385	97.25876598
2	0.086571408	20.33003327	2.375263173
3	1.360477479	6.917364385	0.260741092
4	81.36535817	0.07611093	0.013136147
5	0.226041152	3.513233888	0.061089774
6	0.021569973	1.926137698	0.016474052
7	0.858469609	0.951520531	0.003596772
8	8.186232623	0.216859419	0.00376
9	0.028618625	0.741389843	0.002510241
10	0.078459241	0.43033509	0.000755046
11	3.165827706	0.05301053	0.000764159
12	0.000280549	0.314823085	0.000473696
13	0.005894066	0.224687699	0.000282069
14	1.270432702	0.003314962	6.46446E-05

有効質量比

★有効質量の総和に対する個々の有効質量の割合





	x 並進	y 並進	z 回転
1	0.000989969	63.71388385	97.25876598
2	0.086571408	20.33003327	2.375263173
3	1.360477479	6.917364385	0.260741092
4	81.36535817	0.07611093	0.013136147
5	0.226041152	3.513233888	0.061089774
6	0.021569973	1.926137698	0.016474052
7	0.858469609	0.951520531	0.003596772
8	8.186232623	0.216859419	0.00376
9	0.028618625	0.741389843	0.002510241
10	0.078459241	0.43033509	0.000755046
11	3.165827706	0.05301053	0.000764159
12	0.000280549	0.314823085	0.000473696
13	0.005894066	0.224687699	0.000282069
14	1.270432702	0.003314962	6.46446E-05

補足

★剛体変位＝剛体モード

系全体が宙に浮いている場合、 固有振動モードの中に剛体モードが6個(ϕ_1～ϕ_6)だけ存在する。固有振動モードの直交性より、$i>6$のとき、

$$\begin{cases}\phi_i{}^T M\phi_1=\phi_i{}^T M\phi_2=\phi_i{}^T M\phi_3=0\\ \phi_i{}^T M\phi_4=\phi_i{}^T M\phi_5=\phi_i{}^T M\phi_6=0\end{cases} \tag{10.4.2}$$

であるが、ϕ_1～ϕ_6はそれぞれ剛体変位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$、$\boldsymbol{e}_{\theta x}$、$\boldsymbol{e}_{\theta y}$、$\boldsymbol{e}_{\theta z}$ そのものである。固有振動モードの直交性によりので、結局、

$$\begin{cases}\phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_x=\phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_y=\phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_z=0\\ \phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_{\theta x}=\phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_{\theta y}=\phi_i{}^T M\boldsymbol{e}_{\theta z}=0\end{cases} \tag{10.4.3}$$

である、つまり、系全体が宙に浮いている場合、剛体モード以外のモードの有効質量は0となる！そして、剛体モードの有効質量の和は系全体の質量に等しくなる！

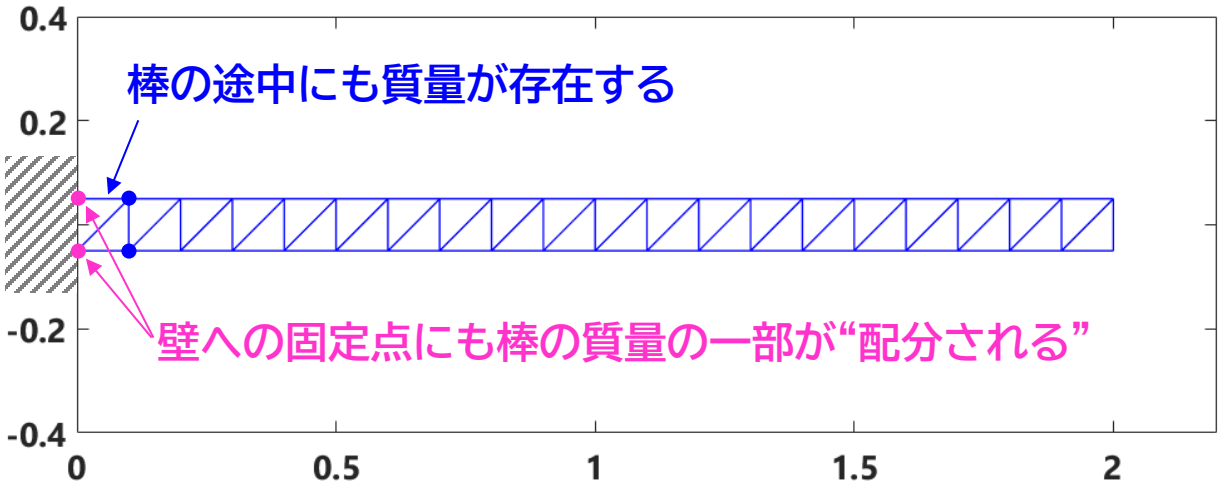
このことからわかる通り、 宙に浮いた物体の有効質量を求めることには意味がないし、有効質量は、主要な物体と付属物の2者がある場合に用いられるべきもの。

★分布質量系の有効質量

バネ・マス系と違って、トラスの場合，頂点と頂点の間(棒の途中)にも質量は存在する。このような場合、有効質量の和は系全体の総質量とは一致しない。

これは、トラスを壁に固定している箇所にも棒の質量の一部が“配分されるから。その影響で，有効質量の和は、わずかながら、系全体の総質量よりも小さくなる(固定点に繋がれた棒の質量の2/3だけ小さくなる)。

これは、有限要素法特有の誤差。



第4章のまとめ

- 有効質量比とは、各方向における全ての振動モードの有効質量の和で各振動モードのその方向の有効質量を割った値である。
- 有効質量比によって、その方向の振動における、その振動モードの 影響の割合を評価することができる。
- 例えば、太陽電池パドルなど衛星の付属物の振動を考慮して姿勢制御を行う場合など、振動を考慮した制御をする場合、どのモードを考慮するかの判断に有効質量比を 用いることができる。すなわち、 有効質量比がある値より大きいモードのみを考慮する、などといった使い方ができる。

付録　　刺激係数の利用例

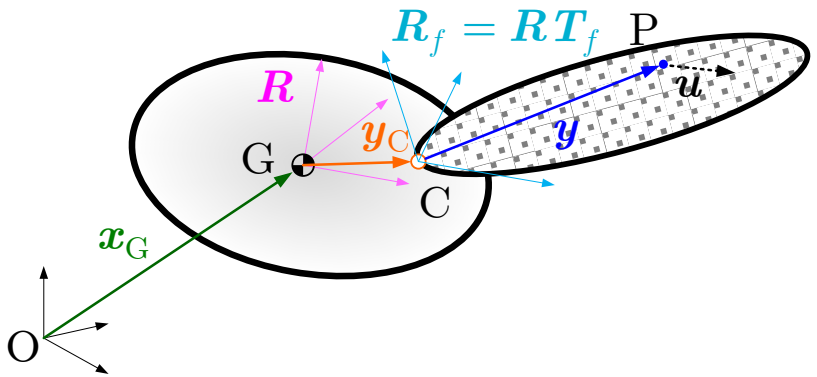
付録の学修目標

★ 刺激係数を用いて、振動する付属物を有する宇宙機の運動を計算する簡易的な手法について説明できる。

この付録では実際の衛星開発に使われている式を理論的に厳密に導いており、その内奥は研究者レベルのものになっています。学部3年生には難しい内容だと思いますが、基本的にはベクトルやマトリクスの計算，積分計算だけですので、数学の得意な人は読んでみてもらえればと思います。

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ



衛星が剛体で伸展マスト等が柔軟構造物であると仮定し、剛体と変形前の柔軟構造物を合わせた系全体の質量中心Gの位置ベクトルを$\boldsymbol{x}_G$、剛体の姿勢マトリクスを$\boldsymbol{R}$とする。このとき、剛体内の点の位置と速度は次のように書ける。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_G + \boldsymbol{R}\boldsymbol{z} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}_G + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z} \tag{10.A.1}$$

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \tag{10.A.2}$$

また、Rを記述する有限回転ベクトルをθ、剛体固定の機体座標系でみた剛体の角速度ベクトルをωとすると、

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) \ , \ \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} \ , \ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta}) \tag{10.A.3}$$

という形に書ける。また、

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}} \quad \text{where} \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.A.4}$$

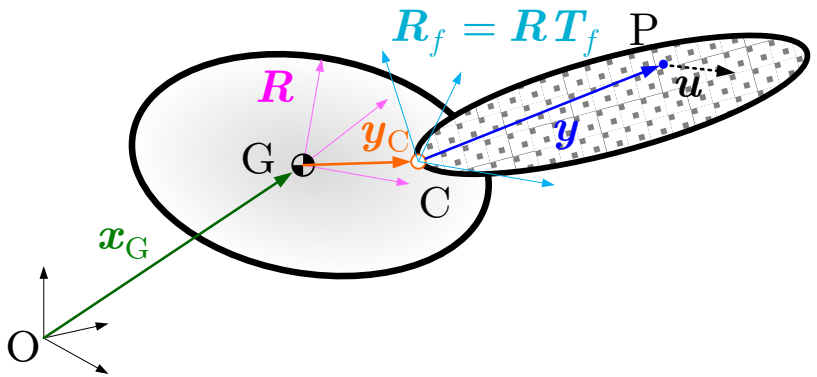
であるので、密度をρとして、剛体のみの運動エネルギは

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2}\int_r \rho(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z})^2 dV \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_r \rho dV\right)\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\left(\int_r \rho\boldsymbol{z}dV\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\int_r -\rho\hat{\boldsymbol{z}}^2 dV\right)\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{10.A.5}$$

ただし、積分領域のrは剛体内であることを意味する。

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ



$\boldsymbol{R}$系において、, 柔軟構造物の根元C（剛体への固定点）の位置ベクトルを$\boldsymbol{y}_C$、 変形前の柔軟構造物に固定した座標系の姿勢マトリクスを$\boldsymbol{T}_f$、点Cを原点とする柔軟構造物座標系$\boldsymbol{T}_f$において、柔軟構造物内 にある任意の点Pの位置ベクトルを$\boldsymbol{y}$、変位ベクトルをuとおくと、点Pの変形後の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_G + \boldsymbol{R}[\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u})] \tag{10.A.6}$$

したがって、速度ベクトルは、

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}_G + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})^{\cdot} \tag{10.A.7}$$

となり、柔軟構造物内の積分領域をfと書くと、柔軟構造物の運動エネルギT_fは次のようになる。

$$\begin{aligned}
T_f &= \frac{1}{2}\int_f \rho\left[\dot{\boldsymbol{x}}_G + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})^{\cdot}\right]^2 dV \\
&= \frac{1}{2}\int_f \rho\left[\dot{\boldsymbol{x}}_G - \boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u})}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}}\right]^2 dV \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_f \rho dV\right)\dot{\boldsymbol{x}}_G{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_G + \dot{\boldsymbol{x}}_G{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\left[\int_f \rho(\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})dV\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f -\rho\widehat{\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u})}^2 dV\right)\boldsymbol{\omega} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f \rho\widehat{\boldsymbol{y}_C + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u})}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{x}}_G{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\boldsymbol{u}dV + \dot{\boldsymbol{x}}_G{}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV
\end{aligned} \tag{10.A.8}$$

ただし、柔軟構造物変形が微小、すなわち、$\|\boldsymbol{y}\| \gg \|\boldsymbol{u}\|$であると仮定すると、上式の$\boldsymbol{u}$を無視できて、次式のようになる。

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ

$$
\begin{aligned}
T_f \approx{}& \frac{1}{2}\left(\int_f \rho dV\right)\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\left[\int_f \rho\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}\right)dV\right] \\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f -\rho\widehat{\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}}^2 dV\right)\boldsymbol{\omega} \\
&+\frac{1}{2}\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f \rho\widehat{\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \\
&+\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\boldsymbol{u}dV + \boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \qquad (10.\mathrm{A}.9)
\end{aligned}
$$

よって、系全体の運動エネルギ T は、

$$
\begin{aligned}
T ={}& T_r + T_f \\
={}& \frac{1}{2}\left(\int_r \rho dV\right)\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\left(\int_r \rho\boldsymbol{z}dV\right) \\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\int_r -\rho\hat{\boldsymbol{z}}^2 dV\right)\boldsymbol{\omega} \\
&+\frac{1}{2}\left(\int_f \rho dV\right)\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\left[\int_f \rho\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}\right)dV\right] \\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f -\rho\widehat{\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}}^2 dV\right)\boldsymbol{\omega} \\
&+\frac{1}{2}\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^T\left(\int_f \rho\widehat{\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \\
&+\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\boldsymbol{u}dV + \boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \\
={}& \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV \\
&+\boldsymbol{\omega}^T\hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\hat{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{u}}dV \\
&+\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{R}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\boldsymbol{u}dV + \boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \qquad (10.\mathrm{A}.10)
\end{aligned}
$$

ただし、M、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{j}$ は系全体の質量、慣性テンソル、慣性一次モーメントベクトルである。

$$
\begin{cases}
M \equiv \displaystyle\int_r \rho dV + \int_f \rho dV \\
\boldsymbol{J} \equiv \displaystyle\int_r -\rho\hat{\boldsymbol{z}}^2 dV + \int_f -\rho\widehat{\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}}^2 dV \\
\boldsymbol{j} \equiv \displaystyle\int_r \rho\boldsymbol{z}dV + \int_f \rho\left(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}\right)dV
\end{cases} \qquad (10.\mathrm{A}.11)
$$

ここで、もし、点Gが質量中心ならば、$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$ であるので、

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\int_{f}\rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^{T}\hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{T}_{f}\int_{f}\rho\dot{\boldsymbol{u}}dV + \boldsymbol{\omega}^{T}\boldsymbol{T}_{f}\int_{f}\rho\hat{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{u}}dV + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T}\boldsymbol{R}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{T}_{f}\int_{f}\rho\boldsymbol{u}dV + \boldsymbol{T}_{f}\int_{f}\rho\dot{\boldsymbol{u}}dV\right) \quad (10.\mathrm{A}.12)$$

以下、この式の右辺第4項以降を整理していく。
まず、変位$\boldsymbol{u}$は節点変位ベクトル$\boldsymbol{u}_i$（トラスであれば、トラスのi番目のジョイントの変位ベクトル）と補間関数N_iで以下のように補間できるものとする（実は、ここはいろいろあるが、簡単のため、以下のように仮定する. なお、Nは節点総数）。位置$\boldsymbol{y}$も節点位置$\boldsymbol{y}_i$で同様に補間できるものとする（すなわち, isoparametric要素を用いる）。

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{N} N_i\boldsymbol{u}_i \quad , \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{N} N_i\boldsymbol{y}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} N_i = 1 \quad (10.\mathrm{A}.13)$$

ここで、$\boldsymbol{u}$は次のように書き直すことができる。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U} \quad (10.\mathrm{A}.14)$$

ただし、

$$\boldsymbol{U} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_N \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{N} \equiv \begin{bmatrix} N_1\boldsymbol{I} & N_2\boldsymbol{I} & \cdots & N_N\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad (10.\mathrm{A}.15)$$

一般に、この$\boldsymbol{U}$が未知数ベクトルとなる。いま, $\boldsymbol{U}$を固有振動モード$\boldsymbol{\phi}_m$とモード座標η_mで表す（Mは自由度数. ここでは$M = 3N$）。

$$\boldsymbol{U} = \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{\phi}_m\eta_m = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta} \quad (10.\mathrm{A}.16)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_M \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\eta} \equiv \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_M \end{bmatrix}^{T} \end{cases} \quad (10.\mathrm{A}.17)$$

このとき、柔軟構造物の質量マトリクス$\boldsymbol{M}$は

$$\boldsymbol{M} \equiv \int \rho\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{N}dV \quad (10.\mathrm{A}.18)$$

であり、$\boldsymbol{\phi}_i$の直交性より、$\boldsymbol{I}$を$M \times M$の単位行列として、

$$\boldsymbol{\Phi}^{T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} \quad (10.\mathrm{A}.19)$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ

このとき、式(10.A.12)の右辺第4項は次のようになる。

$$\frac{1}{2}\int_f \rho \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dV = \frac{1}{2}\int_f \rho \dot{\boldsymbol{U}}^T\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{U}}dV = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{U}}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{U}}$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T\dot{\boldsymbol{\eta}} \qquad (10.A.20)$$

次に、カップリング行列と呼ばれる次の行列を定義する。

$$\boldsymbol{\delta}^0 \equiv \int_f \rho \boldsymbol{N}dV\boldsymbol{\Phi} \quad , \quad \boldsymbol{\delta}^1 \equiv \int_f \rho \hat{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{N}dV\boldsymbol{\Phi} \qquad (10.A.21)$$

このとき、

$$\int_f \rho \dot{\boldsymbol{u}}dV = \boldsymbol{\delta}^0\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad , \quad \int_f \rho \hat{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{u}}dV = \boldsymbol{\delta}^1\dot{\boldsymbol{\eta}} \qquad (10.A.22)$$

と書けるので、 これらを式(10.A.12)の右辺第5、6項に代入すると、結局、運動エネルギは次のように書ける。

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T\dot{\boldsymbol{\eta}}$$
$$+ \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left(\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^{\bullet} \qquad (10.A.23)$$

$$\boldsymbol{\delta}^* \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0 + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^1 \qquad (10.A.24)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_x \equiv \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0 \qquad (10.A.25)$$

次に、実際の解析において$\boldsymbol{\delta}^0$と$\boldsymbol{\delta}^1$を求める方法について確認する。いま、剛体並進変位ベクトル$\boldsymbol{e}_k^t$を

$$\boldsymbol{e}_k^t \equiv \begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_k\\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_k\end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{i}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{i}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{i}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (10.A.26)$$

と定義すれば、

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_k^t = \begin{bmatrix}N_1\boldsymbol{I} & N_2\boldsymbol{I} & \cdots & N_N\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{e}_k^t$$
$$= \sum_{i=1}^{N} N_i\boldsymbol{i}_k = \boldsymbol{i}_k \qquad (10.A.27)$$

よって、式(10.A.21)の行列$\boldsymbol{\delta}^0$について、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{i}_k{}^T\boldsymbol{\delta}^0 = \boldsymbol{i}_k{}^T\int \rho\boldsymbol{N}dV\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{e}_k^{tT}\int \rho\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}dV\boldsymbol{\Phi}$$
$$= \boldsymbol{e}_k^{tT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_k^{tT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{e}_k^{tT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k^{tT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_M\end{bmatrix}$$
$$\equiv \begin{bmatrix}\delta_1^{0k} & \delta_2^{0k} & \cdots & \delta_M^{0k}\end{bmatrix} \qquad (10.A.28)$$

ただし、

$$\delta_i^{0k} \equiv \boldsymbol{e}_k^{tT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_k^t \qquad (10.A.29)$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ

つまり、δ_i^{0k} は並進の刺激係数である。そこで、

$$\delta_i^{01} = p_i^x \quad , \quad \delta_i^{02} = p_i^y \quad , \quad \delta_i^{03} = p_i^z \tag{10.A.30}$$

と書くと、式(10.A.27)より、

$$\boldsymbol{\delta}^0 = \begin{bmatrix} \delta_1^{01} & \delta_2^{01} & & \delta_M^{01} \\ \delta_1^{02} & \delta_2^{02} & \cdots & \delta_M^{02} \\ \delta_1^{03} & \delta_2^{03} & & \delta_M^{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^x & p_2^x & & p_M^x \\ p_1^y & p_2^y & \cdots & p_M^y \\ p_1^z & p_2^z & & p_M^z \end{bmatrix} \tag{10.A.31}$$

同様に、剛体回転変位ベクトル $\boldsymbol{e}_k^r$ を

$$\boldsymbol{e}_k^r \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{y}_N \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{y}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{y}}_N \end{bmatrix} \boldsymbol{i}_k \tag{10.A.32}$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_k^r &= \begin{bmatrix} N_1\boldsymbol{I} & N_2\boldsymbol{I} & \cdots & N_N\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{e}_k^r \\ &= -\sum_{i=1}^{N} N_i \hat{\boldsymbol{y}}_i \boldsymbol{i}_k = -\hat{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{i}_k = (\boldsymbol{i}_k{}^T \hat{\boldsymbol{y}})^T \end{aligned} \tag{10.A.33}$$

となるので、式(10.A.21)の行列 $\boldsymbol{\delta}^1$ について、 以下の式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_k{}^T \boldsymbol{\delta}^1 &\equiv \int \rho \boldsymbol{i}_k{}^T \hat{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{N} dV \boldsymbol{\Phi} = \int \rho (\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_k^r)^T \boldsymbol{N} dV \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{e}_k^{rT} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_k^{rT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{e}_k^{rT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k^{rT}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_M \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \delta_1^{1k} & \delta_2^{1k} & \cdots & \delta_M^{1k} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10.A.34}$$

ただし、

$$\delta_i^{1k} \equiv \boldsymbol{e}_k^{rT} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_k^r \tag{10.A.35}$$

つまり、δ_i^{1k} は回転の刺激係数である。そこで、

$$\delta_i^{01} = p_i^{\theta x} \quad , \quad \delta_i^{12} = p_i^{\theta y} \quad , \quad \delta_i^{13} = p_i^{\theta z} \tag{10.A.36}$$

と書くと、式(10.A.34)より、

$$\boldsymbol{\delta}^1 = \begin{bmatrix} \delta_1^{11} & \delta_2^{11} & & \delta_M^{11} \\ \delta_1^{12} & \delta_2^{12} & \cdots & \delta_M^{12} \\ \delta_1^{13} & \delta_2^{13} & & \delta_M^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^{\theta x} & p_2^{\theta x} & & p_M^{\theta x} \\ p_1^{\theta y} & p_2^{\theta y} & \cdots & p_M^{\theta y} \\ p_1^{\theta z} & p_2^{\theta z} & & p_M^{\theta z} \end{bmatrix} \tag{10.A.37}$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動エネルギ

ここまでをまとめると、剛体に柔軟構造物が連結した系の運動エネルギは

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{T} \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^{T} \boldsymbol{\delta}^{*} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T} \left(\boldsymbol{R} \boldsymbol{\Gamma}_{x} \boldsymbol{\eta} \right)^{\bullet} \tag{10.A.23}$$

ただし、

$$\boldsymbol{\Gamma}_{x} \equiv \boldsymbol{T}_{f} \boldsymbol{\delta}^{0} \tag{10.A.24}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{*} \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\Gamma}_{x} + \boldsymbol{T}_{f} \boldsymbol{\delta}^{1} \tag{10.A.25}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{0} = \begin{bmatrix} p_1^{x} & p_2^{x} & & p_M^{x} \\ p_1^{y} & p_2^{y} & \cdots & p_M^{y} \\ p_1^{z} & p_2^{z} & & p_M^{z} \end{bmatrix} \tag{10.A.31}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{1} = \begin{bmatrix} p_1^{\theta x} & p_2^{\theta x} & & p_M^{\theta x} \\ p_1^{\theta y} & p_2^{\theta y} & \cdots & p_M^{\theta y} \\ p_1^{\theta z} & p_2^{\theta z} & & p_M^{\theta z} \end{bmatrix} \tag{10.A.37}$$

★Lagrangian

歪エネルギは、

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{U}^{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^{T} \boldsymbol{\Phi}^{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} \tag{10.A.38}$$

と書けるが、ϕ_i の直交性より、

$$\boldsymbol{\Phi}^{T} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} {\Omega_1}^2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {\Omega_2}^2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & {\Omega_M}^2 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{D} \tag{10.A.39}$$

となるので、

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} {\Omega_m}^2 {\eta_m}^2 \tag{10.A.40}$$

式(10.A.23)、(10.A.39)より、系全体のLagrangianは、

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T} \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{T} \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^{T} \boldsymbol{\delta}^{*} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T} \left(\boldsymbol{R} \boldsymbol{\Gamma}_{x} \boldsymbol{\eta} \right)^{\cdot} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\eta} \tag{10.A.41}$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★Lagrangian

ちなみに、次式で定義される$\tilde{m}_i$はモード質量（modal mass）と呼ばれる。

$$\tilde{m}_i = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i \tag{10.A.42}$$

通常、固有振動モードベクトル$\boldsymbol{\phi}_i$が正規化されていれば、モード質量は1となるが、解析ソフトによっては1になっていない。その場合、刺激係数の値が異なる。例えば、

ANSYS　：この資料の刺激係数の通り

ABAQUS：この資料の刺激係数をモード質量で割ったたもの。ABAQUSは各モードのモード質量を1に正規化しておらず、 モード質量の和が1になるように正規化している。

★運動方程式

$\delta \boldsymbol{x}_G$、$\delta \boldsymbol{\theta}$、$\delta \boldsymbol{\eta}$に関する運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_G}\right)^T = \boldsymbol{F}_x \tag{10.A.43}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{F}_H \tag{10.A.44}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^T = \boldsymbol{F}_\eta \tag{10.A.45}$$

ただし、$\boldsymbol{A}$は式(10.A.3)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.A.46}$$

で定義される行列であり、

$\boldsymbol{F}_x$：系に作用する外力

$\boldsymbol{F}_H$：系に作用する質量中心まわりの外力のモーメント

$\boldsymbol{F}_\eta$：$\delta \boldsymbol{\eta}$に関する一般化外力

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動方程式

$$\boldsymbol{L} \equiv M\dot{\boldsymbol{x}}_G + (\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^{\cdot} = M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}_x\dot{\boldsymbol{\eta}}\right) \quad (10.\mathrm{A}.47)$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}} \equiv \boldsymbol{R}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right)^T \quad , \quad \boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}}) \quad (10.\mathrm{A}.48)$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}\right)^T \quad , \quad \boldsymbol{p} \equiv \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\delta}^{*T}\boldsymbol{\omega} \quad (10.\mathrm{A}.49)$$

と定義すれば、

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \quad (10.\mathrm{A}.50)$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\boldsymbol{R}^T\dot{\boldsymbol{x}}_G \quad (10.\mathrm{A}.51)$$

であり、

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}}\right)^T = \boldsymbol{L} \quad , \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_G}\right)^T = \boldsymbol{0} \quad (10.\mathrm{A}.52)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}\right)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}^T\frac{d\tilde{\boldsymbol{H}}}{dt} \quad (10.\mathrm{A}.53)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}^T\widehat{(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^{\cdot}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \quad (10.\mathrm{A}.54)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}\right)^T = \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} = \dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\dot{\boldsymbol{R}}^T\dot{\boldsymbol{x}}_G + \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\boldsymbol{R}^T\ddot{\boldsymbol{x}}_G \quad (10.\mathrm{A}.55)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^T = \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\dot{\boldsymbol{R}}^T\dot{\boldsymbol{x}}_G - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} \quad (10.\mathrm{A}.56)$$

以上より、運動方程式が以下のように得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{F}_x \ , \quad \dfrac{d\boldsymbol{H}}{dt} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{F}_H \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\boldsymbol{R}^T\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{F}_\eta \end{cases} \quad (10.\mathrm{A}.57)$$

なお、柔軟構造物に外力が作用する場合には、一般化外力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_H$、$\boldsymbol{F}_\eta$ の算出方法が問題となるが、この場合、柔軟構造物の節点 n の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{u}_n)\right] \quad (10.\mathrm{A}.58)$$

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta} \equiv \boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\eta} \quad (10.\mathrm{A}.59)$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動方程式

と書けるので、節点力 f_n による仮想仕事は

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{x}_n{}^T \boldsymbol{f}_n &= \delta\left\{\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{u}_n)\right]\right\}\boldsymbol{f}_n \\ &= \delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}}{}^T\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{\Theta}_\delta{}^T\widehat{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}_n)}\boldsymbol{f}_n + \delta\boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\phi}_n)^T\boldsymbol{f}_n\end{aligned} \tag{10.A.60}$$

となる。したがって、剛体に作用する外力$\boldsymbol{F}_x^r$、外力によるモーメント$\boldsymbol{F}_H^r$も考慮すると、一般化外力は次の通りとなる。

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_x = \boldsymbol{F}_x^r + \sum_n \boldsymbol{f}_n\ ,\quad \boldsymbol{F}_H = \boldsymbol{F}_H^r + \sum_n \widehat{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}_n)}\boldsymbol{f}_n \\ \boldsymbol{F}_\eta = \sum_n (\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\phi}_n)^T\boldsymbol{f}_n\end{cases} \tag{10.A.61}$$

★運動量・角運動量・力学的エネルギ

系の運動量は

$$\begin{aligned}&\int_r \rho\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z}\right)dV + \int_f \rho\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}) \\ +(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})^{\cdot}\end{bmatrix}dV \\ &= \int_r \rho\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z}\right)dV + \int_f \rho\left[\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})\right]dV \\ &\quad + \frac{d}{dt}\left(\int_f \rho\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u}dV\right) \\ &= M\dot{\boldsymbol{x}}_G + (\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^{\cdot}\end{aligned} \tag{10.A.62}$$

となって、$\boldsymbol{L}$と一致する。つまり、$\boldsymbol{L}$ は運動量であることがわかる。これは、式(10.A.57).1からも容易に想像がつくことではある。また、角運動量は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \int_r \rho\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{z}\right)\times\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z}\right)dV \\ &\quad + \int_f \rho\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_G + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u}\end{bmatrix}\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})^{\cdot}\right]\right\}dV \\ &= \int_r \rho\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{z}\right)\times\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z}\right)dV \\ &\quad + \int_f \rho\left[\boldsymbol{x}_G + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})\right]\times\left[\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})\right]dV\end{aligned}$$

刺激係数は姿勢制御にどう用いられるのか？

★運動量・角運動量・力学的エネルギ

$$
\begin{aligned}
&+\int_f \rho(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\times\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}dV+\int_f \rho\boldsymbol{x}_G\times(\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})dV\\
&+\int_f \rho[\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}})dV\\
&+\int_f \rho\begin{Bmatrix}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\times[\dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\\+[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times(\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\end{Bmatrix}dV\\
&+\int_f \rho(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})dV \qquad (10.\mathrm{A}.63)
\end{aligned}
$$

となるが、この式のピンクの部分はuの二次の項であるので無視することにする。また、緑の部分は柔軟構造物内での微小変位による角運動量増分であり、 これも無視するとすれば、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}\approx&\int_r \rho(\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{z})\times(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}+\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z})dV\\
&+\int_f \rho[\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times[\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}+\dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]dV\\
&+\int_f \rho(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\times\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}dV+\int_f \rho\boldsymbol{x}_G\times(\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})dV\\
&+\int_f \rho[\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}})dV \qquad (10.\mathrm{A}.64)
\end{aligned}
$$

と近似できる。この式を実際に計算すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_r \rho(\boldsymbol{x}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{z})\times(\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}+\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{z})dV\\
&+\int_f \rho[\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times[\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}+\dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]dV\\
&\quad=\boldsymbol{x}_G\times M\dot{\boldsymbol{x}}_G+\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} \qquad (10.\mathrm{A}.65)\\
&\int_f \rho(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})\times\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}dV=\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\boldsymbol{u}dV\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}}\\
&\quad=\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0\boldsymbol{\eta}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}}=\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}} \qquad (10.\mathrm{A}.66)\\
&\int_f \rho\boldsymbol{x}_G\times(\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{u})dV=\hat{\boldsymbol{x}}_G\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\left[\int_f \rho\boldsymbol{u}dV\right]\\
&\quad=\hat{\boldsymbol{x}}_G\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0\boldsymbol{\eta}=\hat{\boldsymbol{x}}_G\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta} \qquad (10.\mathrm{A}.67)\\
&\int_f \rho[\boldsymbol{x}_G+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{y})]\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\dot{\boldsymbol{u}})dV\\
&\quad=\hat{\boldsymbol{x}}_G\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV\\
&\qquad+\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\dot{\boldsymbol{u}}dV+\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\int_f \rho\hat{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{u}}dV\\
&\quad=\hat{\boldsymbol{x}}_G\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0\dot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^0\dot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}_f\boldsymbol{\delta}^1\dot{\boldsymbol{\eta}}\\
&\quad=\hat{\boldsymbol{x}}_G\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\dot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} \qquad (10.\mathrm{A}.68)
\end{aligned}
$$

刺激係数は姿勢制御にどう用いられるのか？

★運動量・角運動量・力学的エネルギ

よって、角運動量は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{x}_G \times M\dot{\boldsymbol{x}}_G + \boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} \\ &\quad + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \hat{\boldsymbol{x}}_G\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta} + \hat{\boldsymbol{x}}_G\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \boldsymbol{x}_G \times \left[M\dot{\boldsymbol{x}}_G + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^\bullet\right] + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}}) + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \\ &= \boldsymbol{x}_G \times \left[M\dot{\boldsymbol{x}}_G + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^\bullet\right] + \boldsymbol{H} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\,\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \\ &= \boldsymbol{x}_G \times \boldsymbol{L} + \tilde{\boldsymbol{H}} \qquad (10.\mathrm{A}.69)\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{N}} &= \dot{\boldsymbol{x}}_G \times \left[M\dot{\boldsymbol{x}}_G + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^\bullet\right] + \boldsymbol{x}_G \times \dot{\boldsymbol{L}} \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{H}} + \widehat{(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta})^\bullet}\,\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\,\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \\ &= \boldsymbol{x}_G \times \dot{\boldsymbol{L}} + \dot{\boldsymbol{H}} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\,\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} \qquad (10.\mathrm{A}.70)\end{aligned}$$

したがって、運動方程式(10.A.57)より、

$$\dot{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{x}_G \times \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_H \qquad (10.\mathrm{A}.71)$$

となって、 角運動量の時間変化率は外力による原点まわりのモーメントに等しい、 すなわち、式(10.A.69)のように角運動量を定義すれば、角運動量原理が満たされることがわかる。

最後に、エネルギ(ハミルトン関数)は、

$$\begin{aligned}\mathit{\Pi} &\equiv T + V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^T\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\delta}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^\bullet + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} \qquad (10.\mathrm{A}.72)\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\dot{\mathit{\Pi}} &= \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T M\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\delta}^*\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{\delta}^{*T}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^{\bullet\bullet} + \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^\bullet + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} \\ &= \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T M\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\delta}^*\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{\delta}^{*T}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^{\bullet\bullet} + \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left[\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\dot{\boldsymbol{\eta}}\right] + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} \\ &= \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^T\left[M\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}\right)^{\bullet\bullet}\right] \\ &\quad + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega})^T\left[\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\delta}^*\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}_x\boldsymbol{\eta}}\,\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}\right] \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\left[\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\delta}^{*T}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}_x{}^T\boldsymbol{R}^T\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}\right] \qquad (10.\mathrm{A}.73)\end{aligned}$$

剛体に柔軟構造物が連結した系の運動

★運動量・角運動量・力学的エネルギ

運動方程式(10.A.57)を代入すると、

$$\dot{\mathit{\Pi}} = \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}}{}^{T}\dot{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega})^{T}\boldsymbol{F}_{H} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^{T}\boldsymbol{F}_{H} \tag{10.A.74}$$

つまり、当然のことではあるが、エネルギ原理も満たされることがわかる。

★まとめ

まとめると、

$$\boldsymbol{\Gamma}_{x} \equiv \boldsymbol{T}_{f}\boldsymbol{\delta}^{0} \tag{10.A.24}$$

$$\boldsymbol{\delta}^{*} \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{\Gamma}_{x} + \boldsymbol{T}_{f}\boldsymbol{\delta}^{1} \tag{10.A.25}$$

$$\boldsymbol{L} \equiv M\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\Gamma}_{x}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_{x}\dot{\boldsymbol{\eta}} \tag{10.A.47}$$

$$\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\delta}^{*}\dot{\boldsymbol{\eta}}) \tag{10.A.48}$$

$$\boldsymbol{p} \equiv \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\delta}^{*T}\boldsymbol{\omega} \tag{10.A.49}$$

を式(10.A.57)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{F}_{x} \ . \quad \dfrac{d\boldsymbol{H}}{dt} + \widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}_{x}\boldsymbol{\eta}}\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{F}_{H} \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \boldsymbol{\Gamma}_{x}{}^{T}\boldsymbol{R}^{T}\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{F}_{\eta} \end{cases} \tag{10.A.57}$$

に代入すると、

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.A.45}$$

と併せて、$(x_G, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$に関する二階の連立微分方程式が得られる。それを数値計算で解けばいい。

付録のまとめ

- 柔軟構造物を有する宇宙機(剛体)の並進運動ならびに回転運動は、柔軟構造物の変形が微小であれば、モード法を用いて比較的簡単に解析できる。
- 具体的には、柔軟構造物を宇宙機に固定している点を基準とした刺激係数を用いることで、近似された運動方程式を導くことができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第10回　刺激係数と有効質量

2025年6月16日(月)2限

課題

2025年6月22日(日)18時00分締切

[1] 質量m_1が$120\mathrm{kg}$で固有振動数f_{o1}が$50\mathrm{Hz}$のバネ・マス系1と、質量m_2が$80\mathrm{kg}$　で固有振動数f_{o2}が$40\mathrm{Hz}$のバネ・マス系を直列に連結した2自由度系がある。この系の有効質量を全て求めなさい。

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第10回　刺激係数と有効質量

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第11回　パワースペクトル密度

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第11回の学修目標

★ パワースペクトル密度について説明できる。

★ 与えられた時系列データから、そのパワースペクトル密度を算出できる。

★ パワースペクトル密度と実効値との関係 について説明できる。

★ パワースペクトル密度と共振との関係について 説明できる。

第11回の全体構成

第1章　フーリエ級数展開

第2章　振動データのパワースペクトル密度

第3章　振動データの実効値とパワースペクトル密度との関係

第4章　強制振動とパワースペクトル密度

第5章　パワースペクトル密度と共振

付録　音響負荷のパワースペクトル密度

感想、課題

第1章と第2章は数学や信号処理の復習ですので、さらっと確認し、第3章以降をしっかりやりましょう。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

2025年6月23日(月)2限

第1章　フーリエ級数展開

第1章の学修目標

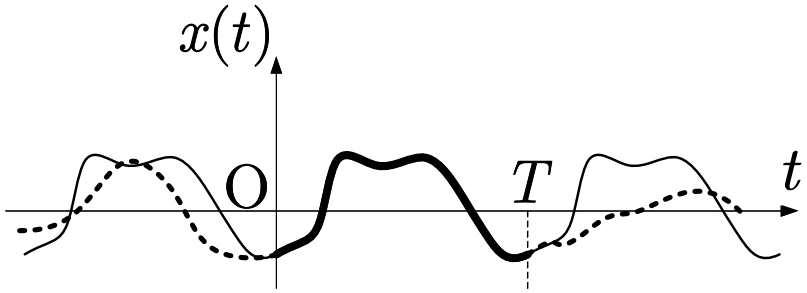
★ フーリエ級数展開について説明できる。

★ 離散フーリエ変換について説明できる。

★ 離散フーリエ変換 を用いた 信号復元法の例を 挙げることができる。

フーリエ級数展開

★ある特定の区間を三角関数で展開する



関数$x(t)$の$0 \leq t \leq T$の部分をとりだして、フーリエ係数を求め、フーリエ級数展開をすると、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.1)$$

ただし、

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \end{cases} \qquad (11.1.2)$$

もし、式$(11.1.1)$の級数展開を$1 \leq n \leq N$までだけにとどめると、

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.3)$$

元の関数$x(t)$と、その近似$\tilde{x}(t)$との差は、Nが大きくなると0に収束する。

式$(11.1.1)$より、

1) $x(t)$の定常成分は$a_0 / 2$
2) 角振動数が$2\pi n / T$、つまり、振動数がn / Tの振動成分の振幅d_nは

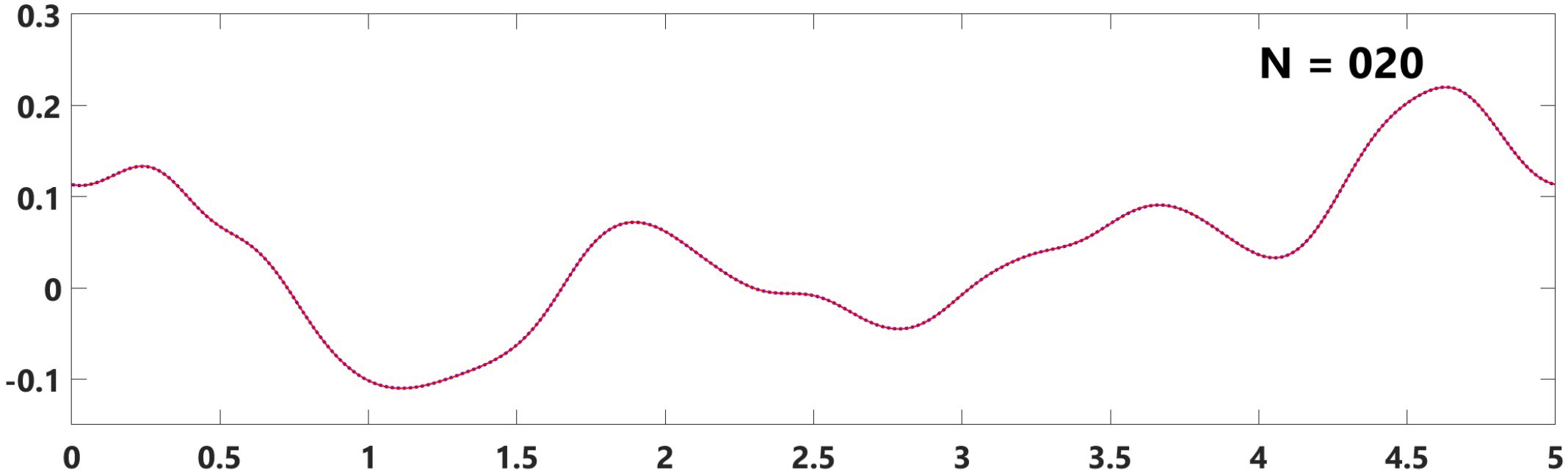
$$d_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad (11.1.4)$$

ある限定された範囲であれば、フーリエ級数展開を用いて、任意の関数を三角関数の和で近似できる。

フーリエ級数展開

★周期関数を三角関数で展開する

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

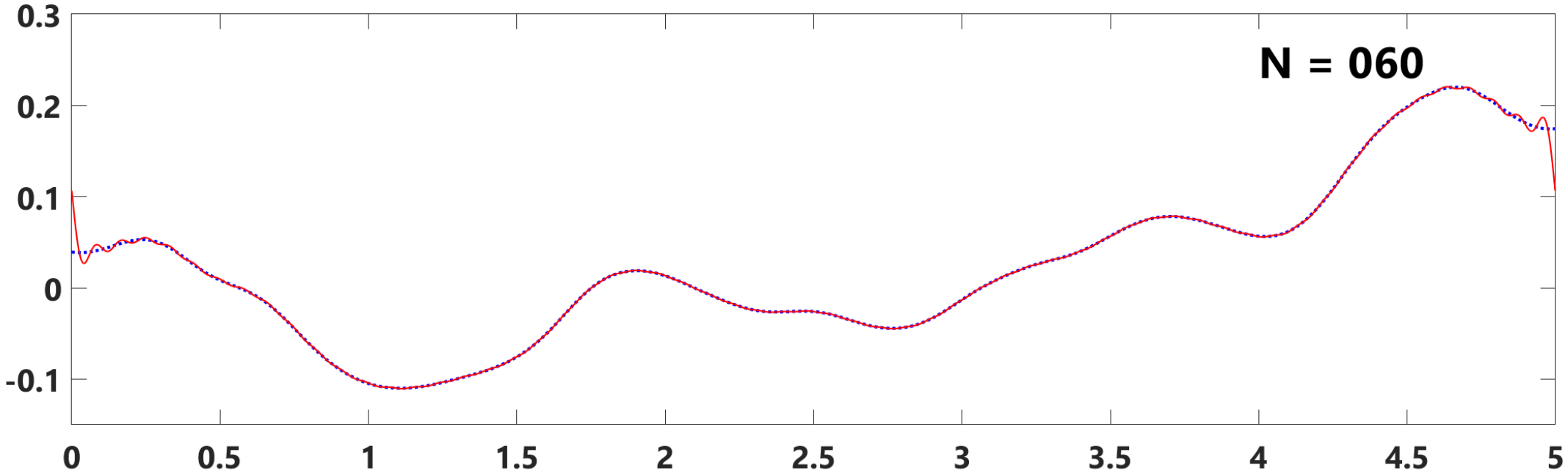


主な「波」の周期の最小値と同程度の周期をもった項までNを増やせば、 全体的にはほぼフィットする。フーリエ級数の第n項の周期は$T\,/\,n$。この例の場合，Tは5。また、主な「波」の周期の最小値は0.5くらい。したがって、$N = 10$くらいで、だいぶ合ってくる。

フーリエ級数展開

★非周期関数の場合は？

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

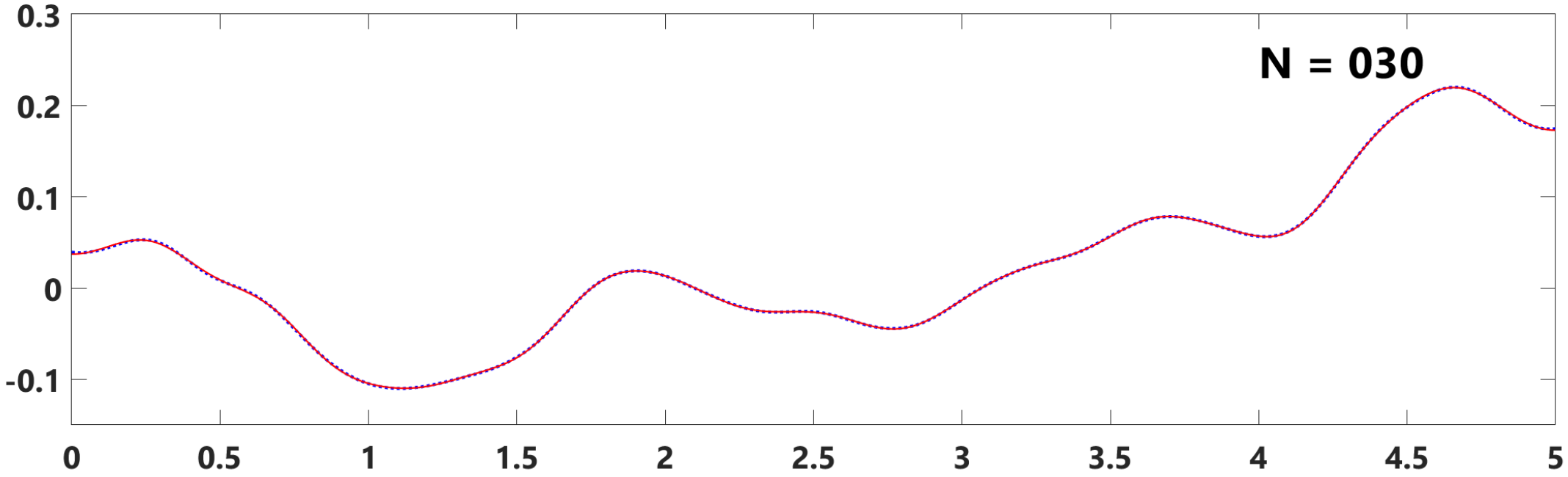


Tは5であり、さきほどと同様、主な「波」の周期の最小値は0.5くらい。したがって、 $N = 10$くらいでだいぶ合ってくるはずだが・・・。両端の値や傾きが合っていないと、両端が合いにくい（項数が必要となる）。

フーリエ級数展開

★非周期関数の場合は？

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$



ある方法を使うと、きれいに補間できる！

フーリエ級数展開の問題

★積分をどうする？

フーリエ係数は、 $x(t)$ が式で与えられていて、かつ、以下の積分を行わないと、値がわからない。

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \end{cases} \tag{11.1.2}$$

例えば、実験等で $x(t)$ の値が離散的に得られるような場合、この積分は、ニュートン・コーツの公式

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{N} w_k f(t_k)\Delta t = \sum_{k=0}^{N} w_k f(t_k)\frac{T}{N} \\ t_k = k\Delta t \end{cases} \tag{11.1.5}$$

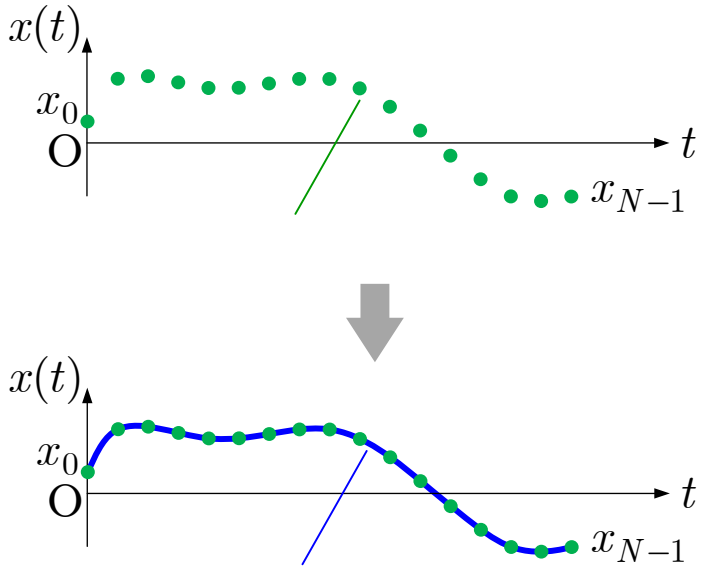
で求めることになるが、フーリエ係数の精度は？そもそも、フーリエ級数展開は、 $x(t)$ の値が離散的に得られる場合、すなわち、

$$x_k \equiv x(k\Delta t) \tag{11.1.6}$$

が得られている場合に、オリジナルの $x(t)$ の近似式 $\tilde{x}(t)$ を求めたい（復元したい）場合によく用いられる。 その際、$\tilde{x}(t)$ の曲線が離散点 x_k を通ればベター。 しかし、フーリエ係数 $(a_n\,,\,b_n)$ の精度が悪いと、フーリエ級数展開

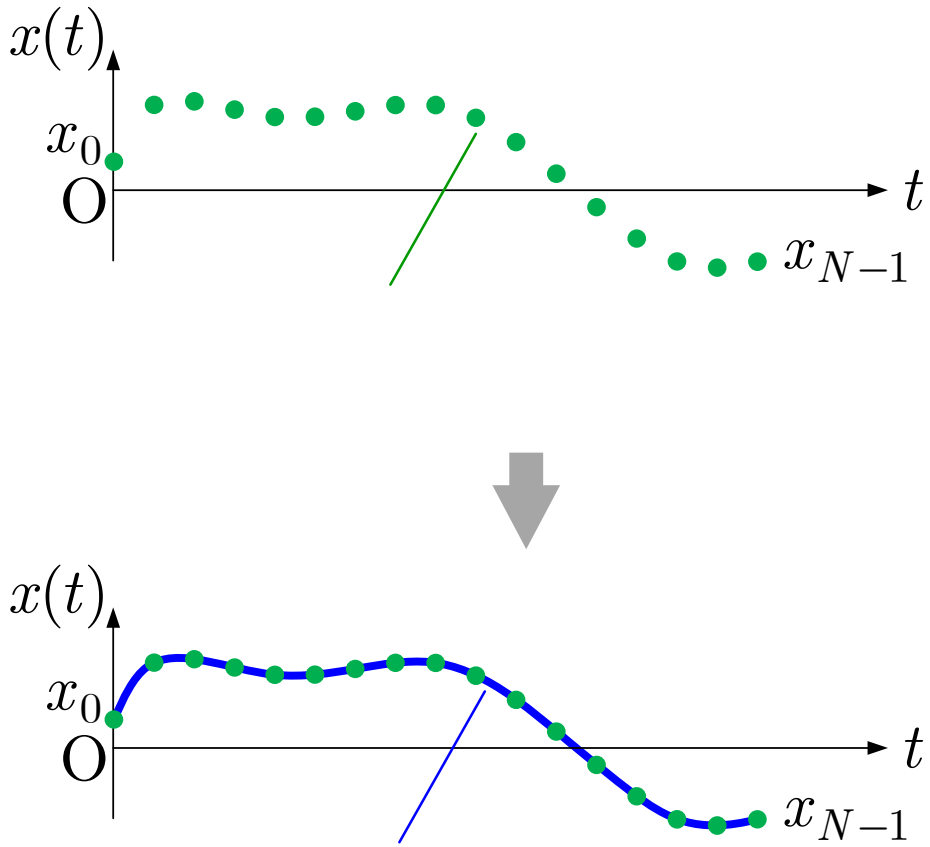
$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11.1.7}$$

の精度も悪くなるし、離散点を通らないかもしれない。



フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★信号の復元



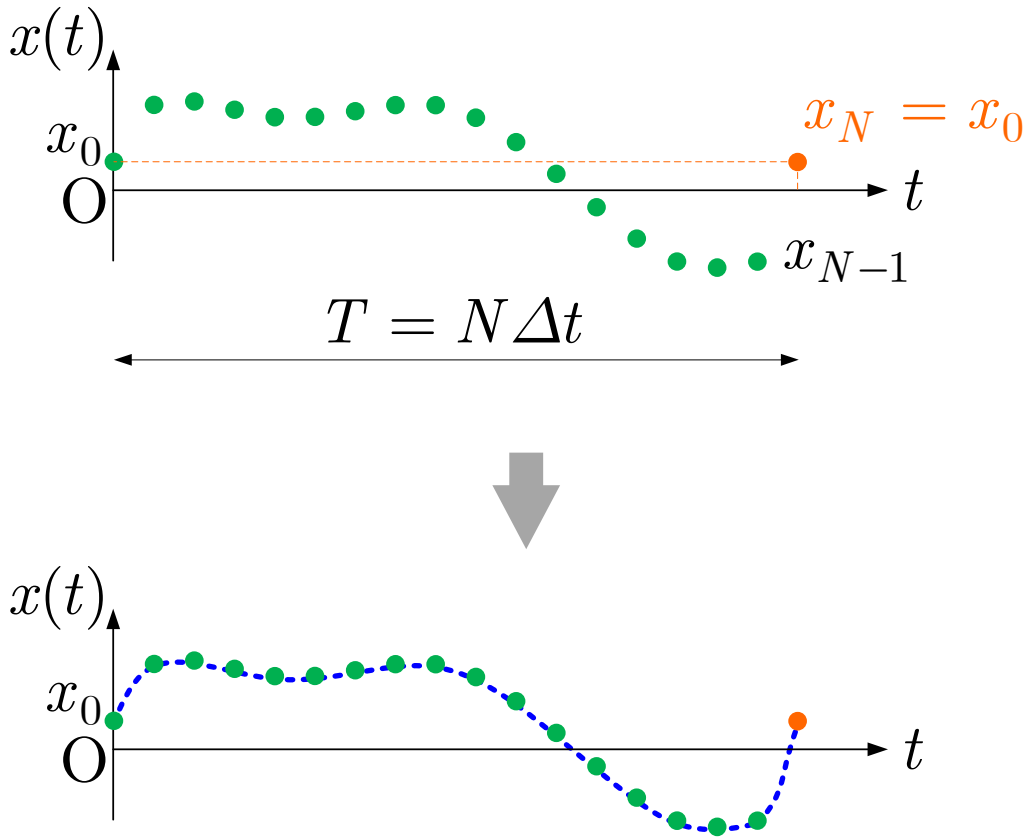
サンプル点を通らないくてもいいのであれば、 多項式近似(エクセルでよく使う？)など、 様々な近似曲線があるが、サンプル点を通るものとなると、例えばスプライン補間がある。

しかし、近似式が各区間で異なるので、補間曲線を使って何か計算をしたいときに面倒。

そこで・・・

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

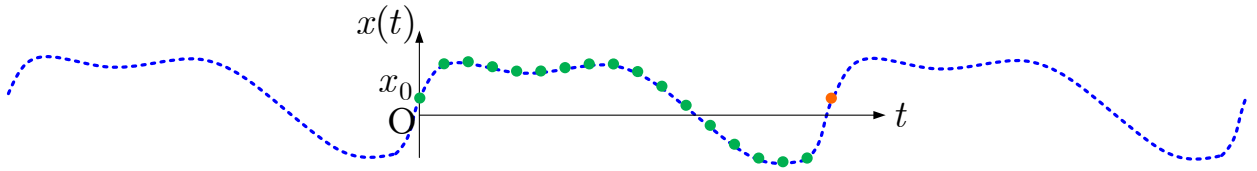
★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・



つまり、あえて周期性をもたせた上で、

$$T \equiv N\Delta t \tag{11.1.8}$$

として、周期関数のフーリエ級数展開を近似的に求めることにする。



いま、

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt \end{cases} \tag{11.1.2}$$

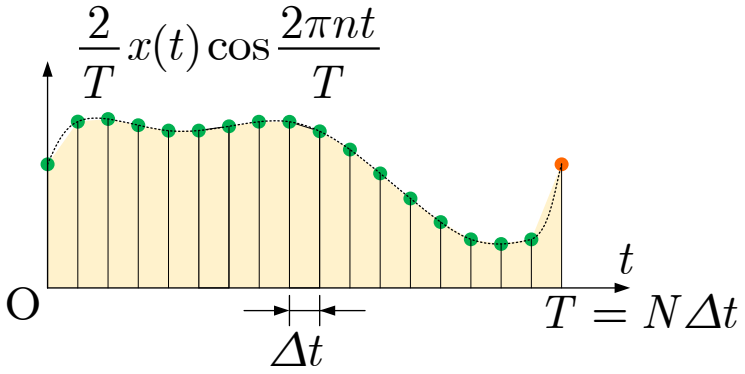
であるが、右辺の積分を台形則で近似すると・・・

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・

$$\begin{cases} a_n \approx \alpha_n \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{T} x_k \cos\left(\frac{2\pi n}{T} k\Delta t\right)\Delta t \\ \qquad = \displaystyle\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \\ b_n \approx \beta_n \equiv \displaystyle\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \tag{11.1.9}$$

となる（ただし、$\Delta t = T / N$。　$x_N = x_0$ なので、結局、単純に和をとっただけの場合と同じ値になっている）。



そして、次式は離散点を通る曲線になる！（逆離散フーリエ変換を用いると証明できる）

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11.1.10}$$

【N が奇数の場合】

$$M = (N-1)/2 \tag{11.1.11}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_n & \tilde{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_n & \beta_n\end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M) \tag{11.1.12}$$

【N が偶数の場合】

$$M = N/2 \tag{11.1.13}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\tilde{a}_n & \tilde{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_n & \beta_n\end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M-1) \\ \begin{bmatrix}\tilde{a}_M & \tilde{b}_M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\alpha_M & *\end{bmatrix} \end{cases} \tag{11.1.14}$$

つまり、N が偶数の場合の$[\tilde{a}_M, \tilde{b}_M]$を除いて、 フーリエ係数を台形則で近似すると、サンプル点を通る！

ちなみに、N が偶数の場合、$\beta_M = 0$、$\sin(2\pi Mt/T) = 0$ であり、$\tilde{b}_M$ がどんな値であっても、サンプル点を通る。

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・

$$\begin{cases} a_n \approx \alpha_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \\ b_n \approx \beta_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \tag{11.1.9}$$

なお、明らかに$\beta_0 = 0$であり、

$$\alpha_{N-n} = \alpha_n \quad , \quad \beta_{N-n} = -\beta_n \tag{11.1.15}$$

ちなみに、実数であるx_kの離散フーリエ変換は

$$\begin{aligned} Y_n &\equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \end{aligned} \tag{11.1.16}$$

であり、この式から次式が成り立つことがわかる。

$$\alpha_n = \frac{2}{N}\mathrm{Re}(Y_n) \quad , \quad \beta_n = -\frac{2}{N}\mathrm{Im}(Y_n) \tag{11.1.17}$$

Y_nはどの言語でもライブラリ等を使って 簡単に計算できるので、それを用いれば、α_nとβ_nも計算できる。

※ 式(11.1.15)の証明

$$\begin{aligned} \alpha_{N-n} &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left[\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right] \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(2\pi k - \frac{2\pi kn}{N}\right) \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = \alpha_n \end{aligned} \tag{11.1.18}$$

$$\begin{aligned} \beta_{N-n} &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left[\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right] \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(2\pi k - \frac{2\pi kn}{N}\right) \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} -x_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = -\beta_n \end{aligned} \tag{11.1.19}$$

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・

※ 式(11.1.9)が離散点を通ることの証明

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (11.1.10)$$

式(11.1.16)、(11.1.17)から、 x_k の離散フーリエ変換 Y_n は α_n 、β_n を用いて、次のように書ける。

$$Y_n = \frac{N}{2}(\alpha_n - i\beta_n) \quad (11.1.20)$$

さて、Y_n の逆離散フーリエ変換により、次式が成り立つ(この式が成り立つのがすごい)。

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \exp\left(i\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (11.1.21)$$

よって、

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{N}{2}(\alpha_n - i\beta_n)\left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \end{aligned} \quad (11.1.22)$$

(この式の1行目の右辺には虚部があるが、左辺が実数なので、右辺の虚部は0になるはず。 したがって、右辺の計算は実数部だけ考えればよい)。ここで、右辺の三角関数の中身の n を $N-n$ に置き換えたものは

$$\begin{cases} \cos\left[\dfrac{2\pi k(N-n)}{N}\right] = \cos\left(2\pi k - \dfrac{2\pi kn}{N}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \\ \sin\left[\dfrac{2\pi k(N-n)}{N}\right] = \sin\left(2\pi k - \dfrac{2\pi kn}{N}\right) = -\sin\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \quad (11.1.23)$$

である。また、

$$\alpha_{N-n} = \alpha_n \quad , \quad \beta_{N-n} = -\beta_n \quad (11.1.15)$$

であったので、式(11.1.22)の級数の中身の n を $N-n$ にしたものは、

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・

$$\alpha_{N-n}\cos\left[\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right]+\beta_{N-n}\sin\left[\frac{2\pi k)(N-n)}{N}\right]$$
$$=\alpha_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-\beta_n\times\left[-\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right]$$
$$=\alpha_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (11.1.24)$$

となって、nの場合と同じ値になる。さらに、

【Nが奇数の場合】

$$M=(N-1)/2 \quad (11.1.11)$$
$$\left[\tilde{a}_n \quad \tilde{b}_n\right]=\left[\alpha_n \quad \beta_n\right] \quad (0\le n\le M) \quad (11.1.12)$$

【Nが偶数の場合】

$$M=N/2 \quad (11.1.13)$$
$$\begin{cases}\left[\tilde{a}_n \quad \tilde{b}_n\right]=\left[\alpha_n \quad \beta_n\right] & (0\le n\le M-1)\\ \left[\tilde{a}_M \quad \tilde{b}_M\right]=\left[\frac{1}{2}\alpha_M \quad *\right]\end{cases} \quad (11.1.14)$$

であった。したがって、式(11.1.22)、(11.1.24)より、

【Nが奇数のとき】

$$x_k=\frac{1}{2}\left\{\alpha_o+2\sum_{n=1}^{M}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left[\tilde{a}_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\tilde{b}_n\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \quad (11.1.25)$$

【Nが偶数のとき】

$$x_k=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\alpha_o+\alpha_M\\ +2\sum_{n=1}^{M-1}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right]\end{array}\right\}$$
$$=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\tilde{a}_M+\sum_{n=1}^{M-1}\left[\tilde{a}_n\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)+\tilde{b}_n\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \quad (11.1.26)$$

ここで、級数のnを$n=M=N/2$にすると、

$$\sin\left(\frac{2\pi kM}{N}\right)=\sin\left(\frac{2\pi kN}{N\times 2}\right)=\sin(\pi k)=0 \quad (11.1.27)$$

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★復元するグラフをちょっと工夫すると・・・

であるので、

$$x_k = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left[\tilde{a}_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \tilde{b}_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \quad (11.1.28)$$

つまり、N が奇数であっても偶数であっても、

$$x_k = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left[\tilde{a}_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \tilde{b}_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \quad (11.1.29)$$

一方、式$(11.1.9)$において、$T = N\Delta t$ であるので、

$$\tilde{x}(k\Delta t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nk\Delta t}{N\Delta t} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nk\Delta t}{N\Delta t}\right)$$

$$= \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left[\tilde{a}_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \tilde{b}_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \quad (11.1.30)$$

よって、式$(11.1.29)$より、

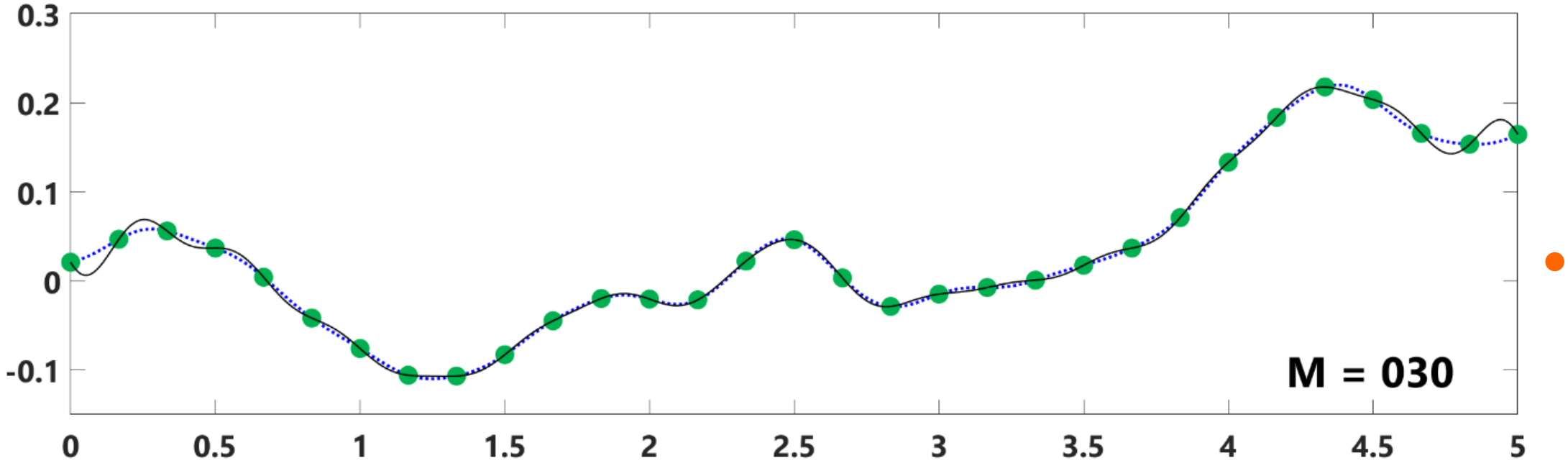
$$\tilde{x}(k\Delta t) = x_k \quad (11.1.31)$$

つまり、$\tilde{x}(t)$ のグラフは、必ず、サンプル点$(k\Delta t, x_k)$ を通る。

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★ということで、

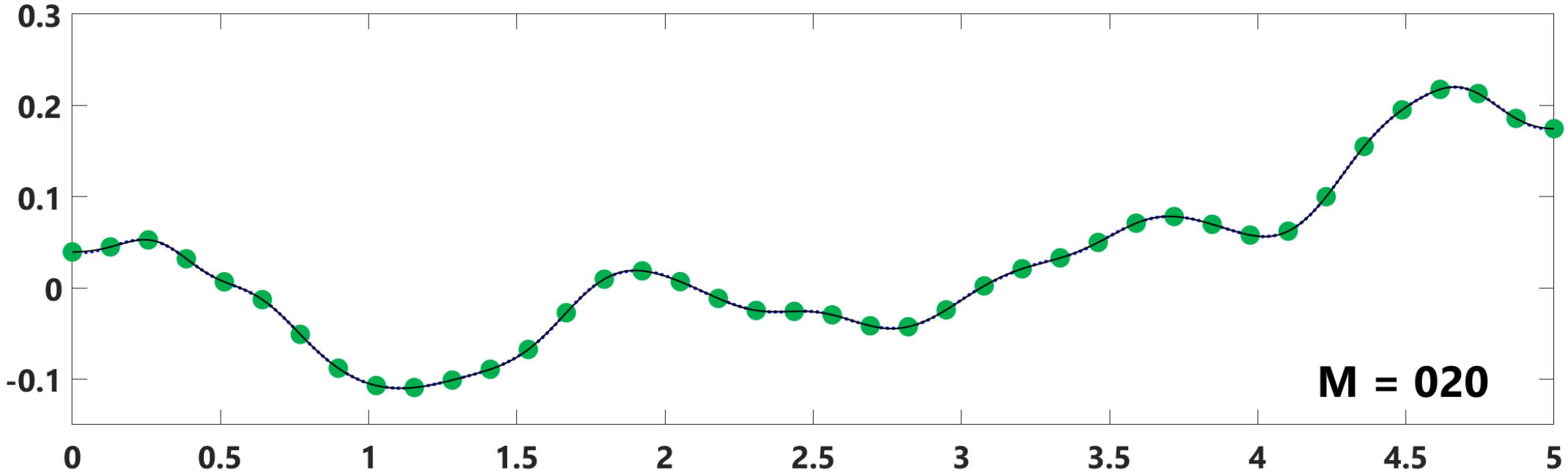
フーリエ級数の積分を台形則で近似すると、離散フーリエ変換に対応したもの（離散フーリエ変換に定数をかけたもの）が出てきて、それを用いると、サンプリング点を通る近似曲線の式が得られる。



$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

フーリエ級数展開を用いた信号の復元

★さらにちょっと工夫すると・・・



$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

第1章のまとめ(1/3)

- サンプリング時間 Δt で N 個のデータ x_0 ～ x_{N-1} が得られたとき、次式で定義される曲線 $x=\tilde{x}(t)$ は、N 個のサンプル点 $(k\Delta t\,,x_k)$ を通る。

$$\tilde{x}(t)=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+\tilde{b}_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11.1.10}$$

ただし、

$$\begin{cases}\alpha_n\equiv\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}x_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\\ \beta_n\equiv\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}x_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\end{cases},\ 0\le n\le M \tag{11.1.9}$$

として、

第1章のまとめ(2/3)

【N が奇数の場合】

$$M = (N-1)/2 \tag{11.1.10}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M) \tag{11.1.11}$$

【N が偶数の場合】

$$M = N/2 \tag{11.1.12}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M-1) \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_M & \tilde{b}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\alpha_M & * \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11.1.13}$$

第1章のまとめ(3/3)

- なお、x_k の離散フーリエ変換 Y_n

$$Y_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \tag{11.1.16}$$

を用いると、α_n 、β_n は次式で計算できる。

$$\alpha_n = \frac{2}{N}\mathrm{Re}(Y_n) \quad , \quad \beta_n = -\frac{2}{N}\mathrm{Im}(Y_n) \tag{11.1.17}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

2025年6月23日(月)2限

第2章　振動データのパワースペクトル密度

第2章の学修目標

- ★ 与えられた時系列データの「エネルギ」について説明できる。
- ★ パワースペクトル密度の定義について説明できる。
- ★ パワースペクトル密度の物理的意味について説明できる。

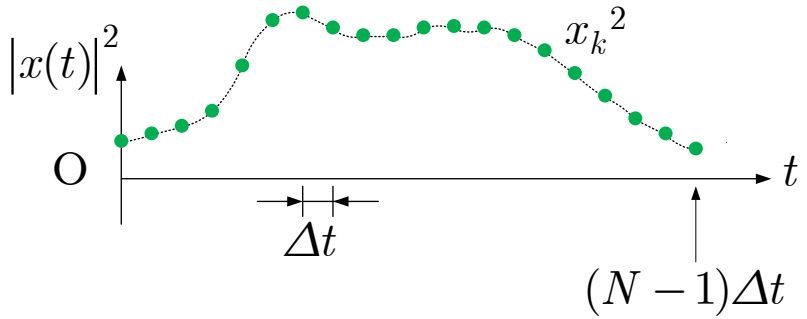
信号処理の世界における「エネルギ」

★絶対値の二乗の積分

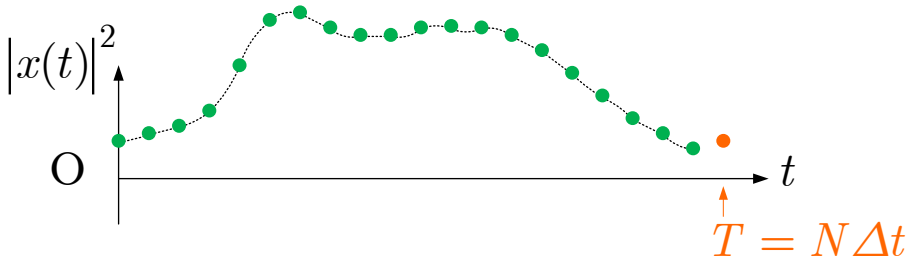
信号処理の世界では、ある時間区間$0 \leq t \leq T$で定義された信号$x(t)$がもつ「エネルギ」を次式で定義する。

$$E \equiv \int_0^T |x(t)|^2 \, dt \tag{11.2.1}$$

いま、$x(t)$の式はわからないものの、離散データx_kは得られたとする。

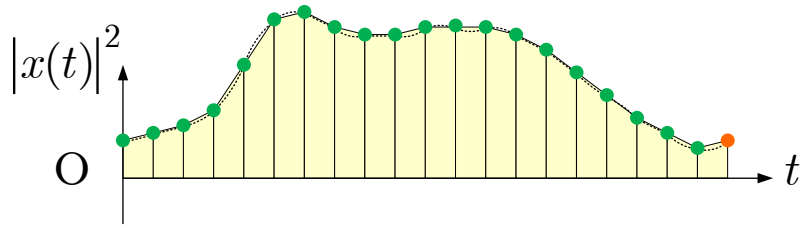


このとき、$T \equiv N\Delta t$, $x_N \equiv x_0$として、点(T, x_N)を追加。



このとき、区間 $0 \leq t \leq T$でのエネルギは次式のように台形測で近似できる。

$$E \approx \bar{E} = \sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 \Delta t = \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 \tag{11.2.2}$$



離散データ(t_k, x_k)を取得できたときに、もとの関数$x(t)$を予測したい場合、

- その関数は全ての離散点(t_k, x_k)を通ってほしい
- エネルギが$\bar{E}$と等しくなるとよい

と思うだろう。では、これを満たす関数はあるのか？

結論を先に述べると、 式(11.1.9)で定義した$\tilde{x}(t)$がこれらを満たす！

信号処理の世界における「エネルギ」

★絶対値の二乗の積分

式(11.1.9)で定義した$x(t)$の近似曲線$\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t)=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n\cos\frac{2\pi nt}{T}+\tilde{b}_n\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11.1.9}$$

を用いてエネルギの計算すると、

$$\tilde{E}=\int_0^T\left|\tilde{x}(t)\right|^2dt=\frac{T}{4}\left[\tilde{a}_0{}^2+2\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n{}^2+\tilde{b}_n{}^2\right)\right] \tag{11.2.3}$$

そして、実は，$\tilde{E}$ はエネルギの積分を台形則で近似した$\bar{E}$と一致する。すなわち、

$$\tilde{E}=\frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_k{}^2=\bar{E} \tag{11.2.4}$$

となることを証明できる。ただし、Nが偶数の場合、

$$\tilde{b}_M=0 \tag{11.2.5}$$

とする必要がある。ここで，$\beta_M=0$であるので、

$$\tilde{b}_M=\frac{1}{2}\beta_M \tag{11.2.6}$$

※ 式(11.2.4)の証明

まず、

【Nが奇数の場合】

$$M=(N-1)/2 \tag{11.1.10}$$

$$\left[\tilde{a}_n\quad\tilde{b}_n\right]=\left[\alpha_n\quad\beta_n\right]\quad(0\le n\le M) \tag{11.1.11}$$

【Nが偶数の場合】

$$M=N/2 \tag{11.1.12}$$

$$\begin{cases}\left[\tilde{a}_n\quad\tilde{b}_n\right]=\left[\alpha_n\quad\beta_n\right]\quad(0\le n\le M-1)\\ \left[\tilde{a}_M\quad\tilde{b}_M\right]=\left[\frac{1}{2}\alpha_M\quad *\right]\end{cases} \tag{11.1.13}$$

であったので、

【Nが奇数の場合】

$$\tilde{E}=\frac{T}{4}\left[\alpha_0{}^2+2\sum_{n=1}^{M}\left(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2\right)\right] \tag{11.2.7}$$

信号処理の世界における「エネルギ」

★絶対値の二乗の積分

【N が偶数の場合】

$$\tilde{E} = \frac{T}{4}\left[{\alpha_0}^2 + {\alpha_M}^2 + 4{\tilde{b}_M}^2 + 2\sum_{n=1}^{M-1}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right)\right] \quad (11.2.8)$$

ここで、実は、フーリエ級数の台形則近似

$$\begin{cases} \alpha_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \\ \beta_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \quad (11.1.9)$$

を用いると、「Parsevalの定理」より、

$$\sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 = \frac{N}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right) \quad (11.2.10)$$

よって、エネルギの積分を台形則で近似した $\bar{E}$ は

$$\bar{E} = \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 = \frac{T}{N}\frac{N}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right)$$

つまり、

$$\bar{E} = \frac{T}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right) \quad (11.2.11)$$

また、

$$\alpha_{N-n} = \alpha_n \quad , \quad \beta_{N-n} = -\beta_n \quad (11.1.14)$$

であったので、

【N が奇数の場合】

$$\begin{cases} M = (N-1)/2 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right) = {\alpha_0}^2 + 2\sum_{n=0}^{M}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right) \end{cases} \quad (11.2.12)$$

したがって、式(11.2.10)より、

$$\bar{E} = \frac{T}{4}\left[{\alpha_0}^2 + 2\sum_{n=0}^{M}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right)\right] \quad (11.2.13)$$

となって、式(11.2.7)の $\tilde{E}$ と確かに一致する。

信号処理の世界における「エネルギ」

★絶対値の二乗の積分

【Nが偶数の場合】

$$\begin{cases} M = N/2 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right) = {\alpha_0}^2+{\alpha_M}^2+2\sum_{n=0}^{M-1}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right) \end{cases} \tag{11.2.14}$$

よって、式(11.2.10)

$$\sum_{k=0}^{N-1}{x_k}^2 = \frac{N}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right) \tag{11.2.10}$$

より、

$$\bar{E} = \frac{T}{4}\left[{\alpha_0}^2+{\alpha_M}^2+2\sum_{n=0}^{M-1}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right)\right] \tag{11.2.15}$$

したがって、これが式(11.2.8)の$\tilde{E}$

$$\tilde{E} = \frac{T}{4}\left[{\alpha_0}^2+{\alpha_M}^2+4{\tilde{b}_M}^2+2\sum_{n=1}^{M-1}\left({\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\right)\right] \tag{11.2.8}$$

と一致するためには

$$\tilde{b}_M = 0 \tag{11.2.16}$$

であればよい。

信号処理の世界における「エネルギ」

★絶対値の二乗の積分

【まとめ】

N個の時系列データ$(t_k\,,x_k)$ が得られたとする。ただし、$t_k = k\Delta t$であり、$k = 0 \sim (N-1)$である。このとき、

$$\begin{cases} \alpha_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \\ \beta_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \tag{11.1.9}$$

として、Nが奇数であれば、

$$\tilde{x}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{(N-1)/2}\left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \tag{11.2.17}$$

Nが偶数であれば、

$$\tilde{x}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2-1}\left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\alpha_{N/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{N}{2}t\right) + \beta_{N/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{N}{2}t\right)\right] \tag{11.2.18}$$

とすれば、

$$\tilde{x}(t_k) = x_k \tag{11.2.19}$$

つまり、$\tilde{x}(t)$のグラフは全てのサンプリング点$(t_k\,,x_k)$ を通り、かつ、

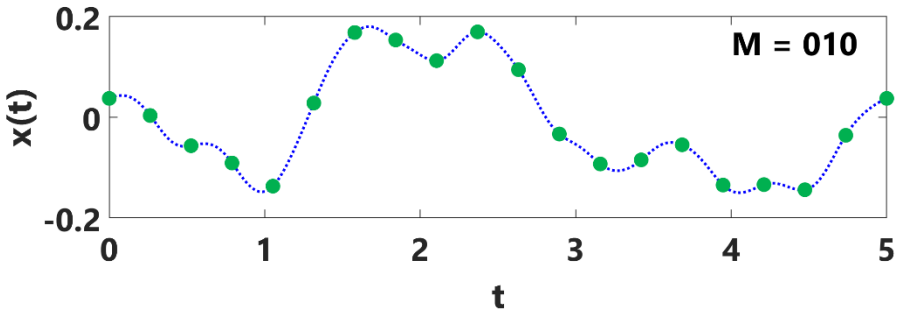
$$\int_0^{N\Delta t} \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 \Delta t \tag{11.2.20}$$

を満たす。

振幅スペクトル

★振動数に対応した振幅の分布

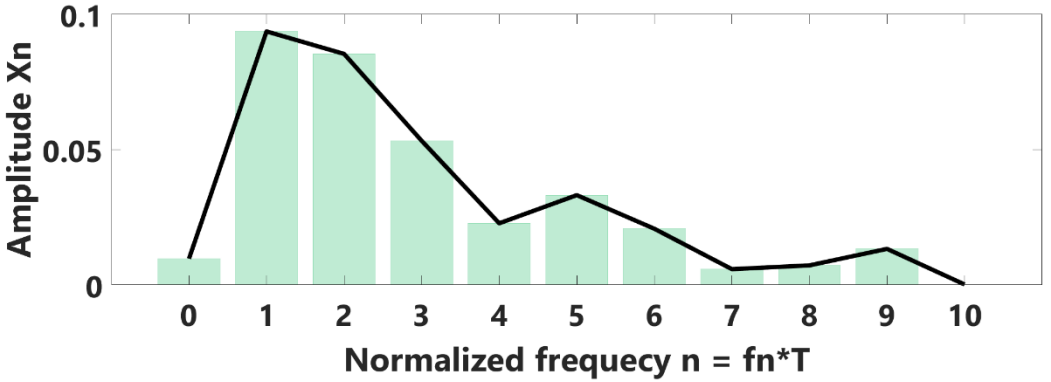
「振動数によって変わるもの」=「〇〇スペクトル」



$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

振動数が $f_n = n / T$ の振動の振幅(振幅スペクトル)を X_n とすれば

$$X_n = \sqrt{\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2} \qquad (1 \le n \le M) \qquad (11.2.21)$$



※ どの振動数の振動がより“多く”含まれているのかがわかる。

エネルギスペクトル

★振動数に対応したエネルギの分布

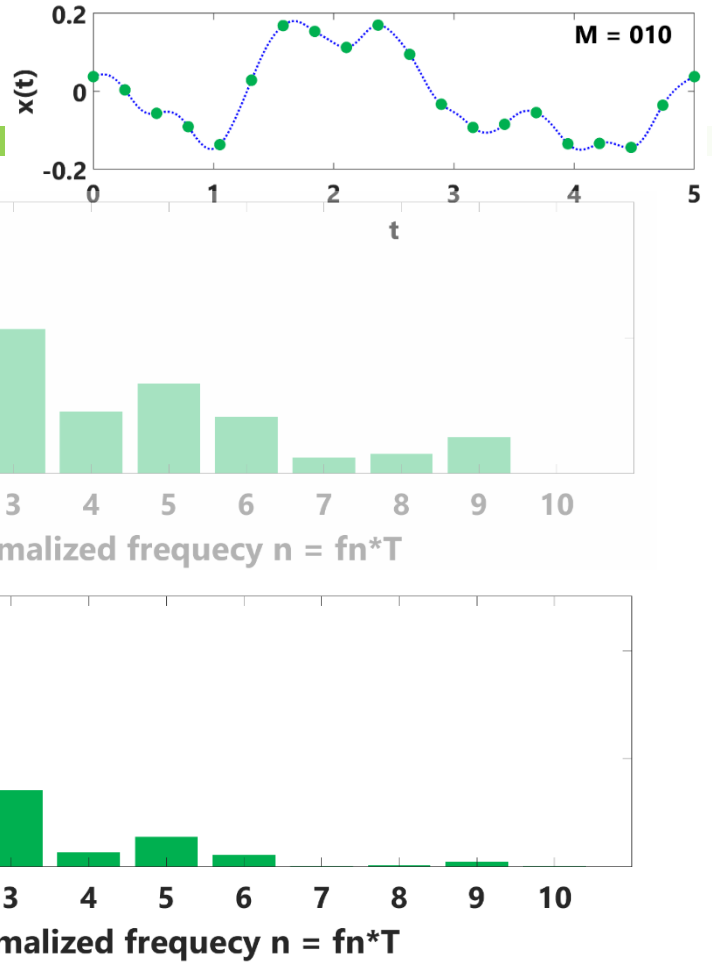
$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

与えられた時間区間 $0 \le t \le T$ における信号 $x(t)$ のエネルギは、

$$\tilde{E} = \int_0^T \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = \frac{T}{4}\left[\tilde{a}_0{}^2 + 2\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right)\right] \qquad (11.2.3)$$

であった。したがって、振動数 $f_n = n\,/\,T$ の振動のエネルギスーペクトル E_n は、

$$E_n = \frac{T}{2}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right) = \frac{T}{2}X_n{}^2 \qquad (11.2.22)$$



※ 振動の“多さ”(強さ)が強調される。

パワースペクトル

★振動数に対応したパワーの分布

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

$$\tilde{E} = \int_0^T \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = \frac{T}{4}\left[\tilde{a}_0{}^2 + 2\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right)\right] \qquad (11.2.3)$$

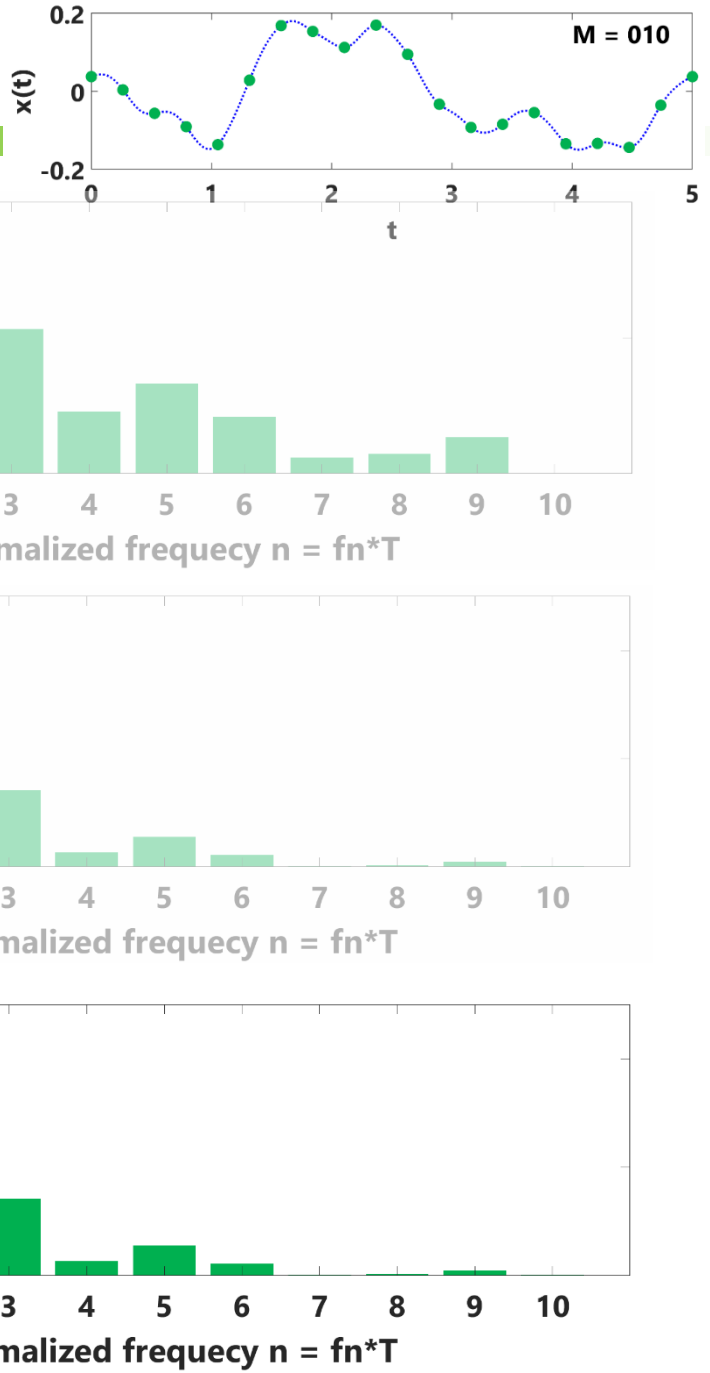
$$E_n = \frac{T}{2}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right) = \frac{T}{2}X_n{}^2 \qquad (11.2.22)$$

パワーは次式で定義される。

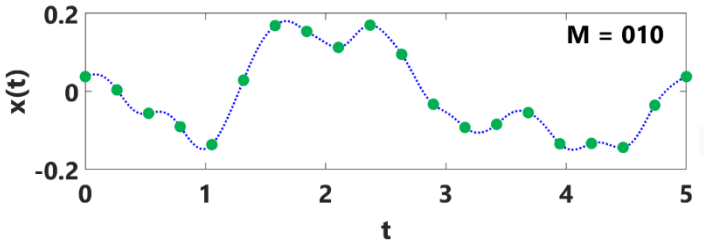
$$P \equiv \frac{E}{T} \qquad (11.2.23)$$

したがって、振動数 f_n の振動のパワースペクトル P_n は、

$$P_n = \frac{E_n}{T} = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right) = \frac{X_n{}^2}{2} \qquad (11.2.24)$$



パワースペクトル密度



★振動数に対応したパワーの密度分布

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

$$\tilde{E} = \int_0^T \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = \frac{T}{4}\left[\tilde{a}_0{}^2 + 2\sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2\right)\right] \qquad (11.2.3)$$

振動数のステップ幅 Δf は

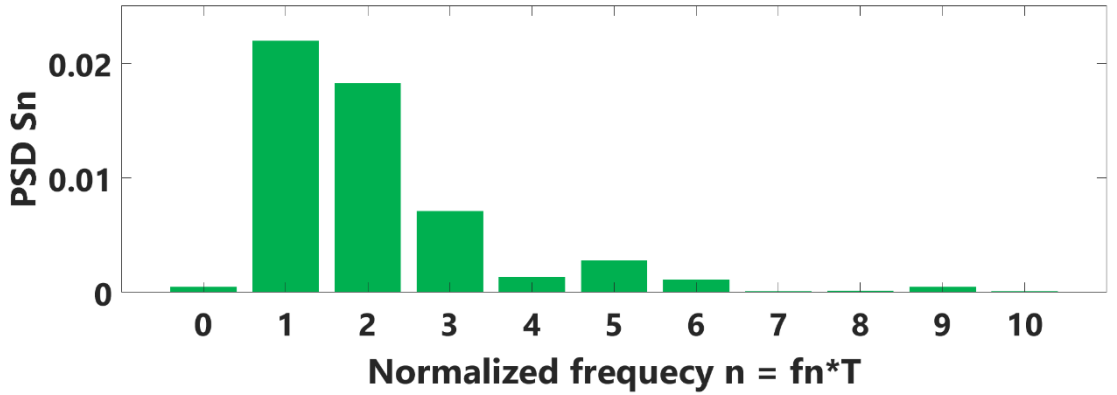
$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T} \qquad (11.2.25)$$

一つ一つのパワースペクトルは、この幅の分のパワを表していると言える。そこで、単位振動数あたりのパワ（パワースペクトル密度、Power Spectrum Density、PSD）を S_n とすれば、$S_n = P_n / \Delta f$、つまり、

$$P_n = S_n \Delta f\ , \quad P = \sum_{n=0}^{M} S_n \Delta f \qquad (11.2.26)$$

したがって、式(11.2.21)より、

$$S_n = \frac{P_n}{\Delta f} = P_n T = E_n = \frac{T X_n{}^2}{2} \qquad (11.2.27)$$



PSDとは、「振幅の2乗にデータ取得時間の半分を掛けたもの」。

パワースペクトル密度

★実際の計算方法は？

$$T \equiv N\Delta t \tag{11.1.7}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{11.1.9}$$

$$\begin{cases} \alpha_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \\ \beta_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \tag{11.1.8}$$

【Nが奇数の場合】

$$M = (N-1)/2 \tag{11.1.10}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_n & \tilde{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_n & \beta_n\end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M) \tag{11.1.11}$$

【Nが偶数の場合】

$$M = N/2 \tag{11.1.12}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\tilde{a}_n & \tilde{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_n & \beta_n\end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M-1) \\ \begin{bmatrix}\tilde{a}_M & \tilde{b}_M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\alpha_M & \dfrac{1}{2}\beta_M\end{bmatrix} \end{cases} \tag{11.1.13}'$$

$$X_n = \sqrt{\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2} \quad (1 \le n \le M) \tag{11.2.21}$$

$$S_n = \frac{P_n}{\Delta f} = P_n T = E_n = \frac{TX_n{}^2}{2} \tag{11.2.27}$$

結局のところ、

① 式(11.1.8)でα_nとβ_nを計算する。 ただし、サンプル数Nが奇数の場合は$M = (N-1)/2$、 偶数の場合は$M = N/2$として、$1 \le n \le M$

② 振動数$f_n \equiv n/T$のときのPSDS_nは

$$S_n = \frac{T}{2}(\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2) \qquad (1 \le n \le M) \tag{11.2.28}$$

ただし、Nが偶数の場合は、

$$S_M = \frac{T}{2}\left[\left(\frac{\alpha_M}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_M}{2}\right)^2\right] = \frac{T}{8}(\alpha_M{}^2 + \beta_M{}^2) \tag{11.2.29}$$

パワースペクトル密度

★実際の計算方法は？

$$S_n = \frac{T}{2}(\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2) \qquad (1 \leq n \leq M) \qquad (11.2.28)$$

ただし、N が偶数の場合は、

$$S_M = \frac{T}{8}(\alpha_M{}^2 + \beta_M{}^2) \qquad (11.2.29)$$

ちなみに、離散フーリエ変換 Y_n

$$Y_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad (11.1.20)$$

を用いると、

$$\alpha_n = \frac{2}{N}\mathrm{Re}(Y_n) \quad , \quad \beta_n = -\frac{2}{N}\mathrm{Im}(Y_n) \qquad (11.1.21)$$

であったので、

$$S_n = \frac{2T}{N^2}|Y_n|^2 \qquad (11.2.30)$$

ただし、N が偶数の場合は、

$$S_M = \frac{T}{2N^2}|Y_n|^2 \qquad (11.2.31)$$

第2章のまとめ(1/5)

- 連続的な信号の「エネルギ」とは、, 信号の絶対値の2乗を与えられた時間区間で積分したものである。
- 取得した離散データから連続的な信号を復元する場合、エネルギ E は

$$E \approx \bar{E} = \sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 \Delta t = \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} {x_k}^2 \tag{11.2.2}$$

と近似すればよい。その際、信号は次のように復元すればよい。

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} \left(\tilde{a}_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \tilde{b}_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \tag{11.1.9}$$

$$\alpha_n \equiv \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \quad , \quad \beta_n \equiv \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \tag{11.1.8}$$

として、

第2章のまとめ(2/5)

【N が奇数の場合】

$$M = (N-1)/2 \tag{11.1.10}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M) \tag{11.1.11}$$

【N が偶数の場合】

$$M = N/2 \tag{11.1.12}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \quad (0 \le n \le M-1) \\ \begin{bmatrix} \tilde{a}_M & \tilde{b}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\alpha_M & \dfrac{1}{2}\beta_M \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11.1.13}'$$

第2章のまとめ(3/5)

- 信号処理の分野では、「エネルギ」をサンプリング時間(周期)で割ったものを「パワー」と呼ぶ。
- つまり、「パワー」は、単位時間あたりに蓄積される「エネルギ」といえる。
- 一般に、振動数の関数になっているものは「〇〇スペクトル」と呼ばれる。
- PSD(パワースペクトル密度)とは、単位時間あたりのパワーのことである。

- PSDは信号に含まれる振動の 振幅の2乗に 周期の半分を 掛けたものに相当する。
- 信号に複数の振動が含まれる場合、PSDが大きいほど、その振動数の振動が“多く”含まれていることがわかる。

第2章のまとめ(4/5)

- サンプリング間隔 Δt で N 個のサンプルデータ x_k ($k = 0 \sim (N-1)$)が得られたとき、$T \equiv N\Delta t$ として、振動数 $f_n \equiv n \,/\, T$ のPSDは次式で求められる。

$$S_n = \frac{T}{2}({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2) \qquad (1 \leq n \leq M) \tag{11.2.28}$$

ただし、N が偶数の場合は、

$$S_M = \frac{T}{8}({\alpha_M}^2 + {\beta_M}^2) \tag{11.2.29}$$

第2章のまとめ(5/5)

- なお、x_k の離散フーリエ変換 Y_n

$$Y_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \tag{11.1.20}$$

を用いると、

$$\alpha_n = \frac{2}{N}\mathrm{Re}(Y_n) \quad , \quad \beta_n = -\frac{2}{N}\mathrm{Im}(Y_n) \tag{11.1.21}$$

であり、PSDは次式で求めることができる。

$$S_n = \frac{2T}{N^2}|Y_n|^2 \qquad (1 \le n \le M) \tag{11.2.30}$$

ただし、N が偶数の場合は、

$$S_M = \frac{T}{2N^2}|Y_n|^2 \tag{11.2.31}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

第3章　振動データの実効値とパワースペクトル密度との関係

第3章の学修目標

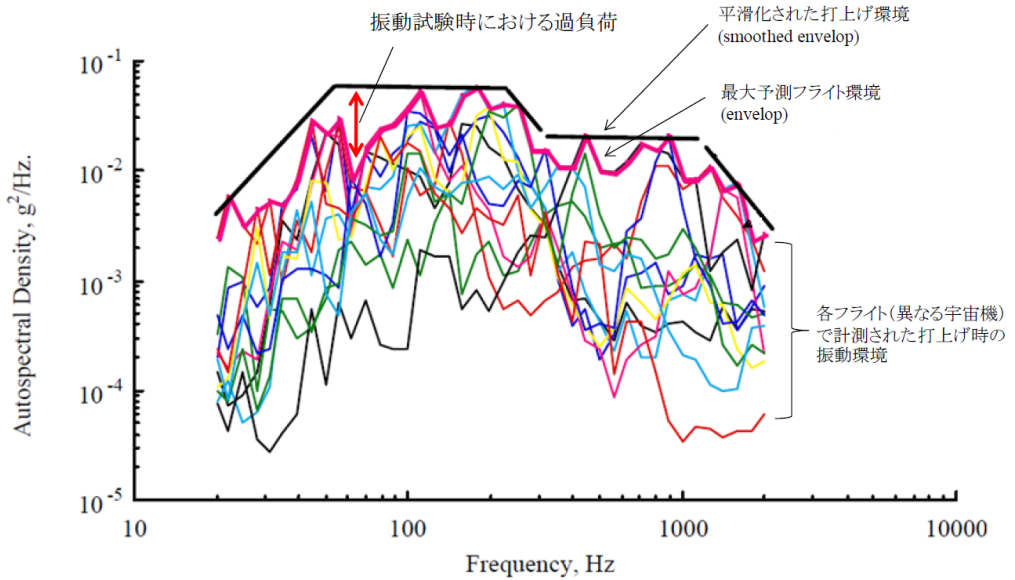
★ 振動の実効値について説明できる。

★ 振動の パワースペクトル密度と 実効値との 関係について説明できる。

人工衛星打ち上げ時の振動環境

★PSDで規定できる

ロケットに搭載された人工衛星に 作用する振動を計測したデータから、 人工衛星に作用する振動の振動数とPSDとの関係には トレンド(傾向)があることがわかっている。



そこで、新規に人工衛星を開発する際には、人工衛星に対して加振振動数とPSDとの関係を示して、その条件で加振しても 壊れないものをつくるように することが多い。

1. 振動環境がわかれば, そのときに人工衛星各部に生じる加速度(加速度荷重)を計算することができる。
2. その加速度荷重の最大値がわかれば, そのときの瞬間的な応力を計算することができる。
3. その応力が材料の許容応力を越えなければ、設計はOK。
4. しかし、その条件だと、条件が厳しすぎることもある(瞬間的に作用する応力では壊れない場合も多い)。
5. むしろ、平均的に生じる加速度が分かっていれば, それにマージンをかけた値で応力を計算する方が現実的かもしれない(特に、設計初期は)。
6. では、人工衛星には平均的にどれくらいの加速度が作用しているのであろうか？

振動の実効値

★二乗平均平方根(rms)のこと

パワの平方根は、 信号$x(t)$の実効値(二乗平均平方根、root mean square, rms)と呼ばれる。

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}E} = \sqrt{P} \qquad (11.3.1)$$

そもそも、実効値とは、交流電源など振動する信号に対する“平均的な大きさ”を示すものであったが、交流に限らず、振動する信号の“平均的な大きさ” を表すものと思えばよい。

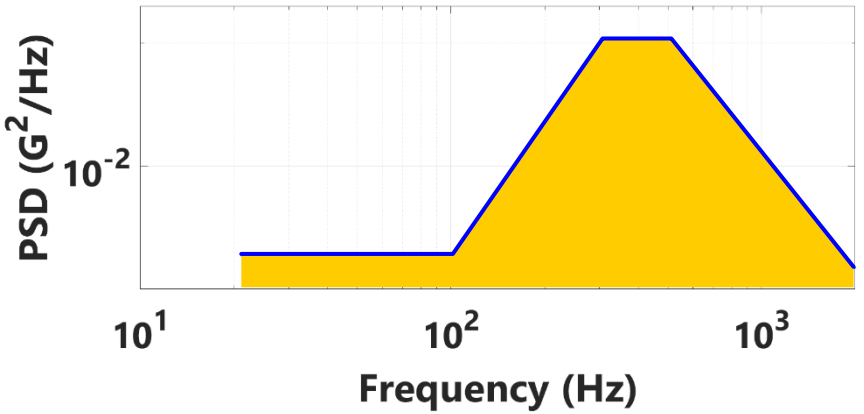
振動数のステップ幅Δfを限りなく小さくしていくと、

$$P = \sum_{n=0}^{M} S_n \Delta f \rightarrow \int_0^{f_M} S(f)\, df \qquad (11.3.2)$$

つまり、

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\int_0^{f_M} S(f)\, df} \qquad (11.3.3)$$

ということになり、 振動数fとPSDSのグラフの面積の平方根がその信号のrms値になることがわかる。



式(11.3.1)からわかる通り、 $x(t)$の平均値が0であるとしたら、実効値は$x(t)$の0からのばらつきの標準偏差σを表していることがわかる。実際、$x(t)$ は振動であるので、平均値は0と考えてよい。よって、x_{rms} は$x(t)$の標準偏差σと考えてしまってよい。

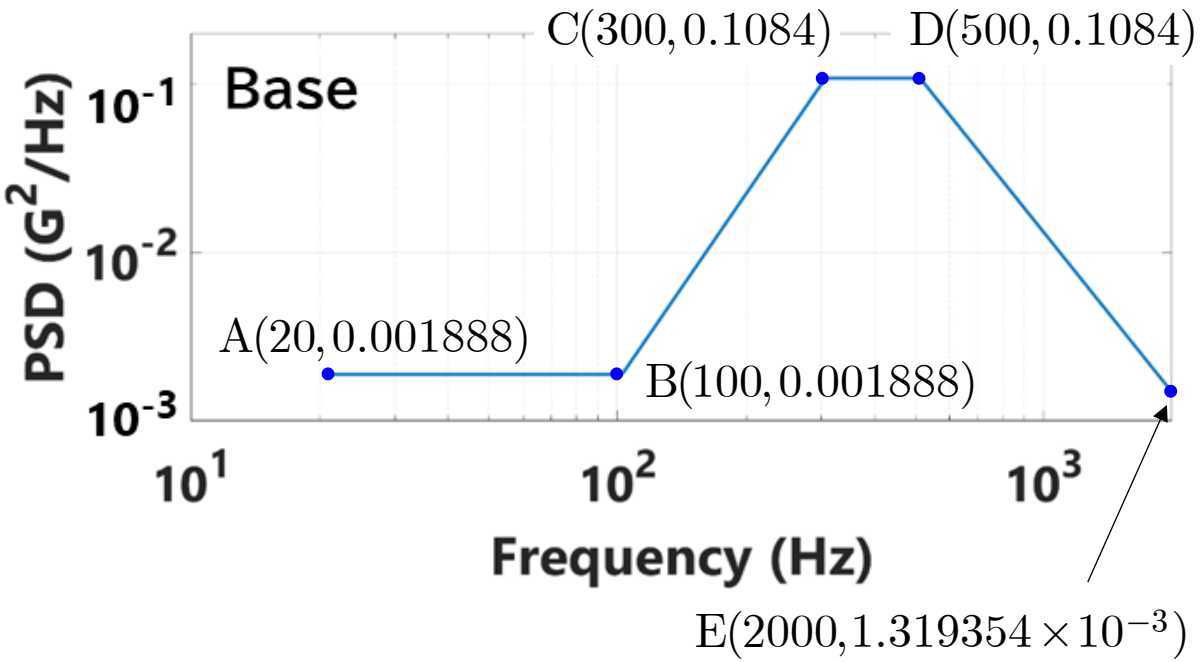
この実効値(rms値)は、複数の振動数の振動が混ざっている振動の平均的な“大きさ”、“強さ”を評価したいときによく用いられる(詳しくは第12回に学びます)。

実効値の計算

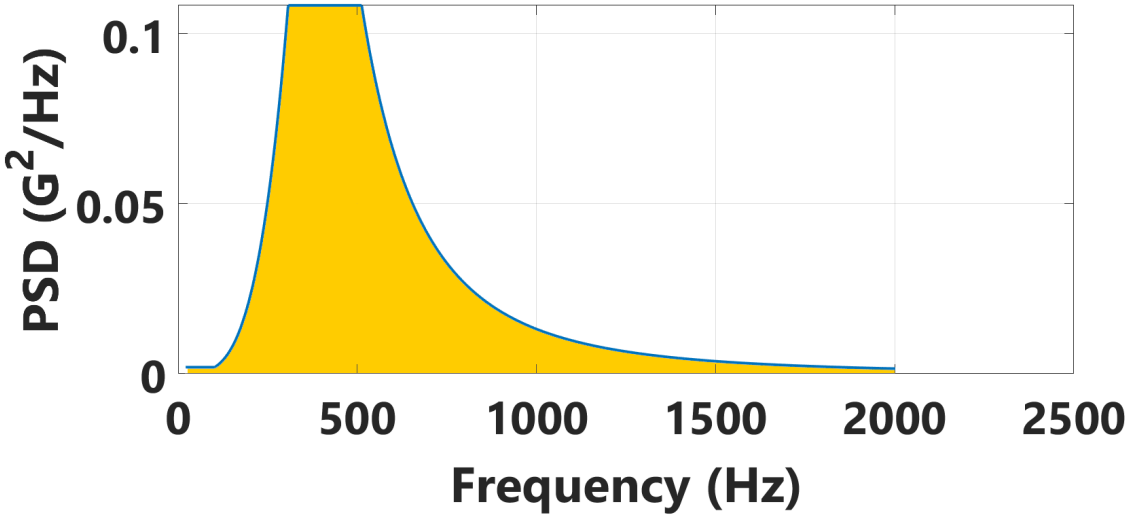
★PSDのlog-log線図から求める

【例題11.3.1】

下図のような折れ線で加速度のPSDが規定されている場合の実効値を求めなさい。

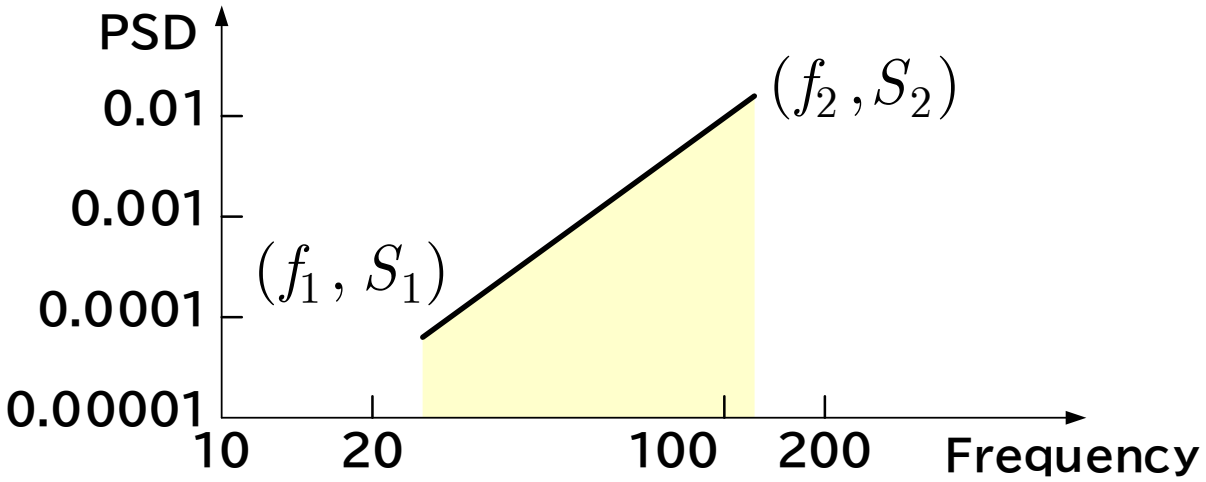


真数のグラフに直すと、右上図のようになり、この面積を求める必要があるが・・・



実効値の計算

★PSDのlog-log線図から求める



一般に、上図のような台形の面積を求めたい場合、そもそも、このグラフの式は

$$\log_{10} S = a \log_{10} f + b \tag{11.3.4}$$

振動数が f_1 のときのPSDが S_1 だったとすると、

$$\log_{10} S_1 = a \log_{10} f_1 + b \tag{11.3.5}$$

よって、

$$\log_{10} S - \log_{10} S_1 = a(\log_{10} f - \log_{10} f_1) \tag{11.3.6}$$

が成り立ち、これより、

$$\log_{10} \frac{S}{S_1} = a \log_{10} \frac{f}{f_1} \tag{11.3.7}$$

よって、

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{f}{f_1}\right)^a \tag{11.3.8}$$

つまり、

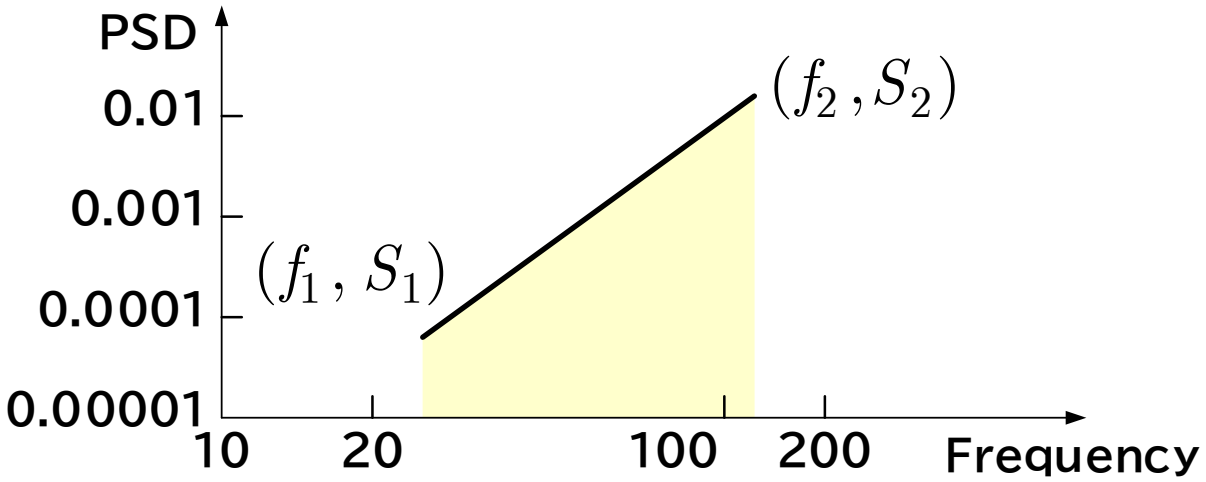
$$S = \frac{S_1}{{f_1}^a} f^a \tag{11.3.9}$$

区間 $[f_1\,,f_2]$ の面積（台形の面積）は、

$$\begin{aligned} A &= \int_{f_1}^{f_2} \frac{S_1}{{f_1}^a} f^a df = \frac{S_1}{{f_1}^a}\left[\frac{f^{a+1}}{a+1}\right]_{f_1}^{f_2} \\ &= \frac{S_1}{{f_1}^a}\frac{{f_2}^{a+1} - {f_1}^{a+1}}{a+1} = \frac{1}{a+1}\left(\frac{S_1}{{f_1}^a}{f_2}^{a+1} - \frac{S_1}{{f_1}^a}{f_1}^{a+1}\right) \\ &= \frac{1}{a+1}\left(\frac{S_1}{{f_1}^a}{f_2}^a \cdot f_2 - S_1 f_1\right) \end{aligned} \tag{11.3.10}$$

実効値の計算

★PSDのlog-log線図から求める



$$S = \frac{S_1}{{f_1}^a} f^a \tag{11.3.9}$$

$$A = \frac{1}{a+1}\left(\frac{S_1}{{f_1}^a} {f_2}^a \cdot f_2 - S_1 f_1\right) \tag{11.3.10}$$

振動数が f_2 のときのPSDが S_2 だったとすると、

$$S_2 = \frac{S_1}{{f_1}^a} {f_2}^a \tag{11.3.11}$$

よって、

$$A = \frac{1}{a+1}(S_2 f_2 - S_1 f_1) \tag{11.3.12}$$

なお、式(11.3.7)

$$\log_{10}\frac{S}{S_1} = a\log_{10}\frac{f}{f_1} \tag{11.3.7}$$

より、

$$\log_{10}\frac{S_2}{S_1} = a\log_{10}\frac{f_2}{f_1} \tag{11.3.13}$$

よって、

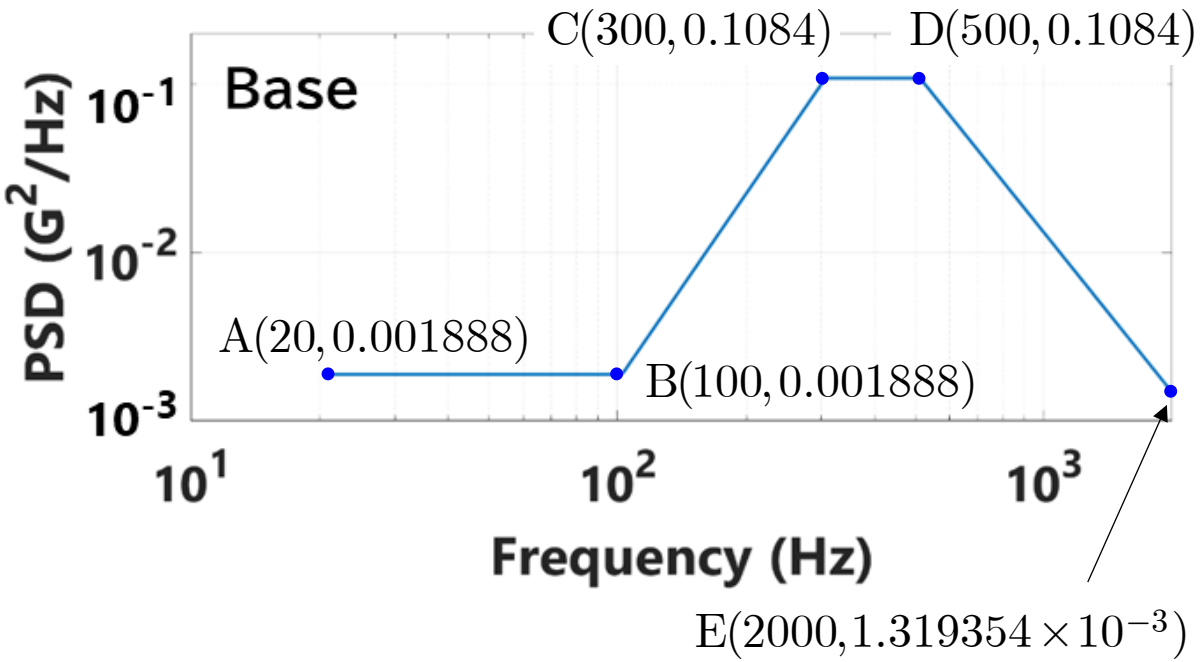
$$a = \frac{\log_{10}\dfrac{S_2}{S_1}}{\log_{10}\dfrac{f_2}{f_1}} \tag{11.3.14}$$

実効値の計算

★PSDのlog-log線図から求める

【例題11.3.1】

下図のような折れ線で加速度のPSDが規定されている場合の実効値を求めなさい。



最初の長方形については、傾きaは0であり、面積は

$$A_1 = \frac{1}{0+1}(0.001888 \times 100 - 0.001888 \times 20) = 0.15104 \tag{11.3.15}$$

次の台形については、傾きは

$$a = \frac{\log_{10}\dfrac{0.1084}{0.001888}}{\log_{10}\dfrac{300}{100}} = 3.686751 \tag{11.3.16}$$

であり、面積は

$$A_2 = \frac{1}{3.686751+1}\left(0.1084 \times 300 - 0.001888 \times 100\right) = 6.898425 \tag{11.3.17}$$

次の長方形については、傾きは0であり、面積は

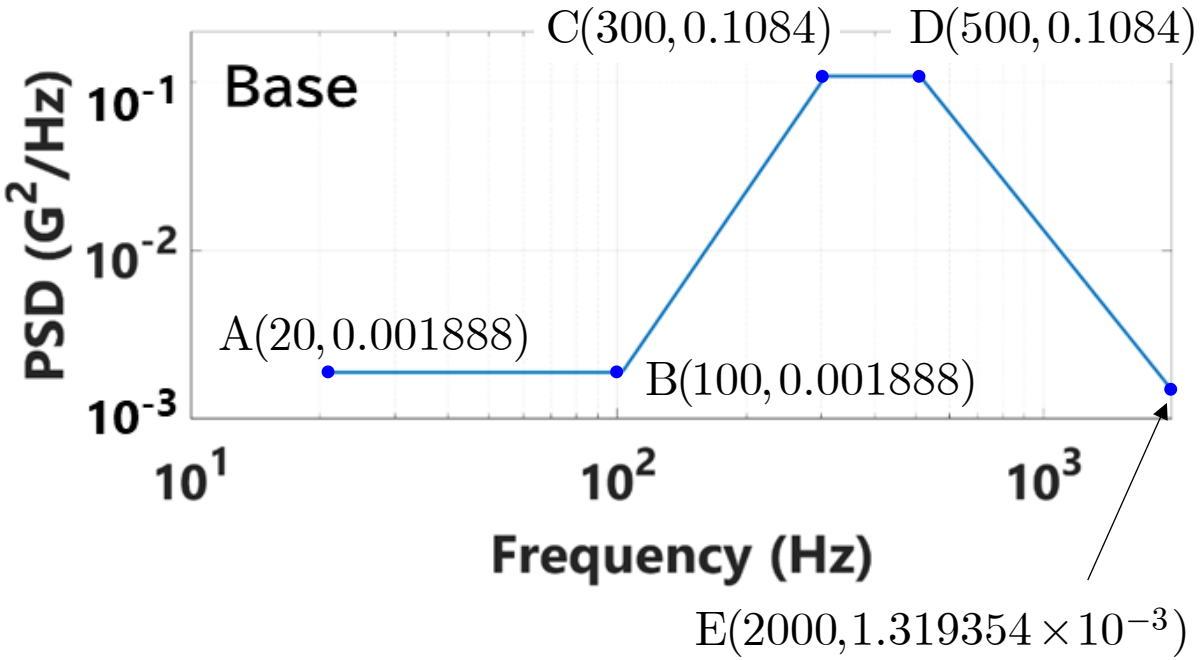
$$A_3 = \frac{1}{0+1}(0.1084 \times 500 - 0.1084 \times 300) = 21.68 \tag{11.3.18}$$

実効値の計算

★PSDのlog-log線図から求める

【例題11.3.1】

下図のような折れ線で加速度のPSDが規定されている場合の実効値を求めなさい。



最後の台形については、傾きは

$$a = \frac{\log_{10} \dfrac{1.319354 \times 10^{-3}}{0.1084}}{\log_{10} \dfrac{2000}{500}} = -3.180195 \qquad (11.3.19)$$

であり、面積は

$$A_4 = \frac{1}{1 - 3.180195} \times (1.319354 \times 10^{-3} \times 2000 - 0.1084 \times 500)$$
$$= 23.649857 \qquad (11.3.20)$$

したがって、実効値は

$$G_{rms} = \sqrt{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = 7.237\,\mathrm{G} \qquad (11.3.21)$$

第3章のまとめ(1/2)

- 信号の実効値は信号の二乗平均平方根(rms値)のことであり、パワの平方根である。
- 実効値は、信号の平均的な“大きさ”、“強さ”を表している。
- 振動のように、平均値が0である(0とみなすことができる)信号の場合、実効値は信号の平均値0からのばらつき標準偏差を表している。
- 実効値は周波数-PSD線図の面積の平方根になっている（面積はパワを表している)。

第3章のまとめ(2/2)

- 振動数-PSD線図が両対数グラフで直線になっている部分では、

$$S = \frac{S_1}{{f_1}^a} f^a \tag{11.3.9}$$

が成り立つので、その面積は

$$A = \frac{1}{a+1}\left(S_2 f_2 - S_1 f_1\right) \tag{11.3.12}$$

となる。

- 振動数-PSD線図の点(f_1, S_1)と点(f_1, S_1)を結ぶ直線におけるaの値は

$$a = \frac{\log_{10} \dfrac{S_2}{S_1}}{\log_{10} \dfrac{f_2}{f_1}} \tag{11.3.14}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

2025年6月23日(月)2限

第4章　強制振動とパワースペクトル密度

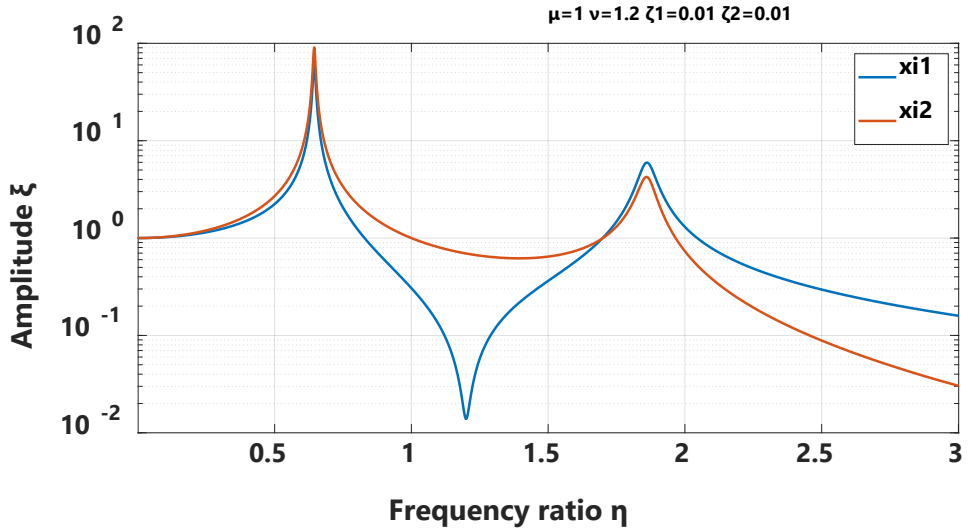
第4章の学修目標

★ 土台の振動が複数の振動数の振動の和になっている強制振動における応答の表現法について説明できる。

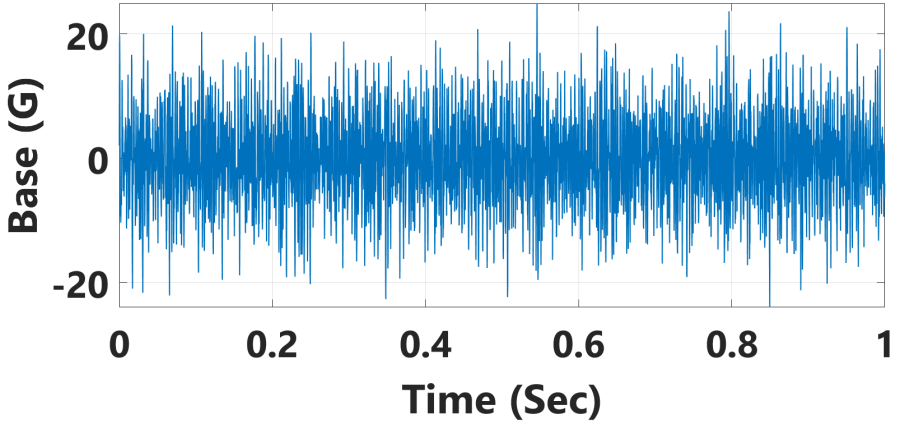
なぜパワースペクトル密度(PSD)が必要なのか？

★“現実の振動”に耐えられるものの設計・開発に必要

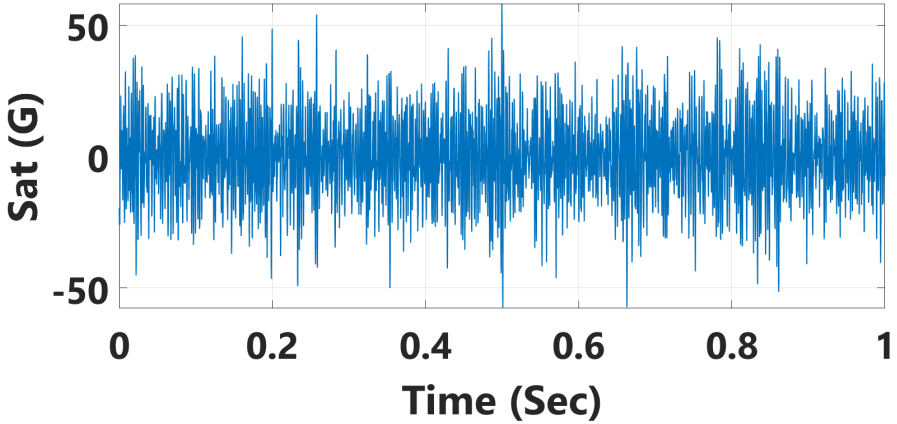
これまでは、土台が1つの振動数で正弦波振動に対するときの供試体の振動をみてきた（振動数を徐々に変えて、その都度、供試体の振動の時系列データから振幅を求めていた）。



現実の世界では、土台は複数の振動数の振動の和で振動する。 この場合、今までの「振動数vs応答倍率」のグラフを描くのは難しい。



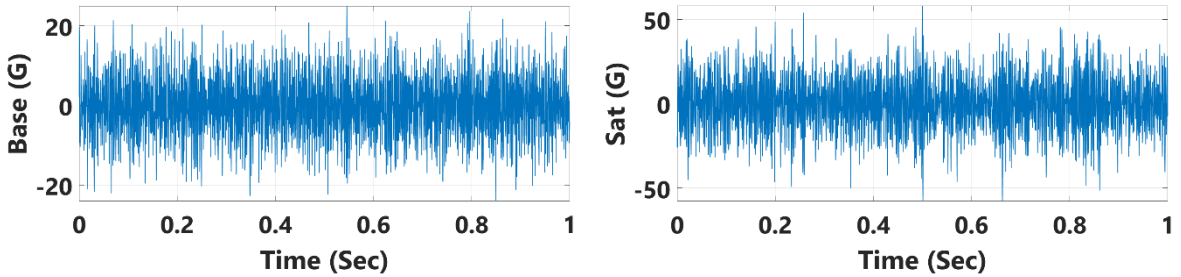
【土台の振動の例】



【土台の振幅に対する供試体の振動の例】

なぜパワースペクトル密度(PSD)が必要なのか？

★“現実の振動”に耐えられるものの設計・開発に必要



これらの試験データから、どうやってボード線図（応答倍率のグラフ）を描けばいいのだろうか・・・？

① 土台と供試体のそれぞれについて、以下値を求める。

$$\begin{cases} \alpha_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \\ \beta_n \equiv \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\dfrac{2\pi kn}{N}\right) \end{cases} \tag{11.1.8}$$

ちなみに、Matlab等の科学技術計算用のソフトを使うと，離散フーリエ変換

$$Y_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \tag{11.1.16}$$

を計算する関数が用意されている。 その場合、そういった関数でY_nを計算した後、

$$\alpha_n = \frac{2}{N}\mathrm{Re}(Y_n) \quad , \quad \beta_n = -\frac{2}{N}\mathrm{Im}(Y_n) \tag{11.1.17}$$

とすれば，α_nとβ_nを求めることができる。

② 土台と供試体の離散フーリエ変換から、それぞれのPSDを求める。まず、$T \equiv N\Delta t$とし、次に、Nが偶数なら$M = N/2$、奇数なら$M = (N-1)/2$　として、

$$S_n = \frac{T}{2}(\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2) \quad (1 \le n \le M) \tag{11.2.28}$$

ただし、Nが偶数の場合は、

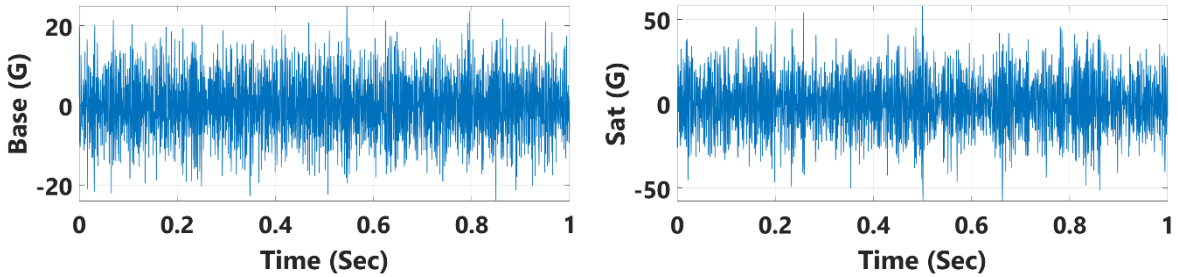
$$S_M = \frac{T}{2}\left[\left(\frac{\alpha_M}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_M}{2}\right)^2\right] = \frac{T}{8}(\alpha_M{}^2 + \beta_M{}^2) \tag{11.2.29}$$

離散フーリエ変換を用いると、

$$S_n = \frac{2T}{N^2}|Y_n|^2 \,, \quad \left(S_M = \frac{T}{2N^2}|Y_M|^2\right) \quad (11.2.26, 31)$$

なぜパワースペクトル密度(PSD)が必要なのか？

★“現実の振動”に耐えられるものの設計・開発に必要



③ 土台のPSD(S_n^bとする)と、供試体ののPSD(S_n^sとする)との比$\tilde{S}_n$を求める。

$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n^s}{S_n^b} \tag{11.4.1}$$

④ $\tilde{S}_n$に対応した振動数は

$$f_n = \frac{n}{T} = \frac{n}{N\Delta t} \tag{11.4.2}$$

であるので、$n = 1 \sim M$に関して、横軸f_n、縦軸$\tilde{S}_n$のグラフを描く。

ちなみに、実効値とPSDとの関係は

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|x(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}E} = \sqrt{P} \tag{11.3.1}$$

$$P = \sum_{n=0}^{M} S_n \Delta f \rightarrow \int_0^{f_M} S(f)\, df \tag{11.3.2}$$

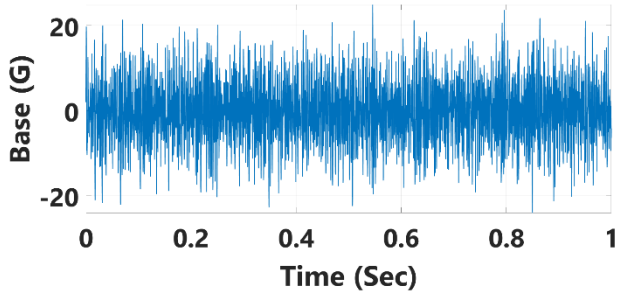
であったので、PSDS_nが求まったら、　振動の実効値x_{rms}は次式で求まる。

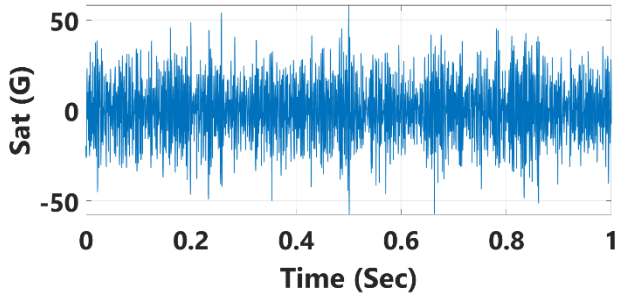
$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{M} S_n \Delta f} \tag{11.4.3}$$

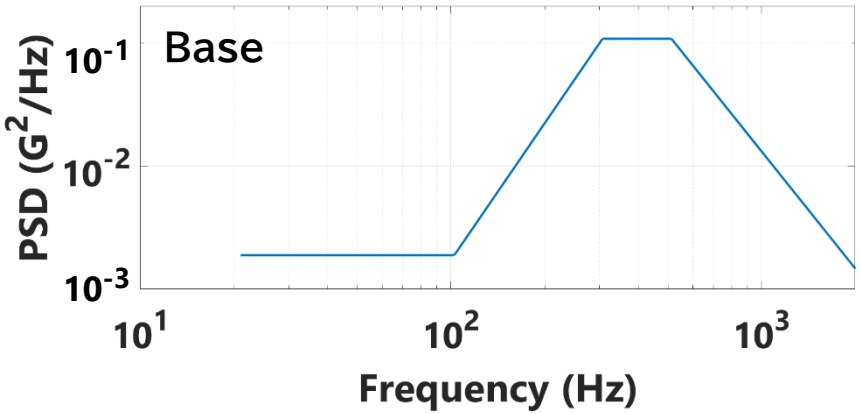
※ なお、振動試験設備を購入すると、自動でPSDのグラフやPSD比のグラフのデータを作成してくれる（都道府県の工業試験センターや民間の振動試験センターで振動試験をした場合も同様）。

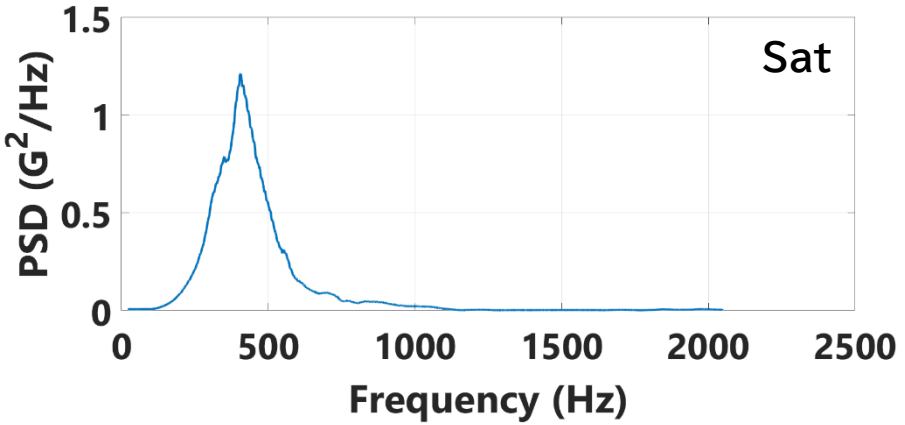
なぜパワースペクトル密度(PSD)が必要なのか？

★“現実の振動”に耐えられるものの設計・開発に必要

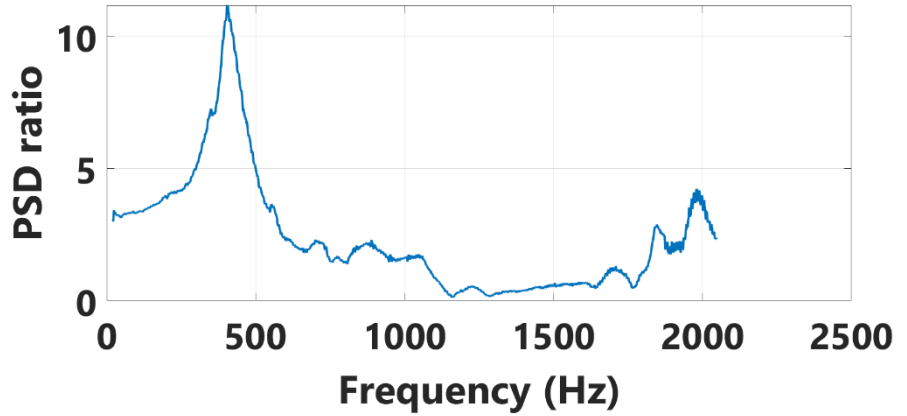








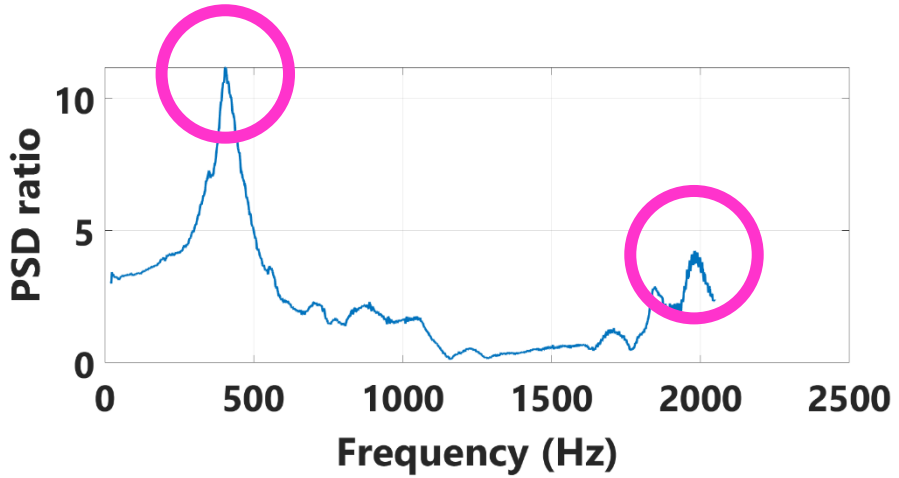
PSD比は以下の通り.



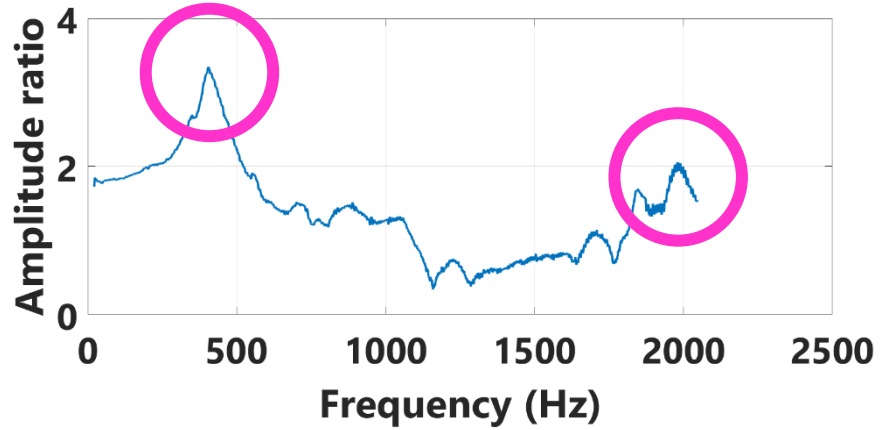
PSDではなく応答倍率でもいいのでは？

★2乗して強調することで，特徴をより鮮明にする！

PSD比の場合



応答倍率の場合



PSDの方が、設計上、クリティカルになるかもしれないような“特徴”をあぶり出しやすい（応答倍率の方は、全体が“なだらか”になりがち）。

第4章のまとめ

- 土台の振動が単振動ではなく、複数の振動の正弦波振動の和になっている場合は、次のようにして、加振振動数とPSD比との関係 を求めることができる.

  ①土台と供試体の振動の時系列データを それぞれ離散フーリエ変換したデータ配列を求める。

  ②離散フーリエ変換の データ配列から 土台と供試体の それぞれのPSDのデータ配列 S_n^b および S_n^s を求める。

  ③それらの比のデータ配列 $\tilde{S}_n$ を求める。

  ④そのデータ配列は、周波数 $f_n = n \,/\, (N\Delta t)$に対応しているので、周波数データ配列 f_n を横軸に、PSD比データ配列 $\tilde{S}_n$ を縦軸にとったグラフを描く。

- 応答倍率よりもPSD比の方が、 土台を加振したときの 供試体の 応答の特徴をより鮮明に捉えやすい。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

2025年6月23日(月)2限

第5章　パワースペクトル密度と共振

第5章の学修目標

★ PSDと共振振動数との関係について説明することができる。

★ PSD線図からQ値を求めることができる。

PSDと共振

★土台と対象物との応答倍率（振幅の比）が極大になるのが共振

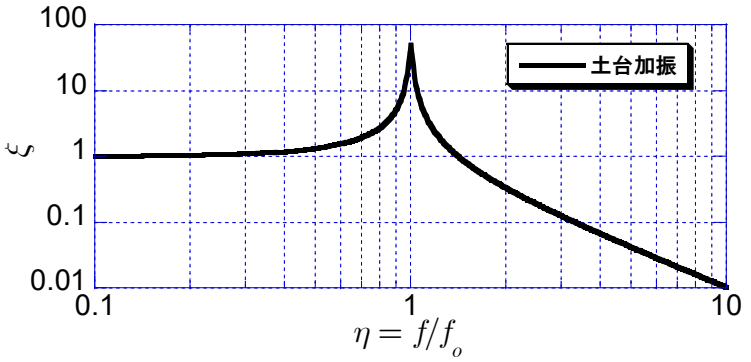
加振振動数 f と振幅比とのグラフの極大点の振動数（＝共振振動数）f_r と、振幅比が極大値の $1/\sqrt{2}$ の点の振動数 f_1 と f_2 を用いて、Q値は次式から求めることができた。

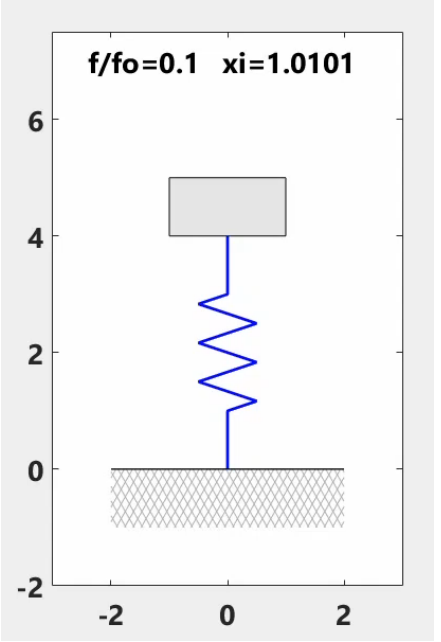
$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{5.5.4}$$

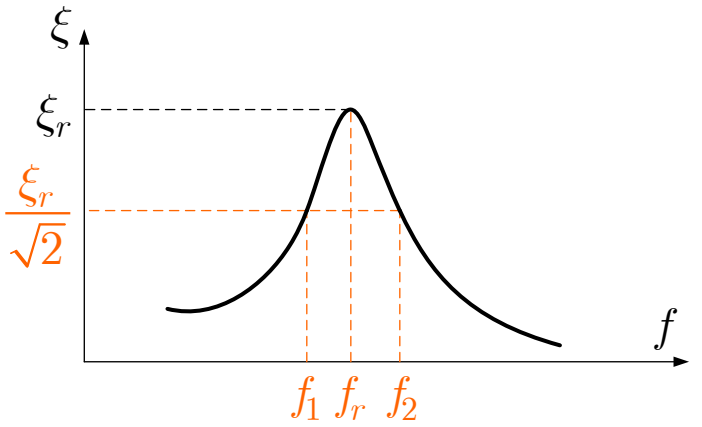
一方、振幅 X_n を用いて、PSD S_n は

$$S_n = \frac{P_n}{\Delta f} = P_n T = E_n = \frac{T X_n{}^2}{2} \tag{11.2.27}$$

と書ける。つまり、S_n は振幅の2乗に比例する。よって、PSD比が極大となる振動数は共振振動数と一致する。







PSDと共振

★土台と対象物との応答倍率（振幅の比）が極大になるのが共振

加振振動数 f と振幅比とのグラフの極大点の振動数（＝共振振動数）f_r と、振幅比が極大値の $1/\sqrt{2}$ の点の振動数 f_1 と f_2 を用いて、Q値は次式から求めることができた。

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{5.5.4}$$

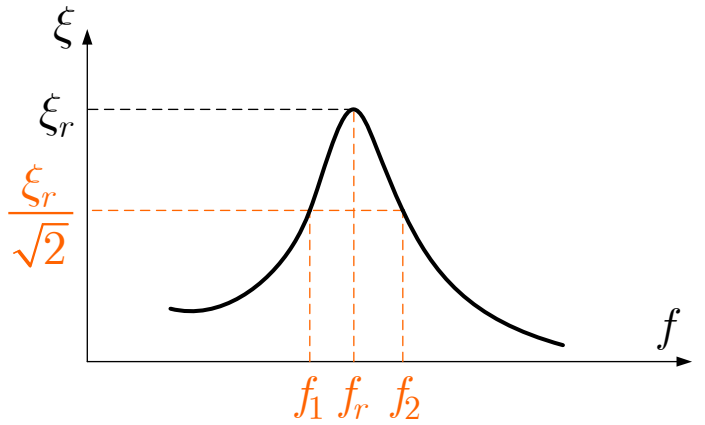
一方、振幅 X_n を用いて、PSD S_n は

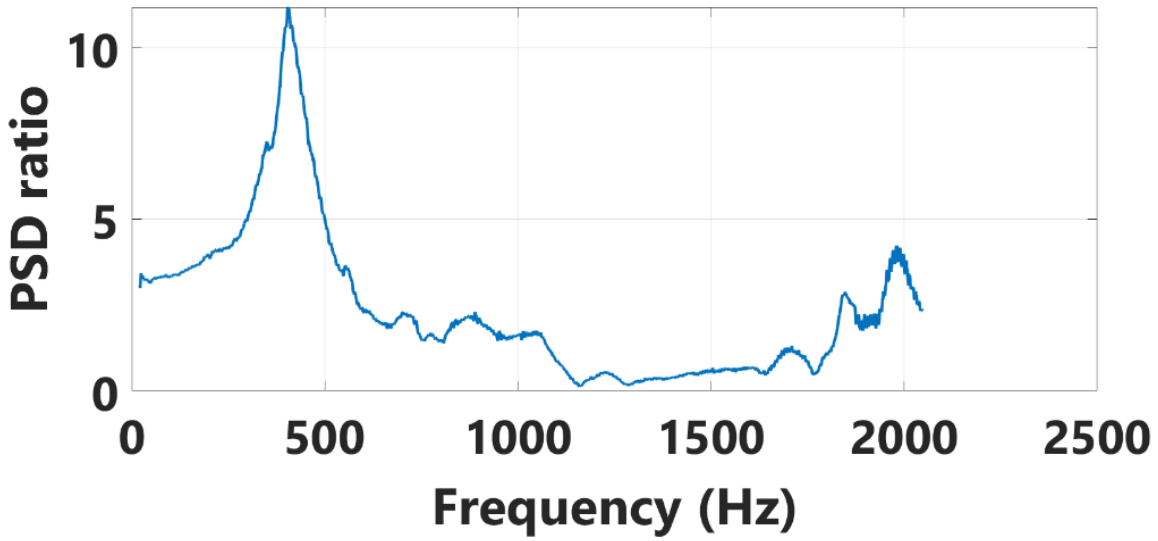
$$S_n = \frac{P_n}{\Delta f} = P_n T = E_n = \frac{T {X_n}^2}{2} \tag{11.2.27}$$

と書ける。つまり、S_n は振幅の2乗に比例する。よって、PSD比が極大となる振動数は共振振動数と一致する。

PSD比のグラフから、極大値の $1/2$ となる点の振動数 f_1 と f_2 を求めれば、 Q値は次式から求めることができる。

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{11.5.1}$$

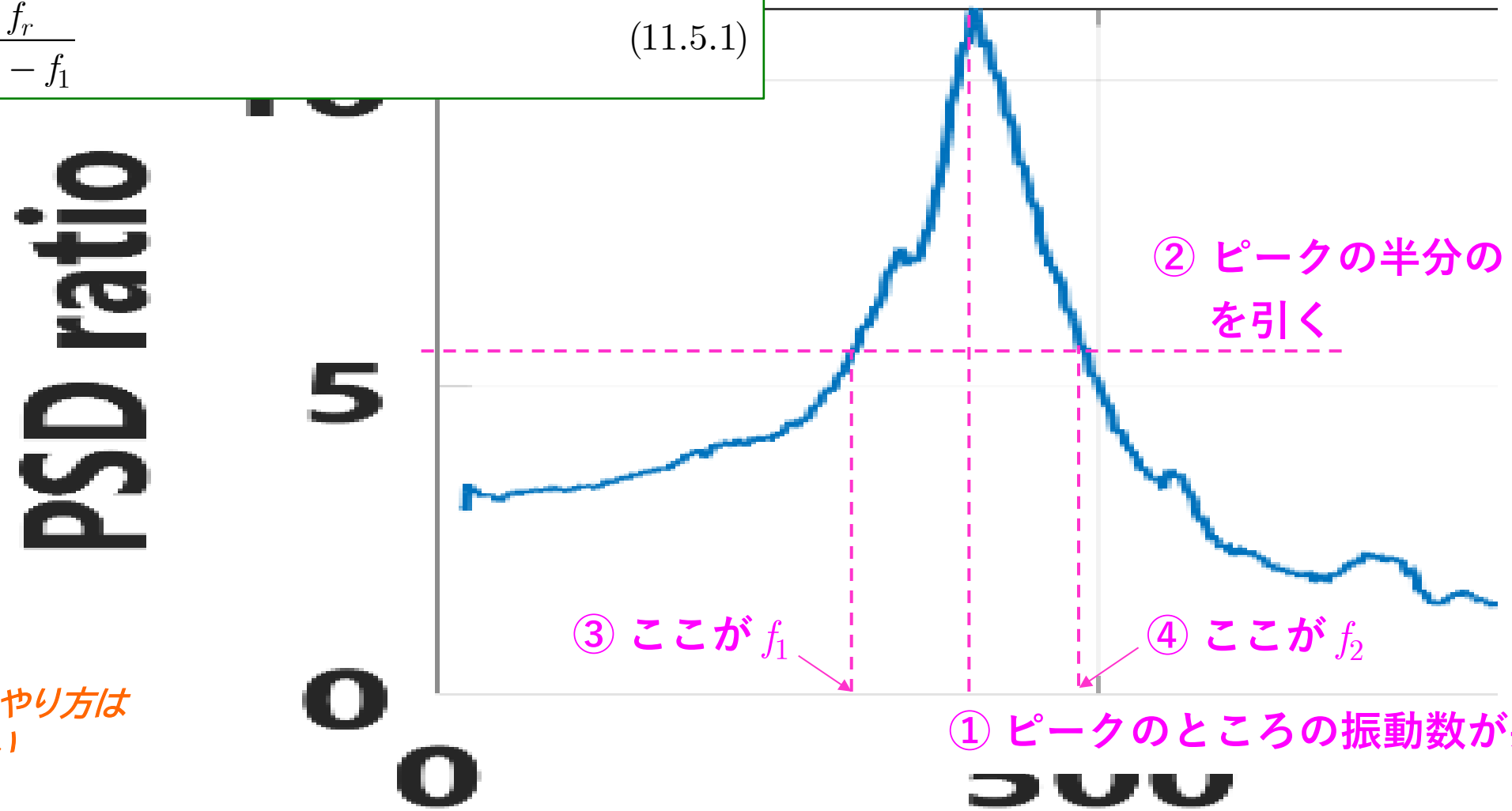




PSDと共振

★土台と対象物との応答倍率（振幅の比）が極大になるのが共振

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \qquad (11.5.1)$$



② ピークの半分のところに横線を引く

③ ここが f_1

④ ここが f_2

① ピークのところの振動数が共振振動数 f_r

ただし、このやり方は万能ではない

第5章のまとめ

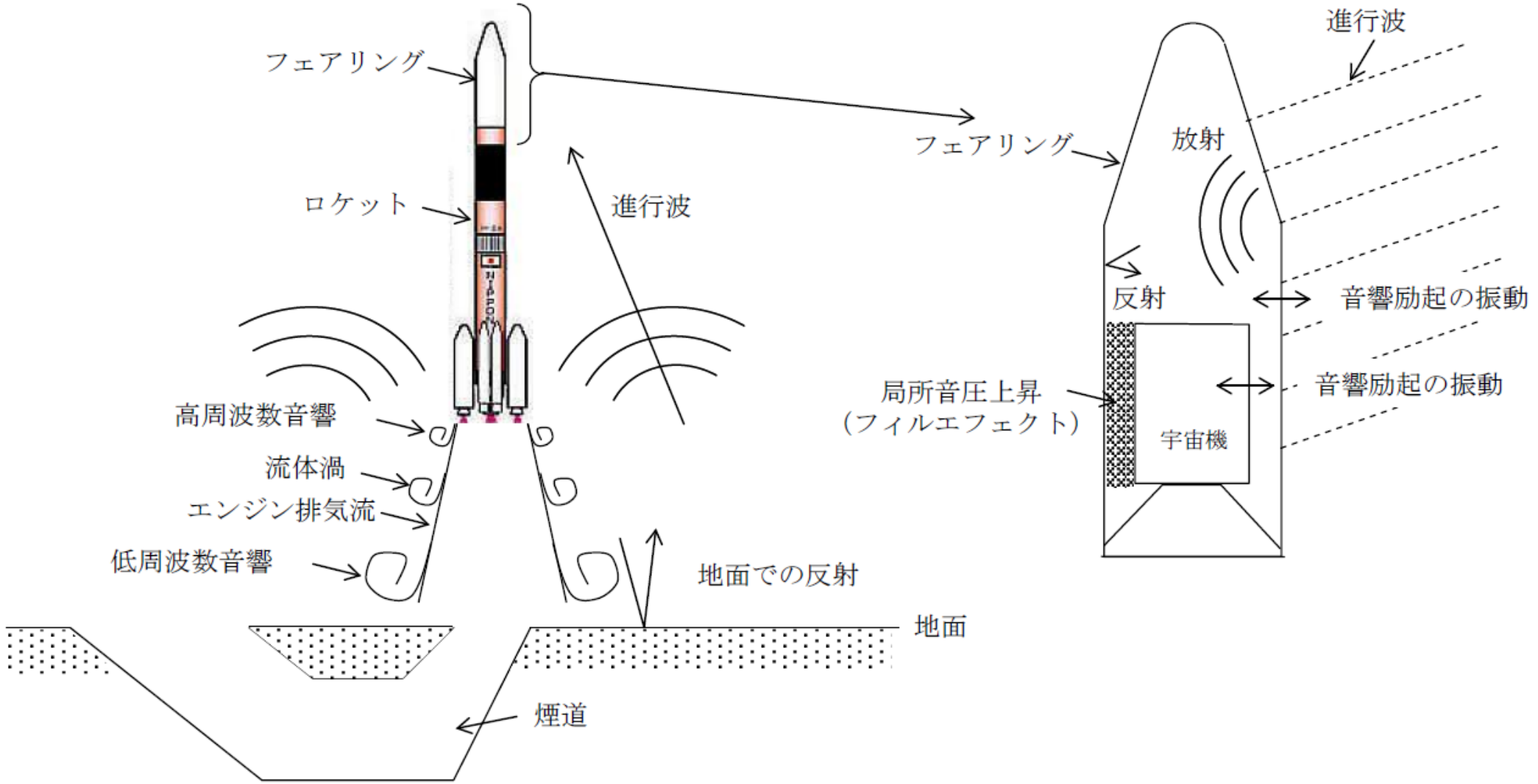
- 強制加振問題において、PDS比（対象物のPSDと土台のPSDとの比）が極大になるときの振動数が共振振動数となる。
- PSD比が共振点でのPSD比の半分になるときの振動数を求めることで、式(11.5.1)によりQ値を求めることができる。

$$Q \approx \frac{f_r}{f_2 - f_1} \tag{11.5.1}$$

付録　　音響振動によるパワースペクトル密度

ロケットの打ち上げ振動

★ロケットの打ち上げ振動



ハンドブック」

音響負荷による宇宙機の応答

★ロケット内の音響環境

例えば、イプシロンロケットでは、 右上図のような音響振動条件（周波数と音圧レベルとの関係）が、小型衛星（170kg以上）に対して規定されている（超小型衛星の場合は土台のランダム振動が規定されている）。

設計段階では、この音響振動条件で強度計算を行う必要があり、製造段階では、音響試験により強度を確認する必要がある。

第12回の授業の付録に記載する通り、強度計算の際には音響によるパワースペクトル密度の値が必要となる。

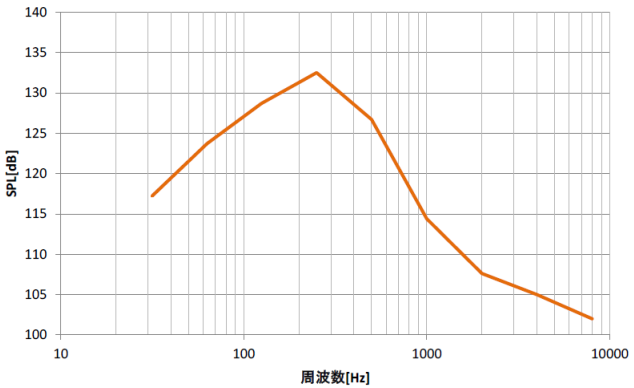


図 4.5.1-3 音響環境

表 4.5.1-6 音響環境

周波数[Hz]	SPL [dB]
31.5	117.2
63.0	123.7
125	128.7
250	132.5
500	126.7
1000	114.4
2000	107.6
4000	105.0
8000	102.0
O.A. 135.0dB 30[seconds]	

※ ATレベル、0dB = 2 x 10^{-5} Pa

★音響負荷のパワースペクトル密度

一般に、 音圧レベルが周波数 f の関数として与えられている場合、 それぞれの周波数における音圧レベルの帯域幅を B とすれば、音響のPSDは

$$S_a(f) = \frac{{p_o}^2 \times 10^{S_{PL}/10}}{B} \tag{11.A.1}$$

ただし、S_{PL}は音圧レベルであり、

$$p_o = 2.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa} \tag{11.A.2}$$

である。また、帯域幅 B は、 音圧レベルを定義するオクターブバンドによって決まるもので、1/1オクターブバンドであれば、

$$B = \left(2^{1/2} - 2^{-1/2}\right) f = \frac{1}{\sqrt{2}} f \approx 0.707 f \tag{11.A.3}$$

であり、1/3オクターブバンドであれば、

$$B = \left(2^{1/6} - 2^{-1/6}\right) f \approx 0.232 f \tag{11.A.4}$$

なお、上式の2を$10^{3/10}$（$= 3\mathrm{dB}$の真値）のとするやり方方もある（とはいえ、 $10^{3/10} = 1.995\cdots \approx 2$ であるので、計算結果はほとんど変わらない）。

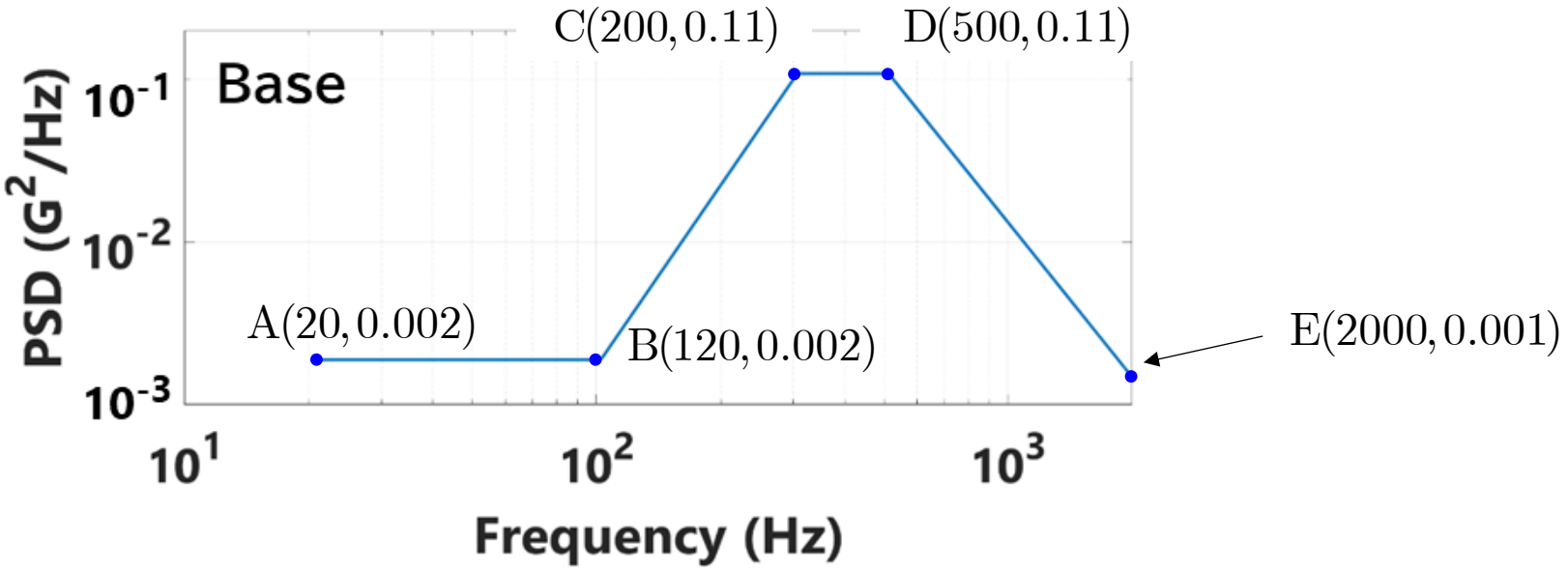
振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第11回　パワースペクトル密度

2025年6月23日(月)2限

課題

2025年6月29日(日)18時00分締切

[1] 下図のようなPSD線図が与えられている。実効値を求めなさい。(2点)



[2] 添付の「PSD.txt」には衛星を加振機に載せて振動させたときの実験データが格納されている。 その中身は、下図のように、1列目が加振振動数、2列目が加振機の台のPSD、3列目が衛星のPSDのデータとなっている。

(1) 衛星に作用する振動の実効値を求めなさい(3点)。

Frequency(Hz)	Base_PSD(G^2/Hz)	Sat_PSD(G^2/Hz)↓
2.10000000000000e+01	1.88800000000722e-03	5.80283547305918e-03↓
2.20000000000000e+01	1.88800000001904e-03	5.63553524541439e-03↓
2.30000000000000e+01	1.88799999999408e-03	6.21286792225072e-03↓

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第11回　パワースペクトル密度

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第12回　ランダム振動

宮崎　康行

miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第12回の学修目標

★ 音響振動について説明できる。

★ ランダム振動とパワースペクトル密度との関係を説明できる。

★ ランダム振動を時間の関数で表現できる。

★ ランダム加振による過渡応答の計算法を説明できる。

★ ランダム加振されるバネ・マス・ダンパー系の応答 について説明できる。

第12回の全体構成

第1章　ランダム振動データの生成

第2章　ランダム加振による過渡応答

第3章　土台をランダム加振される1自由度バネ・マス・ダンパー系の応答

付録　音響負荷による宇宙機の応答の予測

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年6月30日(月)2限

第12回　ランダム振動

第1章　ランダム振動データの生成

第1章の学修目標

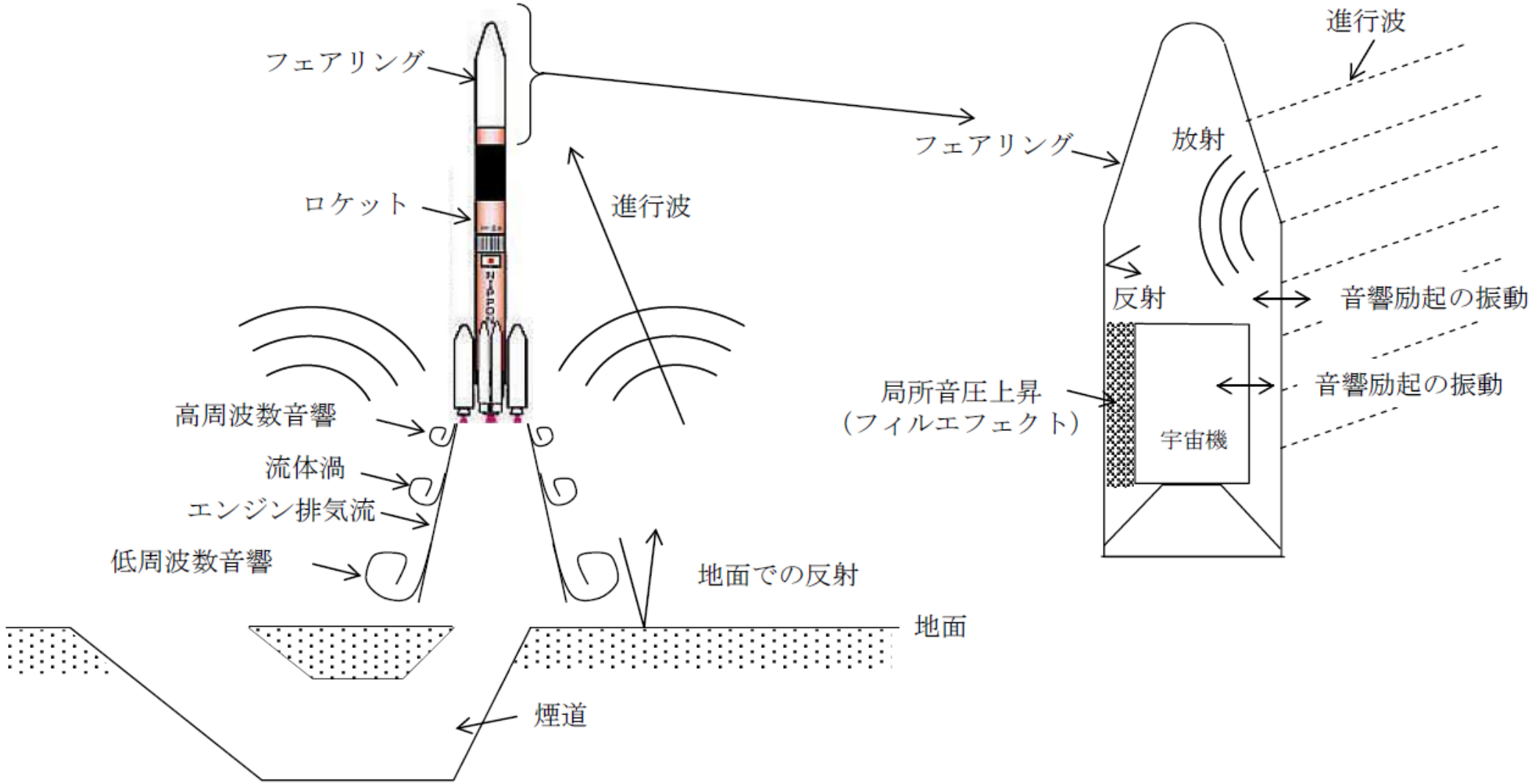
★ 宇宙機打上げの際の音響振動について説明できる。

★ ランダム振動について説明できる。

★ ランダム振動とPSDとの関係を説明できる。

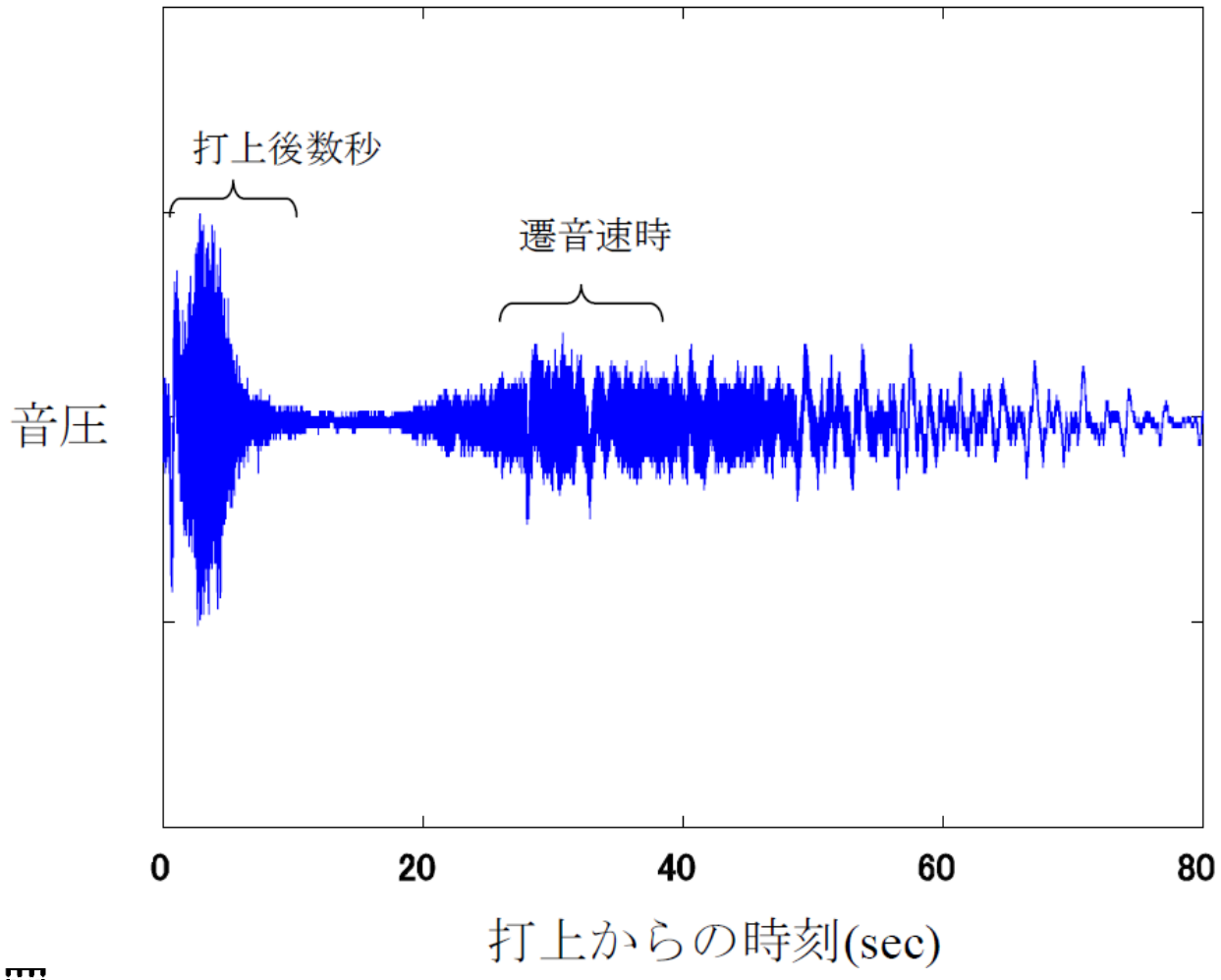
ロケットの打ち上げ振動

★ロケットの打ち上げ振動

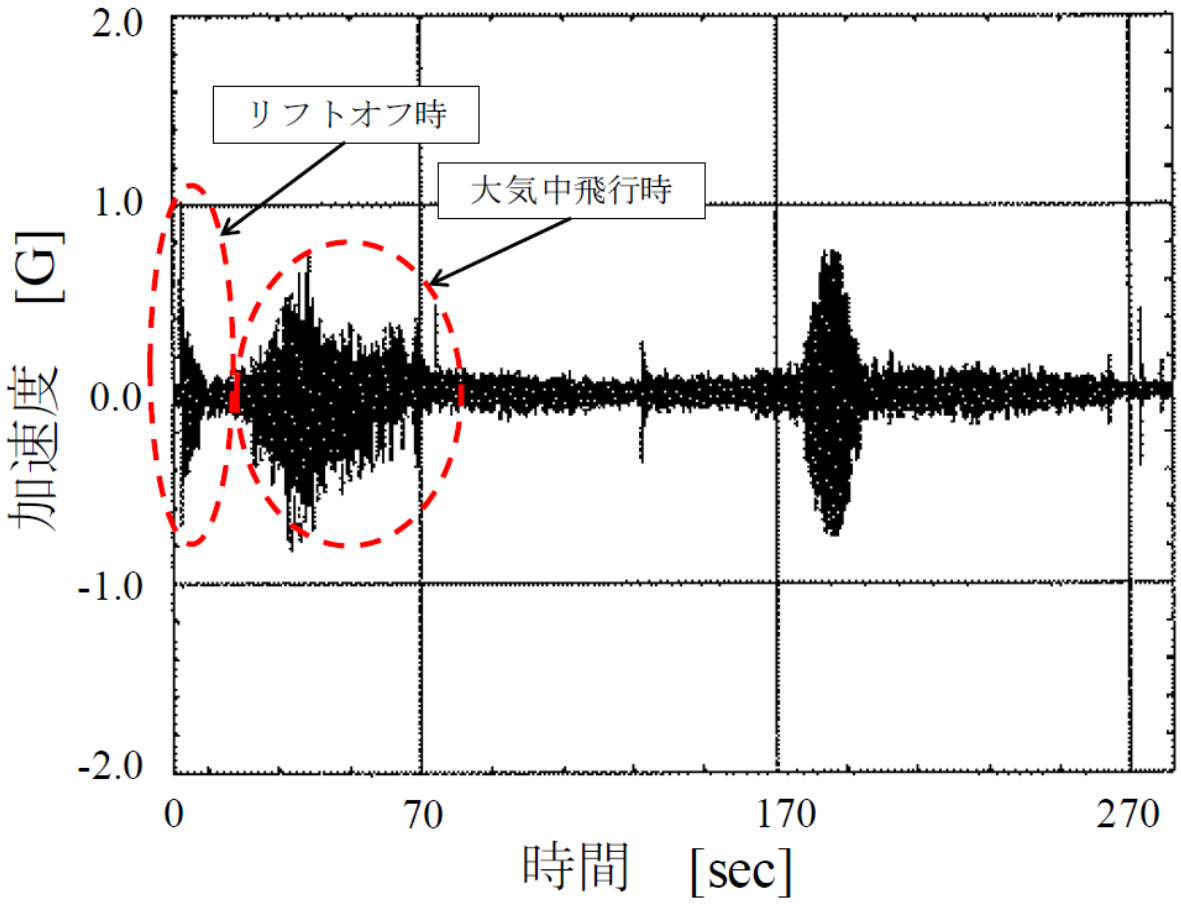


音圧による振動

★音圧が様々な周波数の振動の和になっている場合には・・・



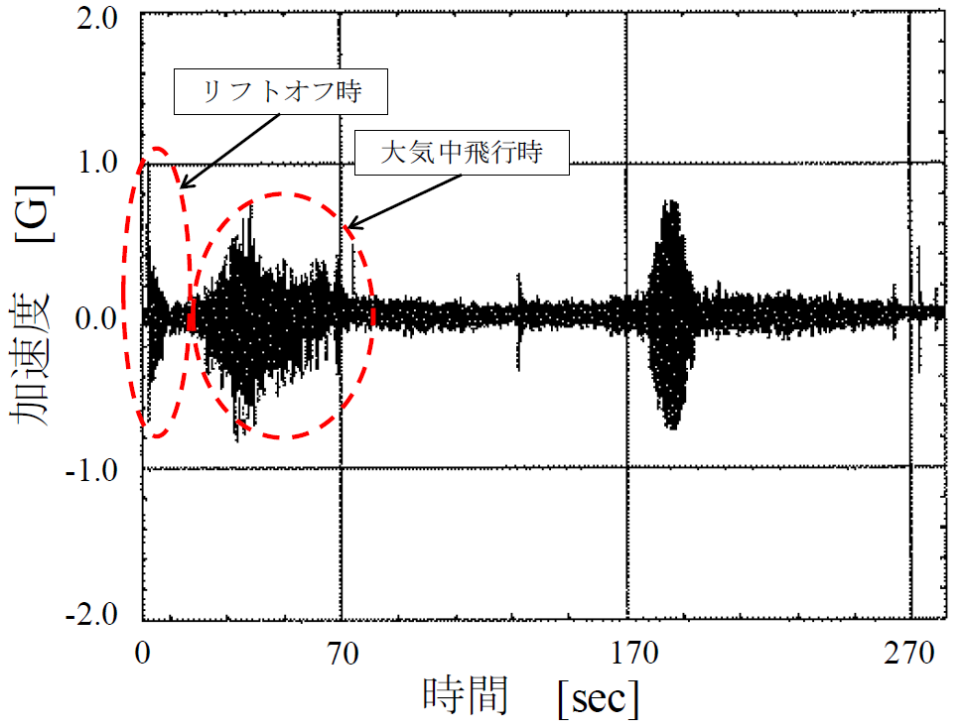
音圧の振動に応じて 搭載機に作用する加速度も激しく振動する。

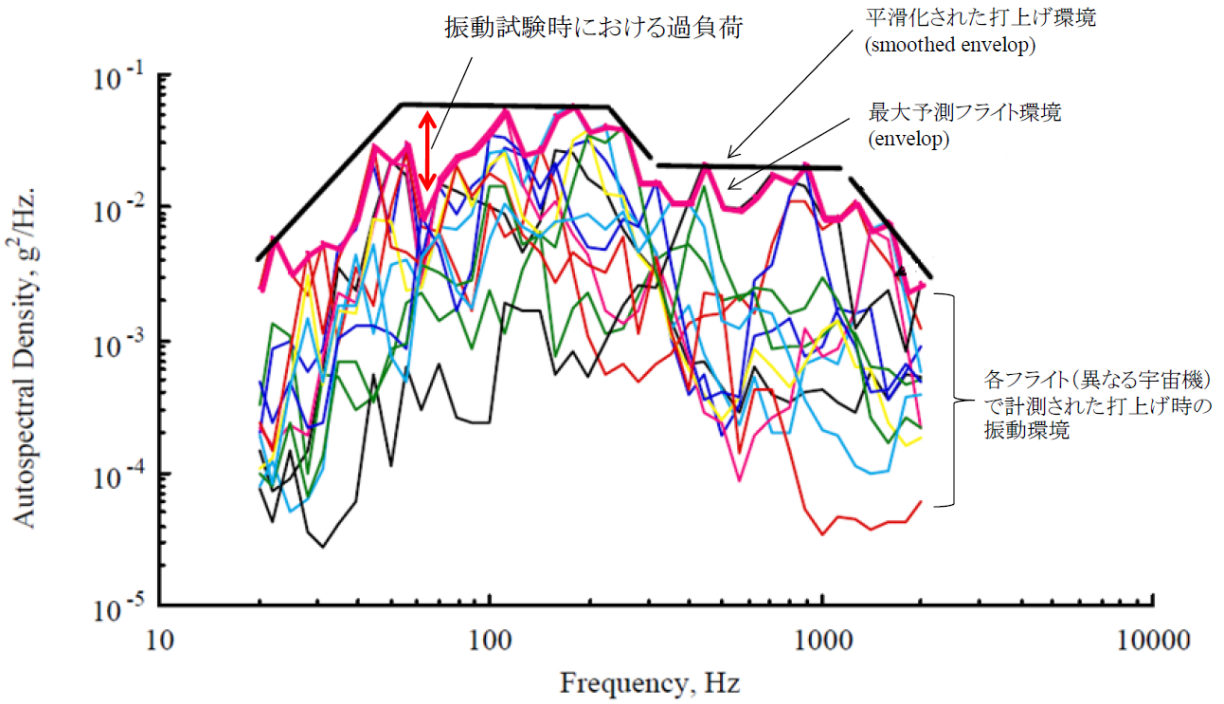


ランダム振動とは？

★瞬間瞬間の振動数や振幅の予測は困難だが統計的にはある特徴をもった振動

文字通りの“ランダム”な振動というわけではない。 例えば、加速度の時系列データだけを見ると、“ランダム”なように見えるが、PSDを計算すると、 “傾向”がみられるような振動はよくある（例えば, ロケット打ち上げ時に、搭載された宇宙機に作用する加速度など）。





逆に言えば、過去のデータをもとにPSDを設定することで、打ち上げ時の振動を模擬することができるはず。

⬇

PSDから振動の時系列データをつくるにはどうすればよい？

PSDを用いたランダム振動データの生成

★位相だけランダムにすればよい

第11回の授業では、振動が

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(\tilde{a}_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \tilde{b}_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right) \qquad (11.1.9)$$

と表されるとき、振動数 $f_n = n\,/\,T$ の振動の振幅は

$$X_n = \sqrt{\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2} \quad (1 \le n \le M) \qquad (11.2.17)$$

とあらわすことができ、PSDは

$$S_n = \frac{TX_n{}^2}{2} \qquad (11.2.23)$$

と表すことができることを学んだ。

ここで、

$$\cos\delta_n \equiv \frac{\tilde{a}_n}{\sqrt{\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2}}, \quad \sin\delta_n \equiv -\frac{\tilde{b}_n}{\sqrt{\tilde{a}_n{}^2 + \tilde{b}_n{}^2}} \qquad (12.1.1)$$

と定義すれば、

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \delta_n\right) \qquad (12.1.2)$$

と表すことができる。

したがって、逆に、振動数 $f_n = n\,/\,T$ の振動成分のPSD S_n の値がわかっていれば，信号は次式で求めることができる。

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\sqrt{\frac{2S_n}{T}}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \delta_n\right) \qquad (12.1.3)$$

ここで、振動の場合、定数項は0であろうが、もし，S_0 がわかっていたら、式(11.2.3)、(11.2.19)、(11.2.23)より

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} = X_0 = \sqrt{\frac{S_0}{T}} \qquad (12.1.4)$$

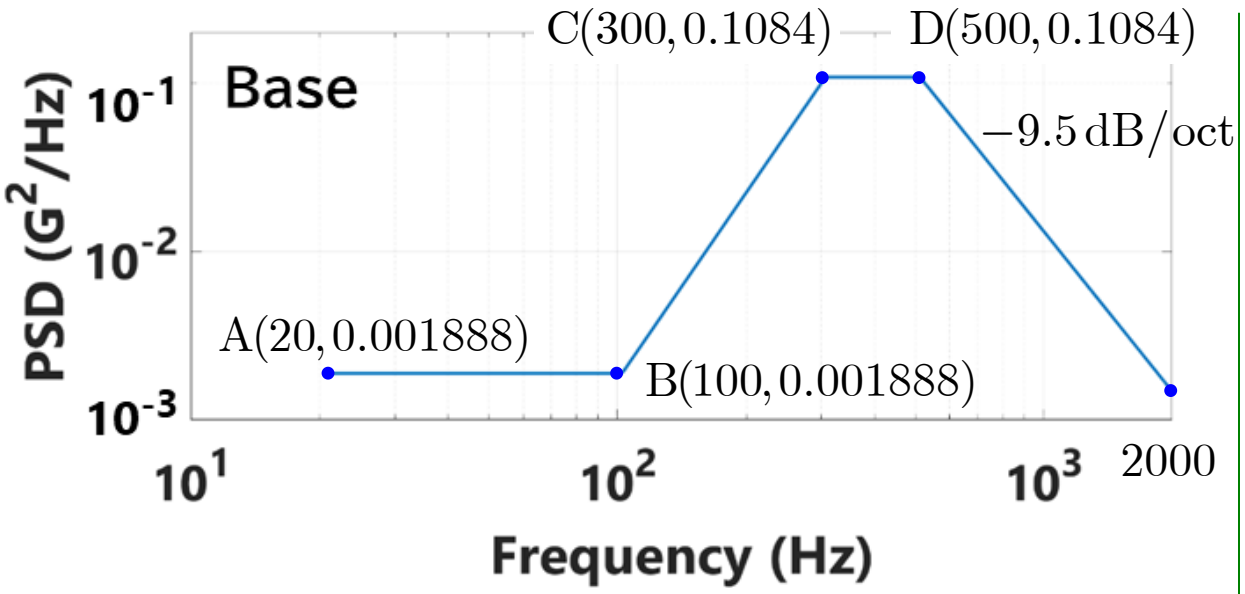
とすればよいだろう。

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{\frac{S_0}{T}} + \sum_{n=1}^{M}\sqrt{\frac{2S_n}{T}}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \delta_n\right) \qquad (12.1.5)$$

では、PSDと加振振動数との関係のグラフが 与えられているとき、 式(12.1.5)において，M と T と δ_n はどのように決定すればよい？

PSDを用いたランダム振動データの生成

★位相だけランダムにすればよい



例えば、振動試験（第14回の授業で学びます）の場合であれば、上図のように，必要な最大振動数 $f_{\max}$ と、最低試験時間 $T_{\min}$ は規定されている。一方，加振機（振動試験機）が発生できる振動数幅 $\Delta\tilde{f}$ と最大振動数 $\tilde{f}_{\max}$ も決まっている（限界がある）。そこで、まずは、$\tilde{f}_{\max} \geq f_{\max}$ である加振機を選び、M と T は、

$$\Delta\tilde{f} = \frac{1}{T} \quad , \quad \frac{M}{T} \geq f_{\max} \tag{12.1.6}$$

つまり、

$$T = \frac{1}{\Delta\tilde{f}} \quad , \quad M \geq \frac{f_{\max}}{\Delta\tilde{f}} \tag{12.1.7}$$

となるように決める。そして、

$$T < T_{\min} \tag{12.1.8}$$

であれば、試験時間を $T_{\min}$ とし、

$$T \geq T_{\min} \tag{12.1.9}$$

であれば、試験時間を T とすればよい（$T \geq T_{\min}$ となるように $\Delta\tilde{f}$ を調整する？）。

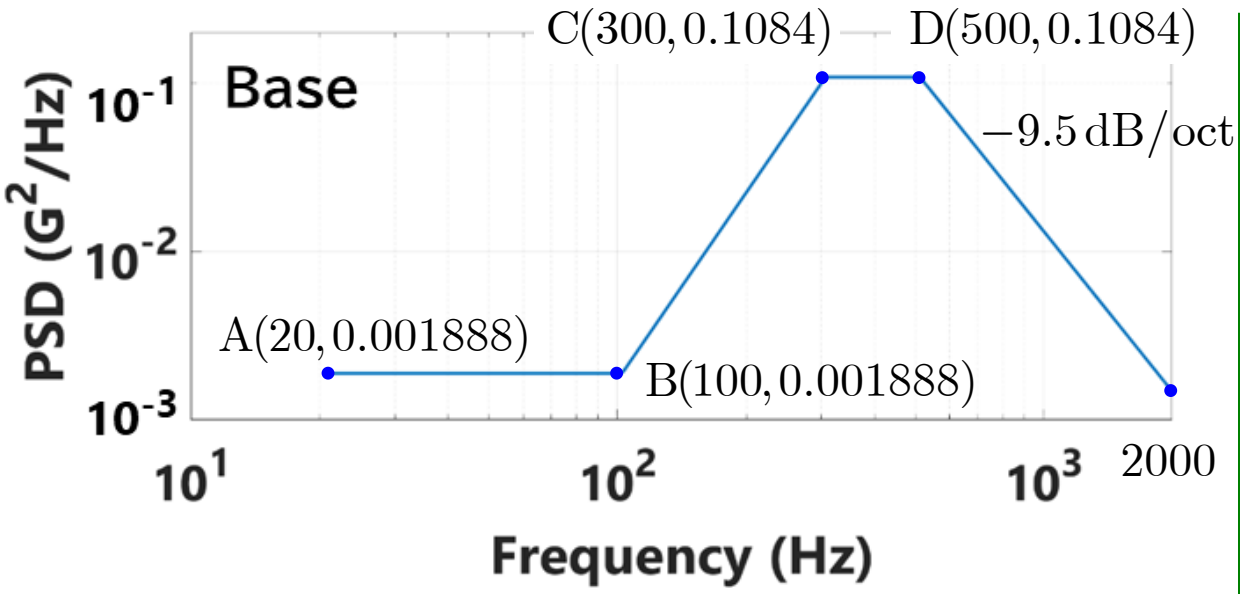
最後に、δ_n は $0 \leq \delta_n \leq 2\pi$ の範囲でランダムに与える。

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \tag{12.1.10}$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{\Delta\tilde{f}} \quad , \quad X_n = \sqrt{\dfrac{2S_n}{T}} = \sqrt{2S_n\Delta\tilde{f}} \\ f_n = n\Delta\tilde{f} \end{cases} \tag{12.1.11}$$

与えられた振動数におけるPSDの算出

★PSD線図が両対数グラフで直線になっている場合



上図の例でいえば、$f < 20\mathrm{Hz}$のときには$S = 0$であり、$20\mathrm{Hz} \leq f \leq 100\mathrm{Hz}$のときには $S = 0.001888\,\mathrm{G}^2/\mathrm{Hz}$である。そして,$100\mathrm{Hz} < f \leq 300\mathrm{Hz}$のときには、

$$S = S_1 \left(\frac{f}{f_1} \right)^a \tag{12.1.12}$$

と書けるので、

$$0.1084 = 0.001888 \times \left(\frac{300}{100} \right)^a \tag{12.1.13}$$

となり、

$$a = \frac{\log_{10} \left(\dfrac{0.1084}{0.001888} \right)}{\log_{10} \left(\dfrac{300}{100} \right)} = 3.686365 \tag{12.1.124}$$

よって、次式よりSを求めることができる。

$$S = 0.001888 \times \left(\frac{f}{100} \right)^{3.686365} \tag{12.1.15}$$

$300\mathrm{Hz} < f \leq 500\mathrm{Hz}$のときには$S = 0.1084\,\mathrm{G}^2/\mathrm{Hz}$。

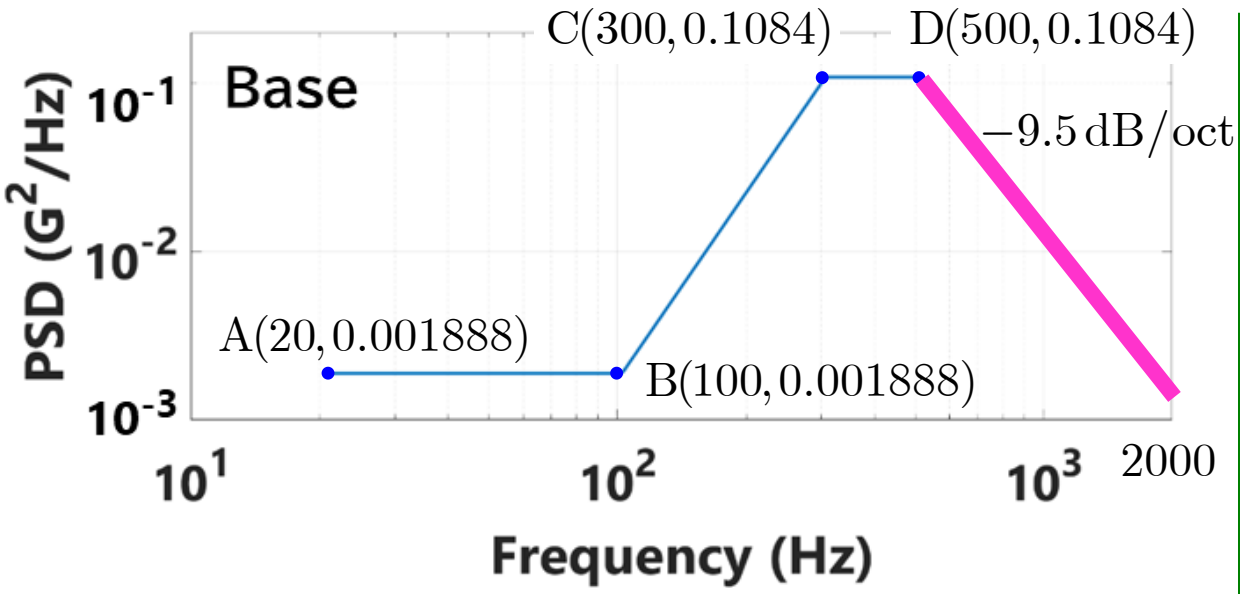
最後に、$500\mathrm{Hz} < f \leq 2000\mathrm{Hz}$の場合は以下の通り。

まず、一般に、$m\,\mathrm{dB}\,/\,\mathrm{oct}$とは、「振動数が2倍になると,PSDが$m\,\mathrm{dB}$だけ増える」という意味。いま、振動数が$f$のときのPSDを$S(f)$と書くと、

$$10 \log_{10} S(2f) = 10 \log_{10} S(f) + m \tag{12.1.16}$$

与えられた振動数におけるPSDの算出

★PSD線図が両対数グラフで直線になっている場合



$$10\log_{10} S(2f) = 10\log_{10} S(f) + m \tag{12.1.16}$$

この式より、

$$\log_{10} S(2f) - \log_{10} S(f) = \frac{m}{10} \tag{12.1.17}$$

つまり、

$$\log_{10} \frac{S(2f)}{S(f)} = \frac{m}{10} \tag{12.1.18}$$

したがって、

$$\frac{S(2f)}{S(f)} = 10^{\frac{m}{10}} \tag{12.1.19}$$

実は、この式を満たす$S(f)$は次式の形をしたものしかない。

$$S(f) = Af^a \tag{12.1.20}$$

まさに式(12.1.12)そのもの。

$$S = S_1 \times \left(\frac{f}{f_1}\right)^a \tag{12.1.12}$$

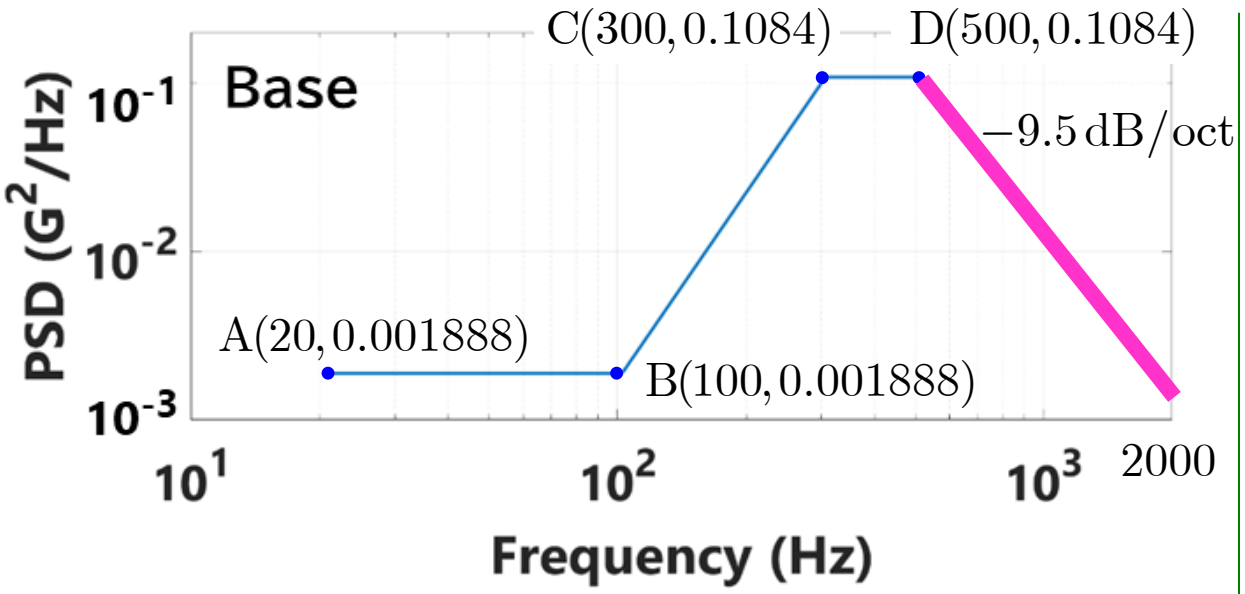
式(12.1.12)を(12.1.19)に代入すると、

$$\frac{S_1 \times \left(\frac{2f}{f_1}\right)^a}{S_1 \times \left(\frac{f}{f_1}\right)^a} = 10^{\frac{m}{10}} \tag{12.1.21}$$

したがって、

与えられた振動数におけるPSDの算出

★PSD線図が両対数グラフで直線になっている場合



$$\frac{S_1 \times \left(\frac{2f}{f_1}\right)^a}{S_1 \times \left(\frac{f}{f_1}\right)^a} = 10^{\frac{m}{10}} \tag{12.1.21}$$

つまり、

$$2^a = 10^{\frac{m}{10}} \tag{12.1.22}$$

これより，

$$a = \log_2 10^{\frac{m}{10}} = \frac{m}{10}\log_2 10 = \frac{m}{10\log_{10} 2} \tag{12.1.23}$$

つまり，

$$a \approx \frac{m}{3} \tag{12.1.24}$$

左上図の例でいれば、

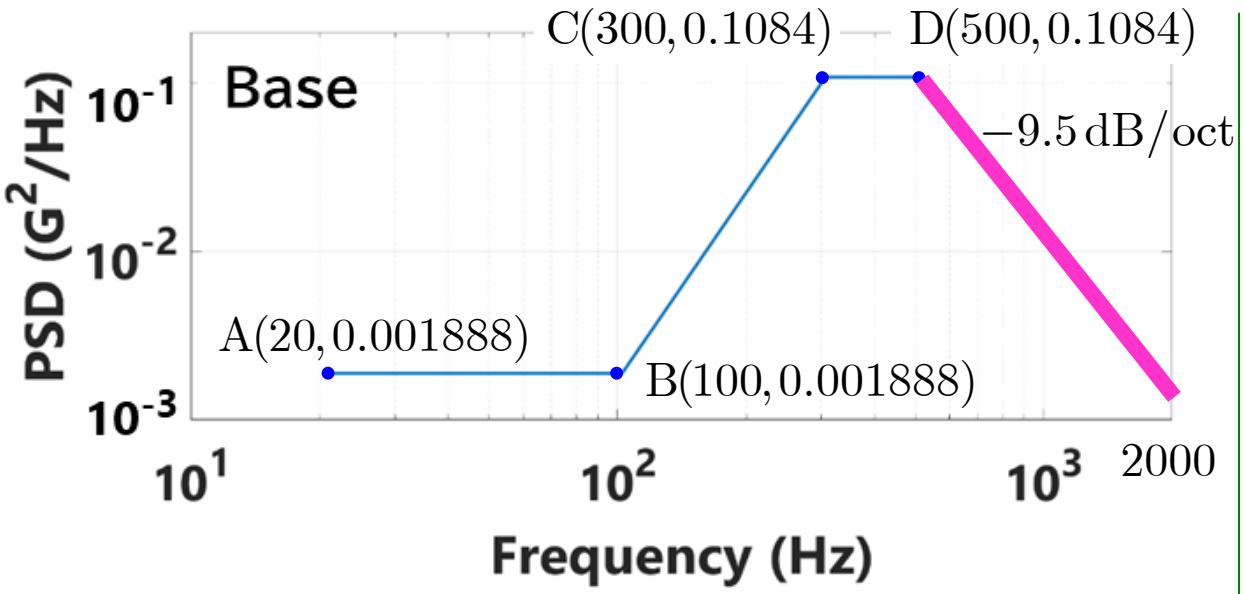
$$a = \frac{-9.5}{10\log_{10} 2} = -3.15583 \tag{12.1.25}$$

であり、$f = 2000\mathrm{Hz}$のとき、

$$\begin{aligned} S &= 0.1084 \times \left(\frac{2000}{500}\right)^{-3.15583} \\ &= 0.001364675\,\mathrm{G}^2/\mathrm{Hz} \end{aligned} \tag{12.1.26}$$

与えられた振動数におけるPSDの算出

★PSD線図が両対数グラフで直線になっている場合



【例題】上図において、加振振動数が$120\mathrm{Hz}$のとき、および、$1000\mathrm{Hz}$のときのPSDを求めなさい。

【略解】グラフより、加振振動数fが$100\mathrm{Hz} \leq f \leq 300\mathrm{Hz}$の間は、$f$とPSD$S$との関係は

$$S = S_1 \left(\frac{f}{f_1}\right)^a \quad , \quad a = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)} \tag{1}$$

という形で書ける。ただし、グラフより、

$$\begin{cases} f_1 = 100\,, & S_1 = 0.001888 \\ f_2 = 300\,, & S_2 = 0.1084 \end{cases} \tag{2}$$

よって、

$$a = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{0.1084}{0.001888}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{300}{100}\right)} \approx 3.686751 \tag{3}$$

であり、式(1)より、$f = 120\,\mathrm{Hz}$のときのPSDの値は

$$S = 0.001888 \times \left(\frac{120}{100}\right)^{3.686751} = 0.003698\,\mathrm{G}^2/\mathrm{Hz} \tag{4}$$

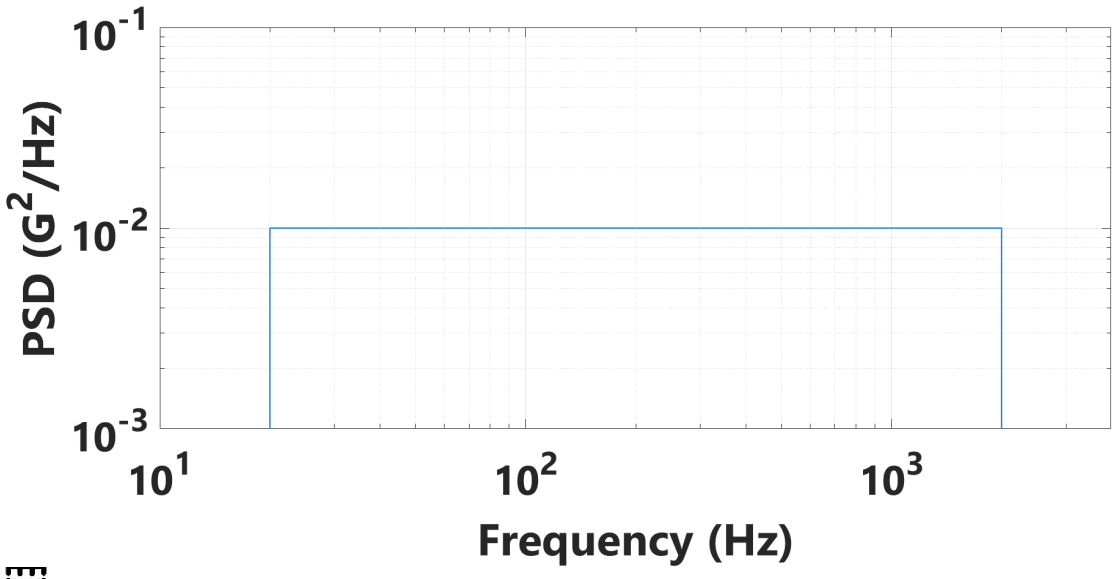
ホワイトノイズ

★PSDが一様なランダム振動

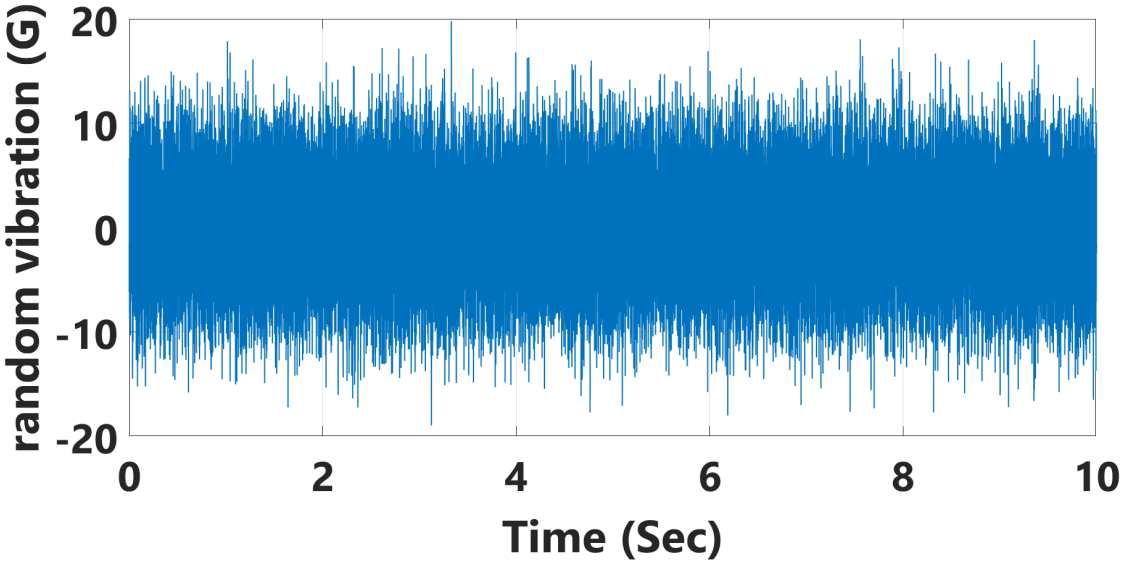
現実的には、振動数の範囲は有限にする。この場合、一様なPSDの値をS_oとすれば、 ホワイトノイズは次式のように書ける。 ただし、δ_nは$0 \le \delta_n \le 2\pi$の範囲でランダムに与える。

$$\tilde{w}(t) = \sum_{n=1}^{M} \sqrt{2 S_o \Delta\tilde{f}} \cos\left(2\pi n \Delta\tilde{f} t + \delta_n\right) \qquad (12.1.28)$$

例えば、下図のようにPSDを規定する。



この例では、ホワイトノイズは下図のようになる。 ただし、$\Delta\tilde{f} = 0.1\,\mathrm{Hz}$とした。



第1章のまとめ(1/2)

- 物体に音圧が作用すると、物体はその音圧の振動数で加振されることになる。この振動は音響振動と呼ばれる。
- 宇宙機をロケットで打ち上げる際には、宇宙機は音響加振されるが、これによる振動のPSDには特徴があり、それをもとに、 振動を再現することができる。
- PSDプロファイルが与えられると、与えられた振動数 f_n の振動の振幅 X_n は、その振動数でのPSD S_n を用いて次式で求めることができる。

$$T = \frac{1}{\Delta \tilde{f}} \quad , \quad X_n = \sqrt{2 S_n \Delta \tilde{f}_n} \quad , \quad f_n = n \Delta \tilde{f} \tag{12.1.11}$$

第1章のまとめ(2/2)

- それぞれの振動の位相差δ_nをランダムに与えることで、それらの振動の和として、ランダム振動データを生成することができる。

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \qquad (12.1.10)$$

- 理論的には、ホワイトノイズは、全ての振動数に対して振幅が一定(すなわち、PSDが一定となるランダム振動であり、現実的には、ある振動数範囲で一定値をとるランダム振動である。すなわち、PSDの値をS_oとして、

$$X_n = \sqrt{2S_o\Delta\tilde{f}} \qquad \text{for } n \leq M$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年6月30日(月)2限

第12回　ランダム振動

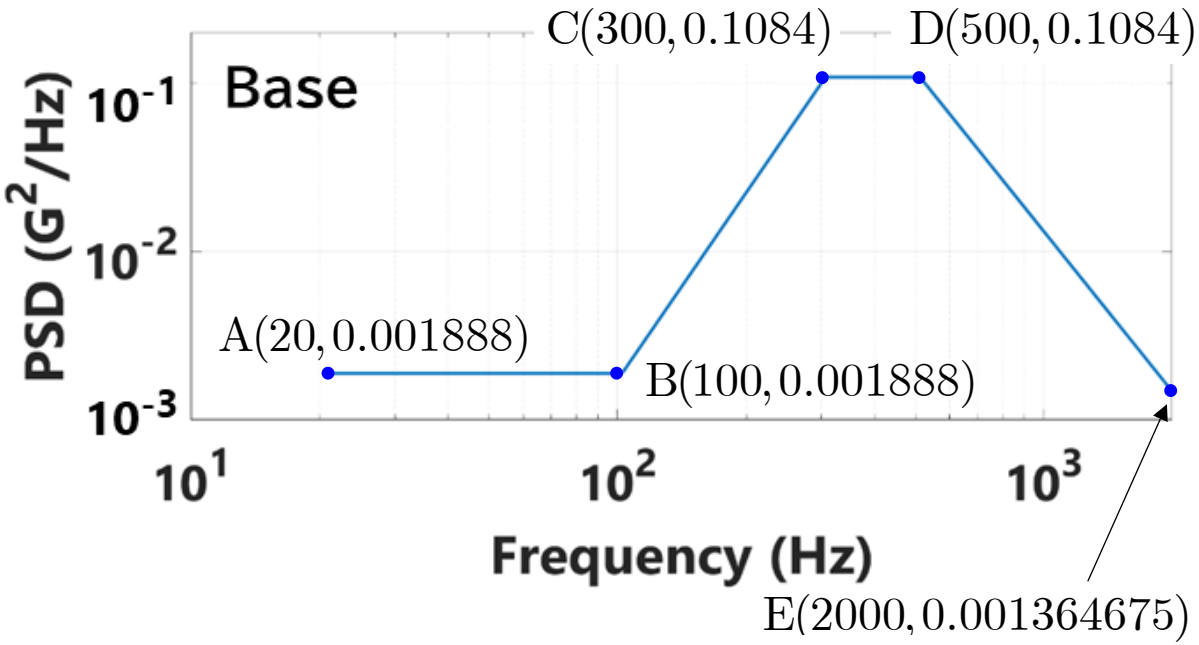
第2章　ランダム加振による過渡応答

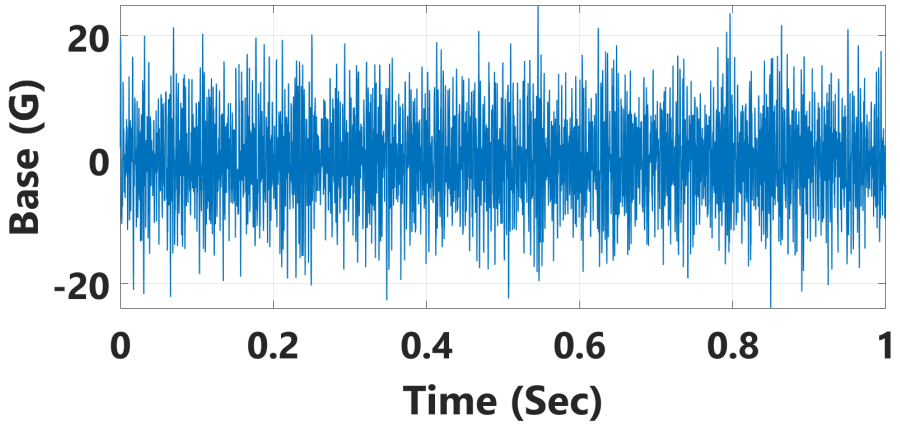
第2章の学修目標

★ 土台のランダム加振による過渡応答の計算法について説明できる。

ランダム加振による過渡応答

★モード法を用いて解くことができる





例えば、ロケットに搭載された宇宙機がランダム振動によりどのように振動するかをみたければ、 モード法を用いて解を求めればよい。

第7回第3章で学んだ通り、土台を変位を$y = \tilde{y}e$とすれば、運動方程式は、次のように書けた。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{C}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{C}\dot{\tilde{y}} + \boldsymbol{K}\tilde{y})\boldsymbol{e} \tag{7.3.8}$$

ここで、固有振動モードϕ_kとPSD$S = S(f)$を用いると、モード数をN_Dとして、xと$\tilde{y}$は次のように書ける。

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N_D} w_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.1}$$

$$\tilde{y} = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \tag{12.2.2}$$

$$X_n = \sqrt{2 S_n \Delta\tilde{f}} \quad , \quad S_n = S(f_n) \tag{12.2.3}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad , \quad f_n = n\Delta\tilde{f} \tag{12.2.4}$$

ランダム加振による過渡応答

★モード法を用いて解くことができる

また、加振方向も、

$$\boldsymbol{e} = \sum_{k=1}^{N} e_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.5}$$

とかけるはずである。ここで、両辺に左から$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}$を掛けると、固有振動モードの直交性より、

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e} = e_i \tag{12.2.6}$$

となる。この式の左辺は、第10回第2章で学んだ通り、$\boldsymbol{e}$方向、すなわち、**加振方向の並進の刺激係数**そのものである。つまり、例えば、加振方向がx軸方向であれば、e_iはx軸方向の並進の刺激係数p_i^xということになる。ここでは、

$$p_i \equiv \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e} \quad , \quad \boldsymbol{e} = \sum_{k=1}^{N} p_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.7}$$

と書くことにする。 そして、式$(12.2.1)$、$(12.2.2)$、$(12.2.7)$を運動方程式$(12.2.1)$に代入すると、

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\boldsymbol{M} \ddot{w}_k \boldsymbol{\phi}_k + \boldsymbol{C} \dot{w}_k \boldsymbol{\phi}_k + \boldsymbol{K} w_k \boldsymbol{\phi}_k \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{M} \begin{bmatrix} -\omega_n \boldsymbol{C} X_n \sin\left(\omega_n t + \delta_n\right) \\ + \boldsymbol{K} X_n \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \end{bmatrix} p_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.8}$$

となる。ここでし、第9回第2章でも扱ったモード比例減衰、すなわち、減衰マトリクス$\boldsymbol{C}$の直交性

$$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\phi}_j = 2\zeta_i \Omega_i \delta_{ij} \tag{12.2.9}$$

を仮定して、式$(12.2.8)$の両辺に左側から$\boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}$を掛けると、

$$\ddot{w}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{w}_i + {\Omega_i}^2 w_i$$
$$= \sum_{n=1}^{M} \begin{bmatrix} -2\zeta_i \Omega_i \sin\left(\omega_n t + \delta_n\right) \\ + {\Omega_i}^2 \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \end{bmatrix} X_n p_i \tag{12.2.10}$$

この式は、第5回第1章で学んだ、1自由度系の強制加振の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o \dot{x} + {\omega_o}^2 x = {\omega_o}^2 y_o \cos\omega t - 2\zeta\omega_o \omega y_o \sin\omega t \tag{5.1.6}$$

ランダム加振による過渡応答

★モード法を用いて解くことができる

において、

$$\begin{cases} \zeta \to \zeta_i \ , \quad \omega_o \to \Omega_i \ , \quad \omega t \to \omega_n t + \delta_n \\ y_o \to X_n p_i \end{cases} \tag{12.2.11}$$

と置き換えただけのものなので、第5回に求めた解

$$\begin{aligned} x \ = & e^{-\zeta\omega_o t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o t\right)\right] \\ & + \frac{1-\eta^2+4\zeta^2\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \cos(\omega t) \\ & + \frac{2\zeta\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\zeta^2\eta^2} y_o \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

を利用して、式(12.2.10)を解くことができる。 実際、無次元加振振動数を

$$\eta_i^n \equiv \frac{\omega_n}{\Omega_i} \tag{12.2.12}$$

とすれば、解は次のように書ける。

$$\begin{aligned} w_i = & e^{-\zeta_i\Omega_i t}\left[\begin{array}{l} C_1 \sin\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\Omega_i t\right) \\ +C_2 \cos\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\Omega_i t\right) \end{array}\right] \\ & + p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-(\eta_i^n)^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\cos(\omega_n t+\delta_n) \\ +\dfrac{2\zeta_i(\eta_i^n)^3}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\sin(\omega_n t+\delta_n) \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{12.2.13}$$

ただし、積分定数C_1およびC_2は、モード変位およびモード速度の初期条件が

$$w_i(0) = w_{0i} \quad , \quad \dot{w}_i(0) = v_{0i} \tag{12.2.14}$$

の場合には、次のように求まる。

ランダム加振による過渡応答

★モード法を用いて解くことができる

$$C_1 = \frac{v_{0i} + \zeta_i \Omega_i w_{0i}}{\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i} + \Omega_i p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1-(\eta_i^n)^2+2{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\eta_i^n \sin\delta_n \\ -\dfrac{1-(\eta_i^n)^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2+2(\eta_i^n)^4}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2} \\ \quad \times \zeta_i \cos\delta_n \end{array} \right\} \tag{12.2.15}$$

$$C_2 = w_{0i} - p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2\zeta_i(\eta_i^n)^3}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\sin\delta_n \\ +\dfrac{1-(\eta_i^n)^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\cos\delta_n \end{array} \right\} \tag{12.2.16}$$

以上の通り、モード法を用いれば、多自由度系のランダム応答を簡単に（EXCELででも）計算することが できる！

これにより、 供試体に生じる平均的な加速度がわかれば、それに統計上の係数を掛けた値を使って 静荷重解析を行い、強度評価を行うことができる。

ただし、そうは言っても、計算はちょっと面倒であり、設計の初期段階では、1自由度系で簡単に評価したくなるものである。そこで、次章では1自由度系での評価法について学ぶ。

第2章のまとめ(1/2)

- ランダム加振を受ける物体の運動方程式は

$$\boldsymbol{M}\ddot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{C}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{C}\dot{\tilde{y}} + \boldsymbol{K}\tilde{y})\boldsymbol{e} \tag{7.3.8}$$

$$\tilde{y} = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(\omega_n t + \delta_n\right) \tag{12.2.2}$$

$$X_n = \sqrt{2S_n \Delta\tilde{f}} \quad , \quad S_n = S(f_n) \tag{12.2.3}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad , \quad f_n = n\Delta\tilde{f} \tag{12.2.4}$$

$$\eta_i^n \equiv \frac{\omega_n}{\Omega_i} \tag{12.2.12}$$

と書くことができ、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} w_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.1}$$

$$p_i \equiv {\boldsymbol{\phi}_i}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{e} \quad , \quad \boldsymbol{e} = \sum_{k=1}^{N} p_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.7}$$

第2章のまとめ(2/2)

(ただし、p_i は e 方向の並進の刺激係数)とおくことで、次ページのように書ける。

$$w_i = e^{-\zeta_i \Omega_i t}\begin{bmatrix} C_1 \sin\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right) \\ +C_2 \cos\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right) \end{bmatrix} + p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1-(\eta_i^n)^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\cos(\omega_n t+\delta_n) \\ +\dfrac{2\zeta_i(\eta_i^n)^3}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\sin(\omega_n t+\delta_n) \end{array} \right\} \tag{12.2.13}$$

ただし、積分定数 C_1 、C_2 は初期条件から、式 $(12.2.15)$、$(12.2.16)$ のように定まる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2024年6月30日(月)2限

第12回　ランダム振動

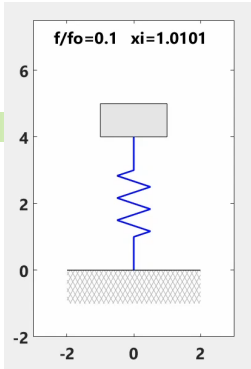
第3章　土台をランダム加振される1自由度バネ・マス・ダンパー系の応答

第3章の学修目標

★ 土台をランダム加振される1自由度バネ・マス・ダンパーの応答の求め方について説明できる。

★ その際の質点の振動の実効値を求めることができる。

土台の強制加振問題



★複数の振動数の振動の和で加振される場合は？

第5回第2章で学んだ通り、土台を

$$y = y_o \cos \omega t \tag{5.2.17}$$

で加振した場合、 バネとダンパで繋がれた質点の応答は, 無次元加振振動数を

$$\eta \equiv \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o} \tag{5.2.18}$$

として、

$$x = \xi y_o \cos(\omega t + \phi) \tag{5.2.19}$$

ただし, 応答倍率ξと位相差ϕは次式で与えられる.

$$\xi = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}} \tag{5.2.20}$$

$$\begin{cases} \sin\phi = -\dfrac{2\zeta\eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{1-(1-4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\zeta^2\eta^2}\sqrt{1+4\zeta^2\eta^2}} \end{cases} \tag{5.2.21}$$

さて、土台が

$$b(t) = \sum_{n=1}^{M} B_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right), \quad f_n = n\Delta\tilde{f} \tag{12.3.1}$$

で加振される場合の質点の応答は、ϕ_n を加振振動数が f_n のときの質点の振動の位相差として、

$$x(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n + \phi_n\right) \tag{12.3.2}$$

ここで, 無次元振動数 η_n を

$$\eta_n \equiv \frac{f_n}{f_o} \tag{12.3.3}$$

と定義すれば、

$$X_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} B_n \tag{12.3.4}$$

そして、S_n^{base} を土台の振動のPSDとして

$$B_n = \sqrt{2S_n^{\text{base}}\Delta\tilde{f}} \quad , \quad S_n^{\text{base}} = S^{base}(f_n) \tag{12.3.5}$$

土台の強制加振問題

★複数の振動数の振動の和で加振される場合は？

加振振動数が複数の場合、そもそも、 応答は単振動にならないが、振動の和としての、“平均的な応答倍率”を知りたいときにはどうすればよいか？ （これがわかれば, 設計初期段階に静解析で設計が可能となる）。

これはまさに、「実効値」。

応答が

$$x(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n + \phi_n\right) \tag{12.3.2}$$

である場合、

$$\int_0^T \left|x(t)\right|^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{M} {X_n}^2 \tag{12.3.6}$$

であるので、実効値は

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|x(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} {X_n}^2} \tag{12.3.7}$$

式(12.3.4)、(12.3.5)を式(13.3.7)に代入すると、

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{B_n}^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2} S_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}} \end{aligned} \tag{12.3.8}$$

なお、以上の議論は$b(t)$や$x(t)$を変位ではなく加速度とした場合にも成り立つ。実際、加速度振幅は

$$\ddot{B}_n = (2\pi f_n)^2 B_n \ , \quad \ddot{X}_n = (2\pi f_n)^2 X_n \tag{12.3.9}$$

であるので、式(12.3.4)と同様の式

$$\ddot{X}_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}\ddot{B}_n \tag{12.3.10}$$

が成り立ち、式(12.3.5)なども同様の式が成り立つので、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}} \tag{12.3.11}$$

土台の強制加振問題

★複数の振動数の振動の和で加振される場合は？

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2}{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

ちなみに、なぜ加速度について考えるかといえば、

1）加速度は計測が容易だから

2）振動する物体が壊れる原因は物体に 作用する加速度にあるから（加速度に質量をかけたものが力であり、それを断面積で割ったものが応力であり、応力が限界応力を越えると物体は壊れるから）。

要するに、構造設計・開発には、加速度の大きさを知ることが必須。

振動試験の場合、式(12.3.11)の $\Delta\tilde{f}$ は加振機の設定で決まるが、本来は、できるだけ小さくするのがよい。また、設計時に、「搭載物にどれくらいの加速度が作用するかを見積もりたい」という場合には，$\Delta\tilde{f}$ を小さな値にしておいて（したがって、M は大きな値になる）、$\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}$を計算し、$\ddot{x}_{\mathrm{rms}}$ を式(12.3.11)で計算することになる。

なお、式(12.3.11) からわかる通り、質点の応答の実効値は、バネ・マス系の固有振動数の値 f_o によって異なる。また、減衰の値によっても異なる。

第3章のまとめ(1/2)

- 1自由度バネ・マス・ダンパー系の土台が次式のように加振される場合、

$$b(t) = \sum_{n=1}^{M} B_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \tag{12.3.1}$$

加振振動数 f_n での質点の振動の位相遅れをϕ_n として、質点の応答は、

$$x(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n - \phi_n\right) \tag{12.3.2}$$

ただし、粘性減衰比をζ_n 、無次元振動数 η_n を

$$\eta_n \equiv \frac{f_n}{f_o} \tag{12.3.3}$$

として、

$$X_n = \frac{\sqrt{1 + 4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} B_n \tag{12.3.4}$$

第3章のまとめ(2/2)

- 1自由度バネ・マス・ダンパー系の土台をランダム加振する場合、周波数幅を$\Delta\tilde{f}$，振動数$f = n\Delta\tilde{f}$での粘性減衰比および土台の加速度のPSDをそれぞれζ_nおよび$\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}$として，質点の加速度応答の実効値は、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}} \qquad (12.3.11)$$

- 質点の応答の実効値は、バネ・マス系の固有振動数によって異なる。また、減衰の値によっても異なる。

付録　　音響負荷による宇宙機の応答の予測

音響負荷による宇宙機の応答

★いくつかの解析手法があるが・・・

例えば、イプシロンロケットでは、 右上図のような音響振動条件（周波数と音圧レベルとの関係）が、 小型衛星（170kg以上）に対して規定されている（超小型衛星の場合は土台のランダム振動が規定されている）。

設計段階では、 この音響振動条件で強度計算を行う必要があり、製造段階では、音響試験により強度を確認する必要がある。

強度計算には、右下の表に示す通り、いくつかの手法があるが、なかなか簡単ではない。

また、音響試験の設備はどこにでもあるわけではない。

音響試験をランダム振動試験で代替できないか？

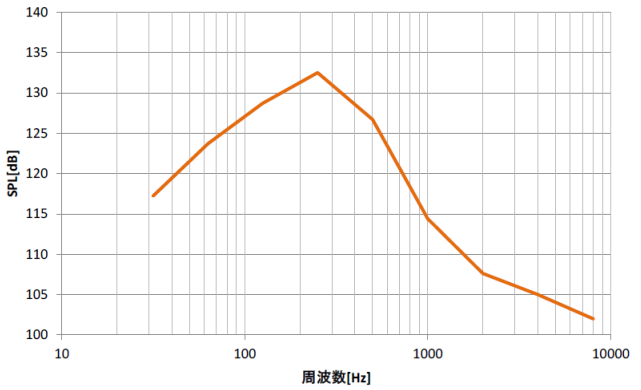


図 4.5.1-3 音響環境

表 4.5.1-6 音響環境

周波数[Hz]	SPL [dB]
31.5	117.2
63.0	123.7
125	128.7
250	132.5
500	126.7
1000	114.4
2000	107.6
4000	105.0
8000	102.0
O.A. 135.0dB 30[seconds]	

※ AT レベル、0dB = 2 x 10^{-5} Pa

表 3-1 音響負荷時の応答の予測法の特徴

予測法	3.1 項 Appendix F 外挿手法	3.2 項、3.3 項 Appendix G, H 統計的エネルギ解析(SEA)	3.4 項 Appendix B 境界要素法を用いた構造音響連成解析	3.5 項 Appendix J ジョイントアクセプタンスを用いた応答解析	3.6 項 Appendix K FEM-SEA 統合法
新規構造への適用性(※1)	×	○	○	○	○
適用周波数	制約なし 類似構造に対して有効	高周波数域 モード密度が高い（>3）高周波数領域において有効	低周波数域 低周波数で有効	低周波数域 低周波数で有効	中周波数域 単独 FEM 又は SEA 適用外の中周波数で有効
解析ベース	過去データ	SEA	FEM、BEM	FEM	FEM
音場モデル	不要	SEA	BEM	不要	SEA
応答結果	-	周波数平均及び空間平均された応答	物理座標点毎の狭帯域応答	物理座標点毎の狭帯域応答	物理座標点毎の狭帯域応答
備考	予測の基本となる過去データが予測精度を決定する	低周波域では過大予測となる傾向がある 物理座標毎の応答や個別モードの予測が不可能	多くの連立方程式を解くため計算時間を要するが、解析精度は高い	音場のモデル化を必要としないため、連立方程式を解く必要が無く、構造数学モデルのモード形状と入力音圧のみを用いて応答解析が可能	単独での FEM 又は SEA 適用範囲外の中周波数領域において精度の高い解析手法

○：適用可、×：適用不可

※1：新規構造とは、過去の衛星の構造と比較して根本的に異なる構造を有し、開発実績のない新規構造を意味する。

音響負荷による宇宙機の応答

★振動試験と音響試験の選択

基本的には、どちらがより実際のフェアリング内環境をよく模擬できているかで決めることになるが、ざっくり言うと、 太陽電池パドルなど、面密度が小さいもの(軽くて面積の大きいもの)の耐性を評価する場合は 音響試験を行い、 衛星本体など、立体的で面密度が小さいものは振動試験で評価することが多い。

具体的な判断基準としては、 音響試験と土台のランダム振動試験の場合とで、供試体に作用する振動のPSDを計算し、より大きい方(＝より試験条件が厳しい方)の試験を選択する、ということになる。

そこで、ここでは音響負荷による振動について考え、そこから 振動試験ではなく音響試験を選択する条件を導く。

まず、供試体のn次の固有振動数をΩ_n、 減衰比をζ_n、音響のp次の固有振動数をW_p、減衰比をη_p、供試体が音響を受ける面積をSとする。

いま、供試体を固有振動数が Ω_n である1自由度系であると仮定し、その系がk次の音響を受けるとする。このとき、変位xの運動方程式は次のように書ける。

$$\ddot{x} + 2\zeta_n \Omega_n \dot{x} + {\Omega_n}^2 x = p_k C_{kn} \frac{S}{m} \tag{12.A.1}$$

ただし、C_{kn}は、n次の固有振動モードとk 次の音響モードとの連成を表す係数であって、C_{kn}が大きいほど、k次の音響加振によりn次の振動の応答が大きくなる。C_{nk}は次式で定義される。

$$C_{kn} \equiv \frac{1}{S} \int \varphi_k \tilde{\phi}_n dS \tag{12.A.2}$$

ただし、$\tilde{\phi}_n$はn次の固有振動モード変位の、音響を受ける面上の点における変位であり、 φ_kはk次の音響モードの、音響を受ける面上の点での強さを表しており、それぞれ次式で正規化されている。この式からわかる通り、$\tilde{\phi}_n$はこれまで学んできた固有振動モードϕ_nとは異なる正規化がなされている。また、Vは音響空間の体積を表している。

音響負荷による宇宙機の応答

★振動試験と音響試験の選択

$$\int \tilde{\phi}_n{}^2 dS = \frac{S}{4}, \quad \int \varphi_p{}^2 dV = \frac{V}{8} \tag{12.A.3}$$

一方、土台を加振する場合は、土台の変位をy、 系の相対変位をw(つまり、$w = x - y$)とすれば、運動方程式は

$$\ddot{w} + 2\zeta_n \Omega_n \dot{w} + \Omega_n{}^2 w = -\ddot{y} \tag{12.A.4}$$

共振時には$w \approx x$であることを考えると、式(12.A.1)

$$\ddot{x} + 2\zeta_n \Omega_n \dot{x} + \Omega_n{}^2 x = p_k C_{kn} \frac{S}{m} \tag{12.A.1}$$

と(12.A.4)の右辺、 すなわち、それぞれの試験の際に供試体に作用する荷重を比較して、式(12.A.1) の方が大きければ、当該共振時の評価には音響試験を選択する、ということになる。

といっても、 これらの式の右辺の荷重値は時々刻々変化するわけなので、 何らかの平均値のようなもので比較するしかない。そこで、第13回の授業でも詳しく学ぶこととなるMilesの式で これらの式の右辺の荷重の実効値を計算し、大小を比較するのである。

実際にMilesの式を用いると、音響加振の場合には、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_n \times S_a(f_n) \times \left(C_{kn} \frac{S}{m} \right)^2} \tag{12.A.5}$$

土台のランダム振動の場合には、

$$\ddot{w}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_n \times S_v(f_n)} \tag{12.A.6}$$

ただし、$S_v = S_v(f)$は、土台のランダム振動における、振動数がfのときの、PSDである。ここで、S_aもS_vも、ロケット側から提供される表やグラフから計算できる。実際、S_aについては、第11回の付録の式(11.A.1)

$$S_a(f) = \frac{{p_o}^2 \times 10^{S_{PL}/10}}{B} \tag{11.A.1}$$

で求められる。ただし、S_{PL}は音圧レベルであり、

$$p_o = 2.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa} \tag{11.A.2}$$

そして、Bは音圧レベルの帯域幅であった。 また、S_vについては今回の第1章で学んだ方法で計算すればよい。

音響負荷による宇宙機の応答

★振動試験と音響試験の選択

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_n \times S_a(f_n) \times \left(C_{kn} \frac{S}{m} \right)^2} \tag{12.A.5}$$

$$\ddot{w}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_n \times S_v(f_n)} \tag{12.A.6}$$

このとき、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} > \ddot{w}_{\mathrm{rms}} \tag{12.A.7}$$

であれば、音響試験を選択することとなる。つまり、

$$C_{kn} \sqrt{\frac{S_a(f_n)}{S_v(f_n)}} > \frac{m}{S} \tag{12.A.8}$$

そもそも、ここで検討しているのは、本来は音響試験をすべきところを 土台のランダム振動試験で置き換えることができるか、ということであるので、音響試験における荷重を小さく見積もることは避けるべきである。別の言い方をすれば、「音響試験における荷重を大きく見積もったとしても、音響試験の方が荷重が小さくなるのであれば、ランダム振動試験を選択する。そうでなければ、(手間はかかるが、) 音響試験を選択する」ということになる。したがって、より厳しめの判断をするのであれば、

$$C_{kn} = 1 \tag{12.A.9}$$

として、音響振動による荷重を大きく見積もればよい。この場合には、判定条件式は次のようになる。

$$\sqrt{\frac{S_a(f_n)}{S_v(f_n)}} > \frac{m}{S} \tag{12.A.10}$$

なお、この式は、あくまでも、宇宙機全体の試験を音響試験にすべきか 土台のランダム振動試験で置き換えてもよいかを判断するときの条件式であって、 個別の搭載機器の試験の判断をするには、 次ページの表にあるような予測法を用いて判断することになる。

音響負荷による宇宙機の応答

★振動試験と音響試験の選択

表 3-1　音響負荷時の応答の予測法の特徴

予測法	3.1 項 Appendix F 外挿手法	3.2 項、3.3 項 Appendix G, H 統計的エネルギ解析(SEA)	3.4 項 Appendix B 境界要素法を用いた構造音響連成解析	3.5 項 Appendix J ジョイントアクセプタンスを用いた応答解析	3.6 項 Appendix K FEM-SEA 統合法
新規構造への適用性(※1)	×	○	○	○	○
適用周波数	制約なし 類似構造に対して有効	高周波数域 モード密度が高い（>3）高周波数領域において有効	低周波数域 低周波数で有効	低周波数域 低周波数で有効	中周波数域 単独 FEM 又は SEA 適用外の中周波数で有効
解析ベース	過去データ	SEA	FEM、BEM	FEM	FEM
音場モデル	不要	SEA	BEM	不要	SEA
応答結果	-	周波数平均及び空間平均された応答	物理座標点毎の狭帯域応答	物理座標点毎の狭帯域応答	物理座標点毎の狭帯域応答
備考	予測の基本となる過去データが予測精度を決定する	低周波域では過大予測となる傾向がある 物理座標毎の応答や個別モードの予測が不可能	多くの連立方程式を解くため計算時間を要するが、解析精度は高い	音場のモデル化を必要としないため、連立方程式を解く必要が無く、構造数学モデルのモード形状と入力音圧のみを用いて応答解析が可能	単独での FEM 又は SEA 適用範囲外の中周波数領域において精度の高い解析手法

○：適用可、×：適用不可

※1：新規構造とは、過去の衛星の構造と比較して根本的に異なる構造を有し、開発実績のない新規構造を意味する。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

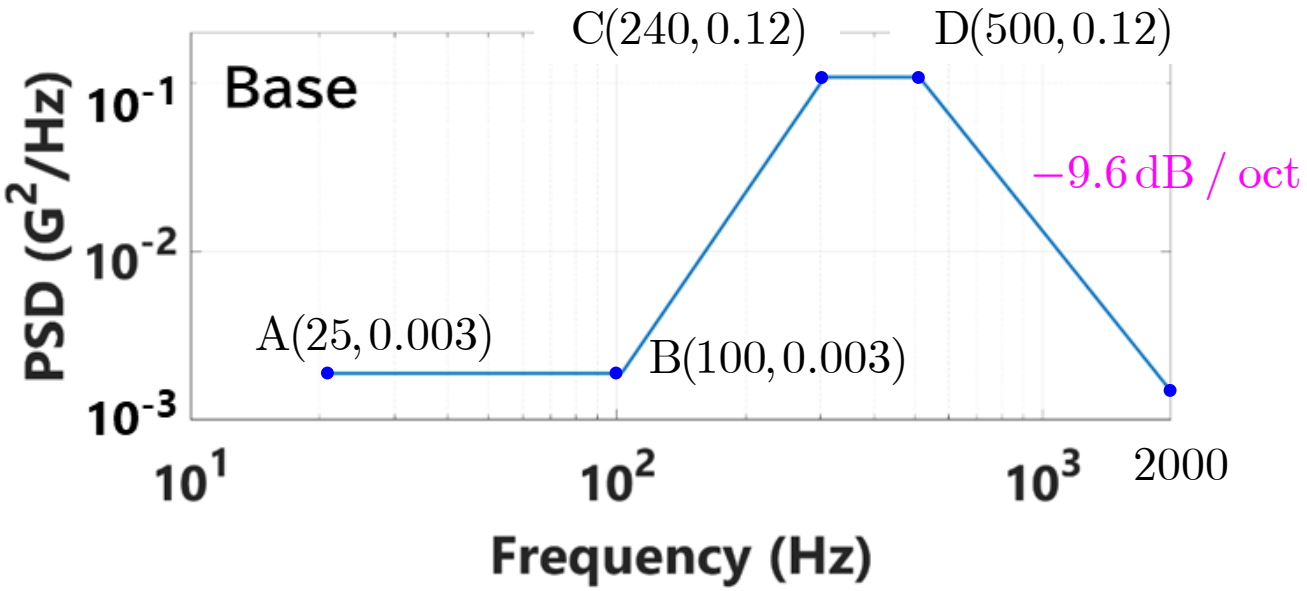
第12回　ランダム振動

2024年6月30日(月)2限

課題

2025年7月6日(日)18時00分締切

[1] 固有振動数が$150\mathrm{Hz}$、粘性減衰比が加振振動数によらず0.025の1自由度バネ・マス・ダンパー系の土台を、 下図のようなPSDプロファイルでランダム加振するとき、加振振動数が$200\mathrm{Hz}$の振動の振幅を求めなさい。また、このときの土台の加振成分による質点の振幅を求めなさい。ただし、ランダム加振時の振動数幅を$\Delta\tilde{f} = 0.1\mathrm{Hz}$とする。(5点)



自由課題

[2] 問題[1]において、質点の応答の実効値を計算しなさい。(3点)

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第12回　ランダム振動

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

本講義の構成

1自由度線形運動の復習

- 第1回 この講義の概要
- 第2回 1自由度線形振動
- 第3回 任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移
- 第4回 宇宙機の設計・開発における振動解析

強制振動と共振

- 第5回 1自由度線形振動系の強制振動と共振
- 第6回 減衰のない2自由度線形振動系の自由振動
- 第7回 2自由度線形振動系の強制振動
- 第8回 振動絶縁と動吸振器

多自由度系の振動

- 第9回 モード法の基礎
- 第10回 刺激係数と有効質量
- 第11回 パワースペクトル密度
- 第12回 ランダム振動

試験による評価

- 第13回 ランダム加振される物体に作用する荷重
- 第14回 振動に対する耐性の評価法
- 第15回 衝撃に対する耐性の評価法

第13回の学修目標

★ RRS解析について説明できる。

★ Milesの式について説明できる。

★ RRSおよびMilesの式の利用例を挙げることができる。

第13回の全体構成

第1章　ランダム加振される物体の固有振動数とパワースペクトル密度

第2章　RRS（Random Response Spectrum）とその物理的意味

第3章　Milesの式とその物理的意味

付録A　JAXAの技術標準・設計標準

付録B　多自由度系のRRSおよびMilesの式

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月7日(月)2限

第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

第1章　ランダム加振される物体の固有振動数とパワースペクトル密度

第1章の学修目標

★ 与えられた加速度PSDで土台加振される　1自由度バネ・マス・ダンパー系の応答加速度とその実効値について、説明できる。

与えられた加速度PSDで土台加振される1自由度系の応答加速度

★応答加速度およびその実効値

第12回の講義で学んだ通り、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

ただし、ζ_n は加振振動数が f_n のときの減衰比であり、

$$\eta_n \equiv \frac{f_n}{f_o} \quad (13.1.1)$$

である。 ここで、対象物は1自由度バネ・マス・ダンパー系であり、その固有振動数は

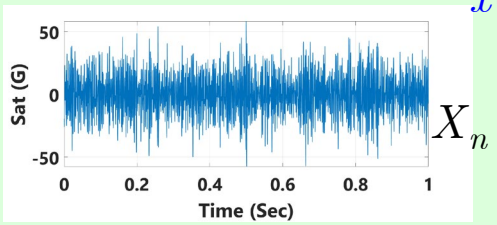
$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13.1.2)$$

また、土台はランダム加振されており、加速度は次式で与えられるものとする。

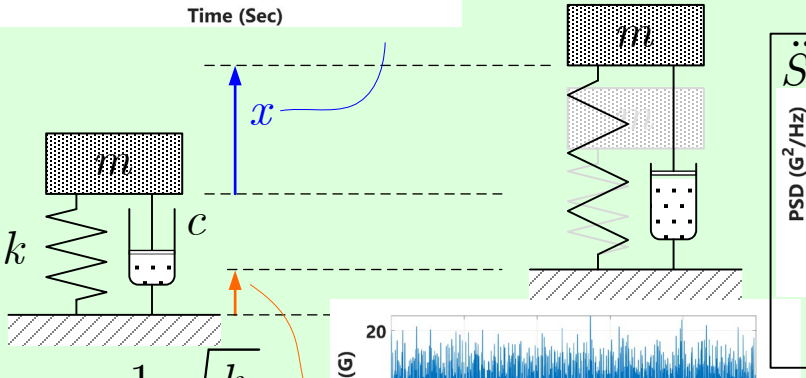
$$\begin{cases} \ddot{y} = \sum_{n=1}^{M} \sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}}\cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \\ f_n \equiv n\Delta\tilde{f} \quad , \quad \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \equiv \ddot{S}^{\mathrm{base}}(f_n) \end{cases} \quad (13.1.3)$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta\tilde{f}}$$

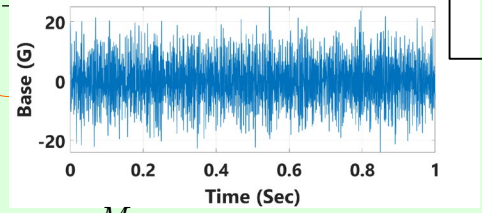
$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n - \phi_n\right)$$

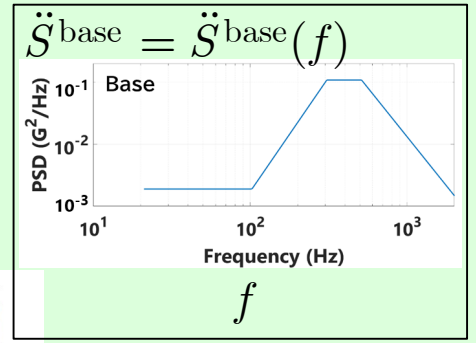


$$X_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}\sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}}$$



$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$





0～2πの間でランダムに与える

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \sum_{n=1}^{M} \sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}}\cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \\ f_n = n\Delta\tilde{f} \quad , \quad \ddot{S}_n = \ddot{S}^{\mathrm{base}}(f_n) \end{cases}$$

与えられた加速度PSDで土台加振される1自由度系の応答加速度

★応答加速度およびその実効値

ここで、$\Delta\tilde{f}$ は周波数分解能であり、本来は限りなく0に近い値であるべきもの。ただし、試験の場合は、試験装置の分解能に限界があるので、その値を用いる。
　このとき、質点の加速度応答は次式のようになる。

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n + \phi_n\right) \tag{13.1.4}$$

$$X_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}\sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}} \tag{13.1.5}$$

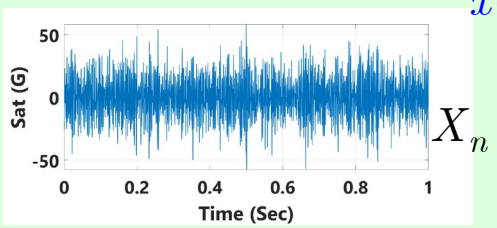
$$\begin{cases} \sin\phi_n = -\dfrac{2\zeta_n{\eta_n}^3}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} \\ \cos\phi_n = \dfrac{1-(1-4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} \end{cases} \tag{13.1.6}$$

そして、

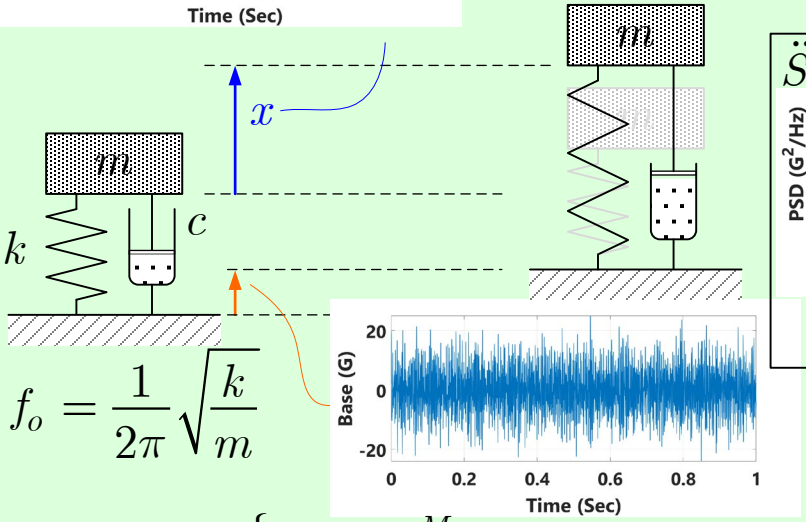
$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|\ddot{x}(t)\right|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} {X_n}^2} \tag{13.1.7}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}}$$

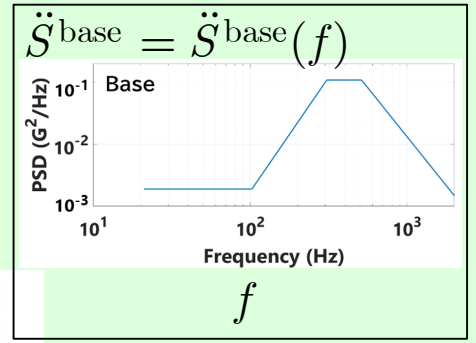
$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n - \phi_n\right)$$



$$X_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}\sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}}$$



$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



0〜2πの間でランダムに与える

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \sum_{n=1}^{M}\sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}}\cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \\ f_n = n\Delta\tilde{f} \quad , \quad \ddot{S}_n = \ddot{S}^{\mathrm{base}}(f_n) \end{cases}$$

第1章のまとめ(1/2)

- 1自由度バネ・マス・ダンパー系の土台をランダム加振する場合、加振振動動数 f と加速度PSD $\ddot{S}^{\mathrm{base}}$ との関係を $\ddot{S}^{\mathrm{base}} = \ddot{S}^{\mathrm{base}}(f)$ とするとき、

$$f_n \equiv n\Delta\tilde{f} \quad , \quad \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \equiv \ddot{S}^{\mathrm{base}}(f_n) \tag{13.1.3}$$

として，質点の応答加速度は次式で与えられる．

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{M} X_n \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n + \phi_n\right) \tag{13.1.4}$$

$$X_n = \frac{\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}}\sqrt{2\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\Delta\tilde{f}} \tag{13.1.5}$$

$$\begin{cases} \sin\phi_n = -\dfrac{2\zeta_n{\eta_n}^3}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} \\ \cos\phi_n = \dfrac{1-(1-4\zeta^2)\eta^2}{\sqrt{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\sqrt{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}} \end{cases} \tag{13.1.6}$$

第1章のまとめ(2/2)

- また、応答加速度の実効値は、第12回の講義で学んだ通り、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2}{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta \tilde{f}} \qquad (12.3.11)$$

で与えられる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月7日(月)2限

第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

第2章　RRS(Random Response Spectrum)とその物理的意味

第2章の学修目標

★ Random Response Spectrum（RRS）について説明できる。

★ RRSの使い道について説明できる。

Random Response Spectrum（RRS）

★対象物の固有振動数によって応答加速度の実効値がどう変わるかがわかる

土台をランダム加振される 1自由度系の加速度の実効値は次のように書けた。

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2}{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

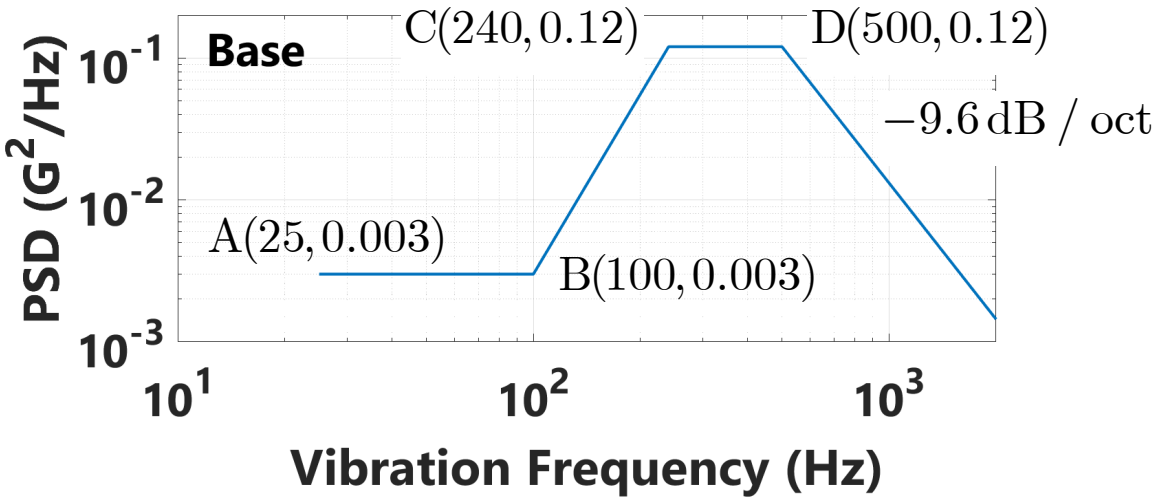
$$\eta_n \equiv \frac{f_n}{f_o} \quad (13.1.1)$$

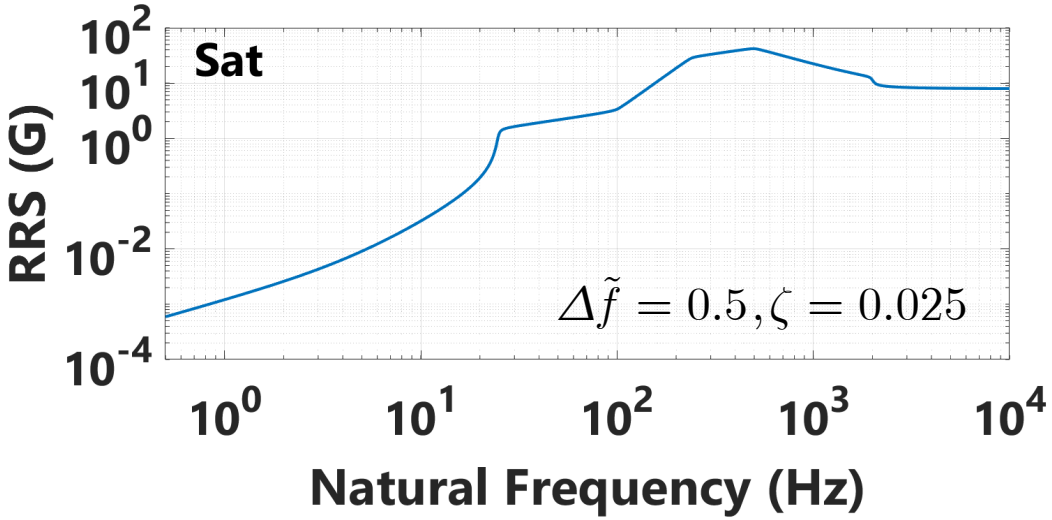
つまり、実効値は物体の固有振動数 f_o の関数である。

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \ddot{x}_{\mathrm{rms}}(f_o) \quad (13.2.1)$$

第11回第2章で学んだ通り、振動数で変わるものは「〇〇スペクトル」と呼ばれる。そこで、式(13.2.1)はランダム応答スペクトル（Random Response Spectrum, RRS）と呼ばれる。

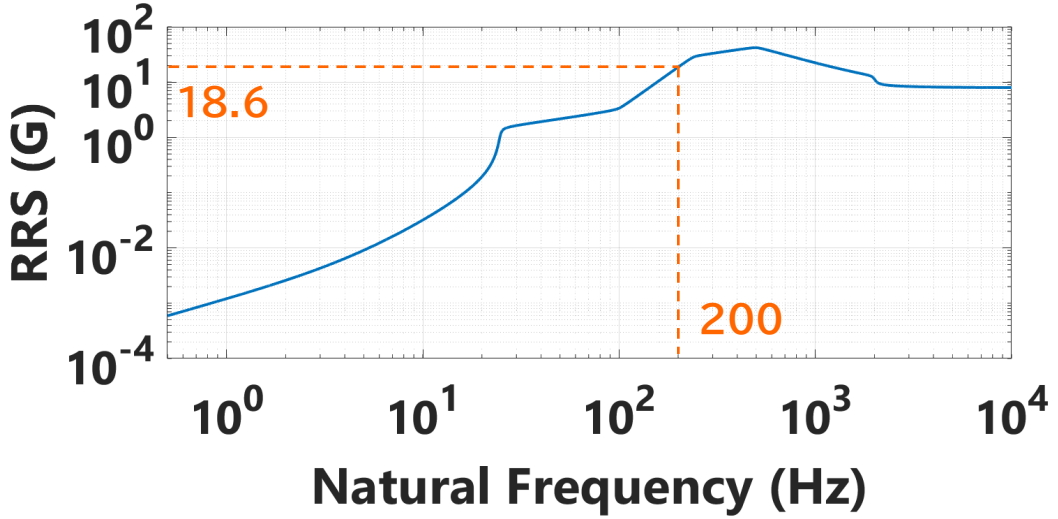
横軸に固有振動数 f_o をとり、縦軸に実効値 $\ddot{x}_{\mathrm{rms}}$ をとったグラフを描いておくと、物体の固有振動数がわかっていれば、 物体に作用する加速度を（実験をしなくても）予測することができるので、強度設計が可能となる。





Random Response Spectrum（RRS）

★対象物の固有振動数によって応答加速度の実効値がどう変わるかがわかる



例えば、固有振動数が200Hzの物体であれば、加速度の実効値は、18.6Gと計算できる。

このグラフを予めつくっておけば、設計変更した際に、

① 固有振動解析をして固有値を求める.

② このグラフから加速度の実効値を求める

③ その加速度(にマージンをかけたもの)を物体に負荷した静荷重解析をして、物体各部の応力を求める

④ 求めた応力が許容応力を越えていないか、各部について確認する

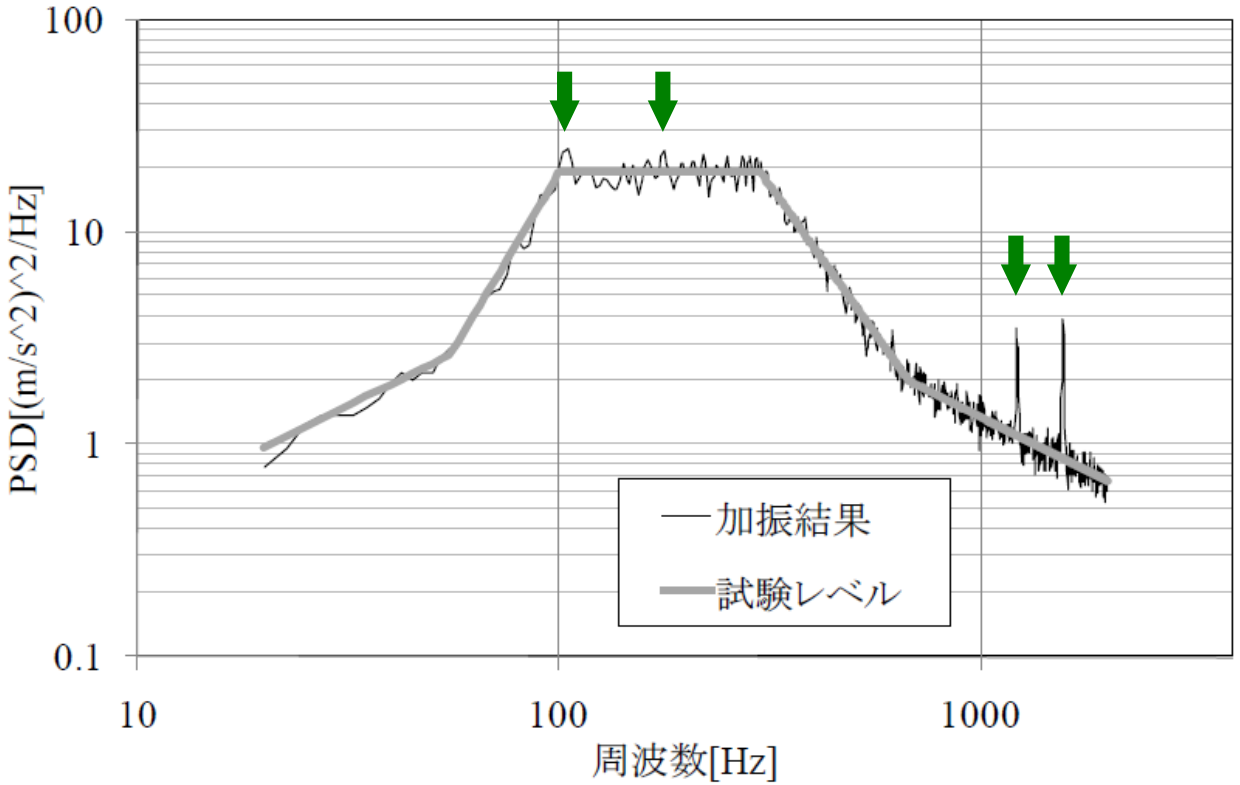
という手順で強度の確認ができる。

固有振動数は複数あるので、それぞれの固有振動数でRRSを計算し、それらの最大値で強度解析をするのが安全。ただし、その際には減衰を適切に与える必要がある。しかし、設計段階ではQ値を適切に設定するのは難しく、また、実際には高次のモードは減衰が大きい場合が多いので、比較的低次のモードだけについて、Q値を例えば10とか20など大きな値にしてRRSを求め、それらの最大値で強度解析をすることになるだろう。

Random Response Spectrum（RRS）

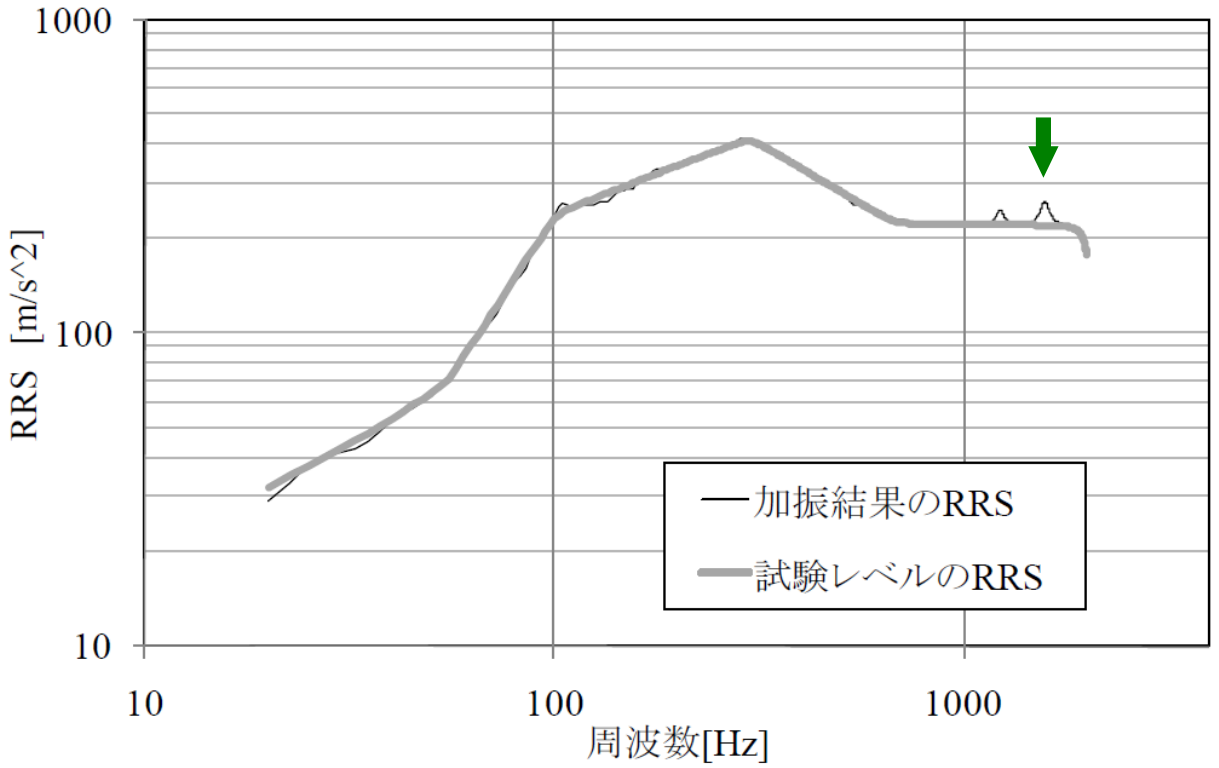
★“やり過ぎ”かどうかを確認できるのがありがたい

例えば、設定したランダム振動の試験レベルよりも、実際の試験の際のPSDの方が大きい箇所が あった場合、「試験が厳しすぎて、搭載物に悪い影響を与えていないか？」を確認する必要がある。



参考文献：JERG-2-130-HB002B「振動試験ハンドブック」

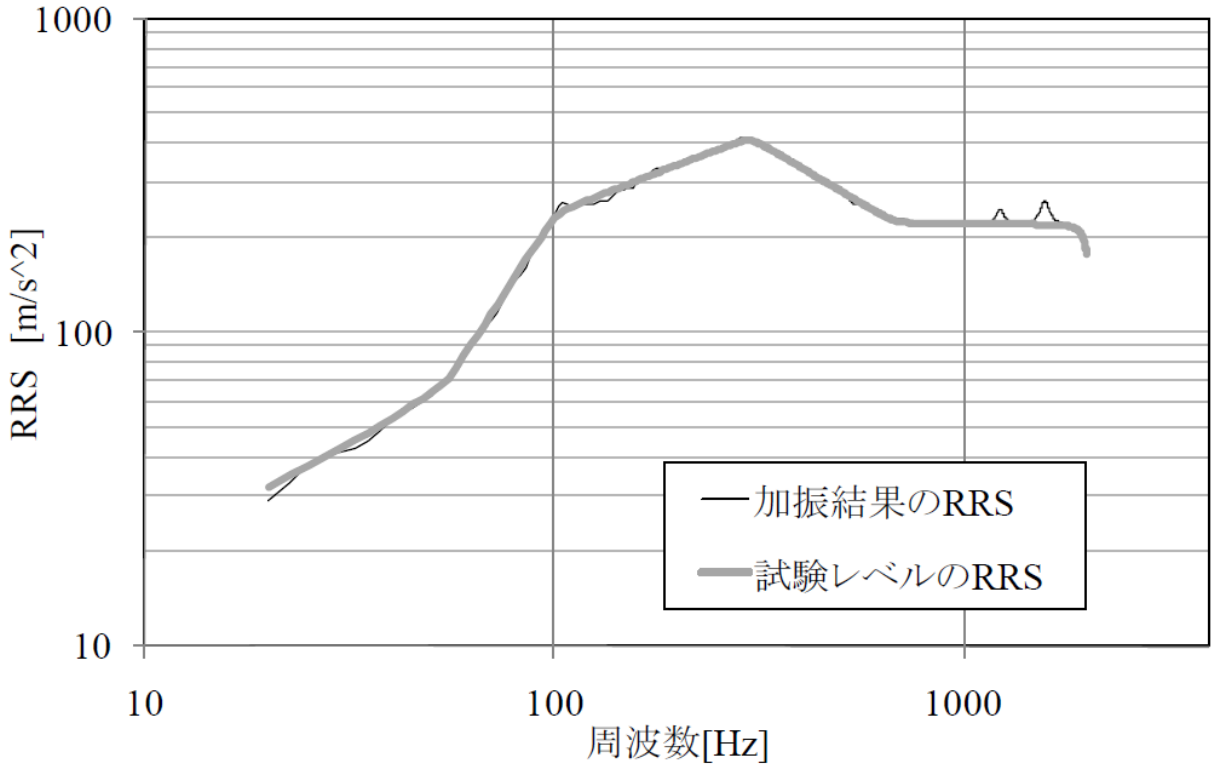
設定したPSDレベルの場合のRRSと、実際の試験結果のRRSを比較し、逸脱している箇所が物体の固有振動数とは異なる振動数であったり、 近い振動数であったとしても、逸脱している値がそれほど大きくなければ（±10%など）、「問題なし」と判断するだろう。



Random Response Spectrum（RRS）

★“やり過ぎ”かどうかを確認できるのがありがたい

物体の固有振動数は飛び飛びの値で、かつ、決まった値であるから、その値のときのRRSだけ計算し、そのRRS（加速度）で強度計算をすればよいのではないか？



参考文献：JERG-2-130-HB002B「振動試験ハンドブック」

その通り。なので、固有振動数がわかっていれば、そのようにするだろうし、設計段階では、「固有振動数をこれくらいにすればRRSが小さくなるので、 これこれこういうように設計変更をしよう」というような議論がなされることもある。

第2章のまとめ

- 土台にランダム加速度を負荷した際の物体の応答加速度は物体の固有振動数の関数であり、ランダム応答スペクトル（Random Response Spectrum, RRS）と呼ばれる。
- RRSは物体の減衰の関数でもあり、設計段階において、適切に減衰を仮定することで、解析で得られた物体の固有振動数からRRSを求め、それを用いて静荷重解析をすることで、土台のランダム加振に対する物体の強度を確認することができる。
- また、試験段階においては、 設定した土台のランダム加速度のPSDよりも試験での土台のPSDの方が大きい箇所（振動数）があった場合、 試験が過大であったかどうか否かは, PSDの設定値から得られたRRSと、試験データから得られたRRSとを比較することで判断できる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月7日(月)2限

第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

第3章　Milesの式とその物理的意味

第3章の学修目標

★ Milesの式について説明できる。

★ Milesの式が妥当であるための前提条件を説明できる。

Milesの式

★実効値をより簡単に見積もる方法

土台をランダム加振される 1自由度系の加速度の実効値は次のように書けた。

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2}{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

$$\eta_n \equiv \frac{f_n}{f_o} \quad (13.1.1)$$

ここで、周波数分解能 $\Delta\tilde{f}$ を限りなく小さくしていくと

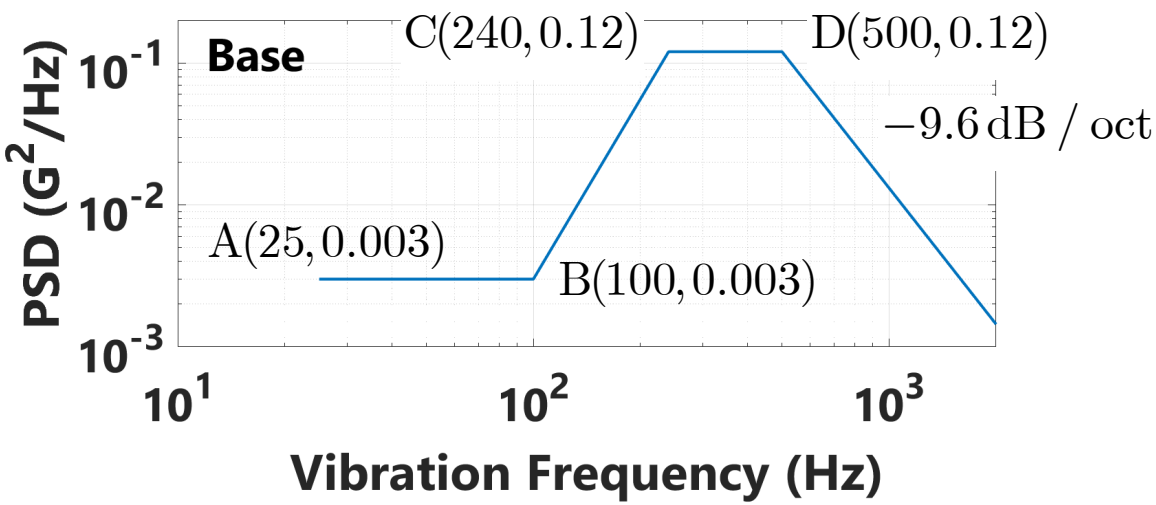
$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{1 + 4\zeta\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 5\zeta^2\eta^2} \ddot{S}^{base} df} \quad (13.3.1)$$

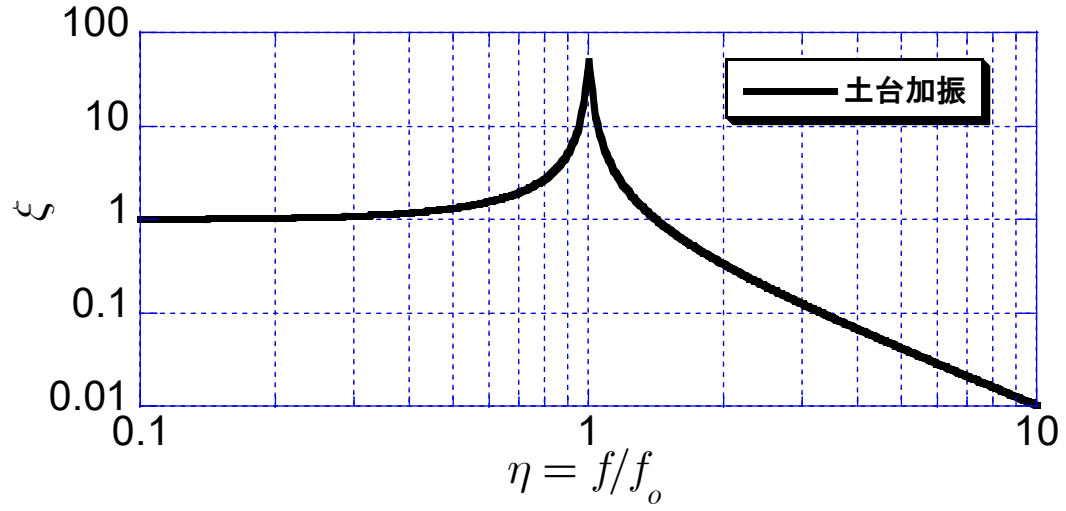
$$\zeta = \zeta(f) \quad , \quad \ddot{S}^{base} = \ddot{S}^{base}(f) \quad (13.3.2)$$

しかし、減衰比 ζ が小さければ、応答倍率

$$\xi = \frac{1 + 4\zeta\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 5\zeta^2\eta^2} \quad (13.3.3)$$

は共振振動数付近以外は大きくない。つまり、固有振動数付近以外は大きくない。したがって、





Milesの式

★実効値をより簡単に見積もる方法

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} \approx \sqrt{\int_0^\infty \frac{1+4\zeta_o\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4{\zeta_o}^2\eta^2}\ddot{S}_o^{base}df} \tag{13.3.4}$$

$$\ddot{S}_o^{base} \equiv \ddot{S}^{base}(f_o) \quad , \quad \zeta_o \equiv \zeta(f_o) \tag{13.3.5}$$

と近似できると考えられる。そして、一般に、

$$\int_0^\infty \frac{1+4\zeta_o\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4{\zeta_o}^2\eta^2}df$$

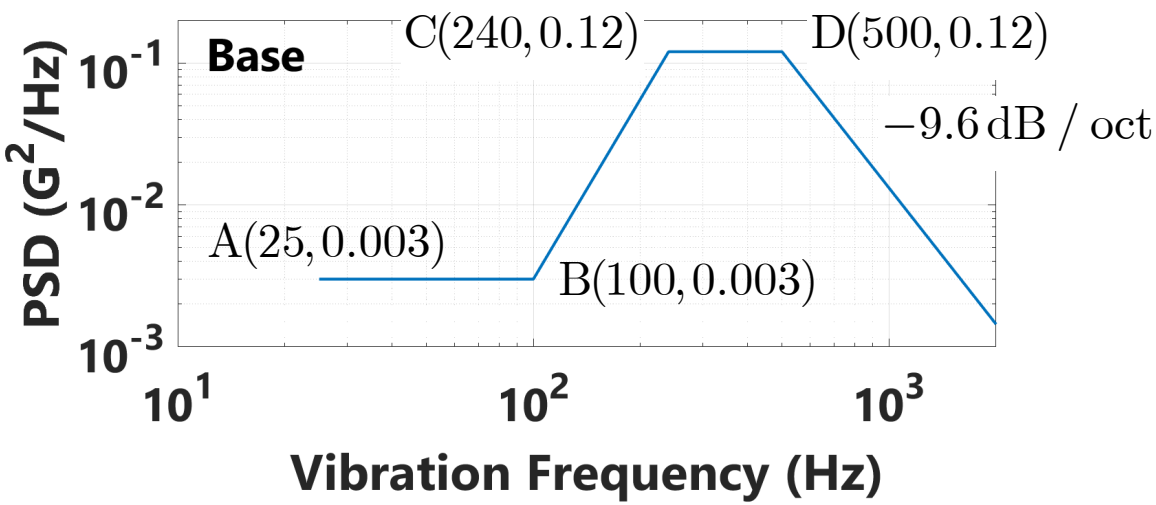
$$= \int_0^\infty \frac{1+4\zeta_o\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4{\zeta_o}^2\eta^2}f_o d\eta = \left(\zeta_o + \frac{1}{4\zeta_o}\right)\pi f_o$$

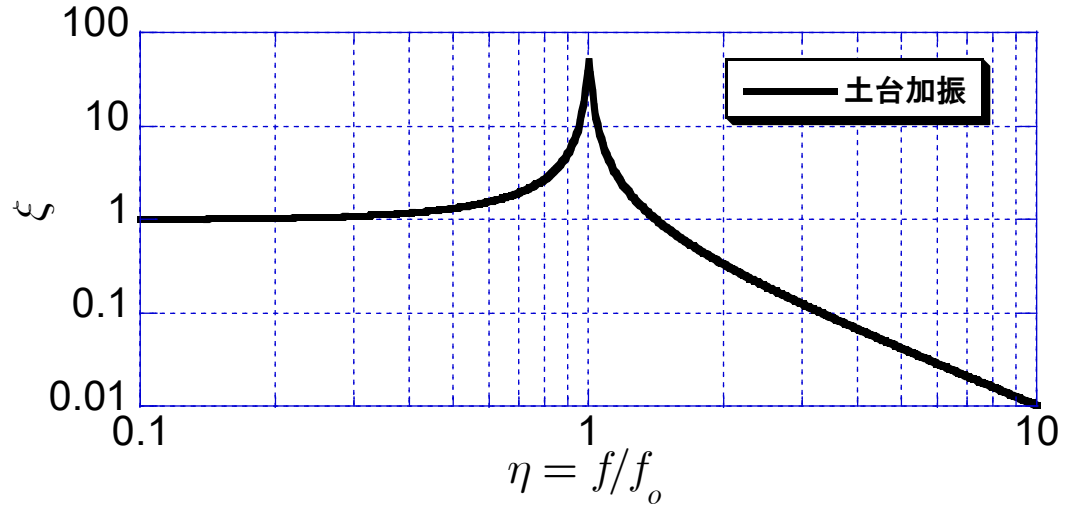
$$\approx \frac{\pi}{4\zeta_o}f_o \approx \frac{\pi}{2}Qf_o \tag{13.3.6}$$

となるので、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}Qf_o\ddot{S}_o^{base}} \tag{13.3.7}$$

この式はMilesの式と呼ばれる。



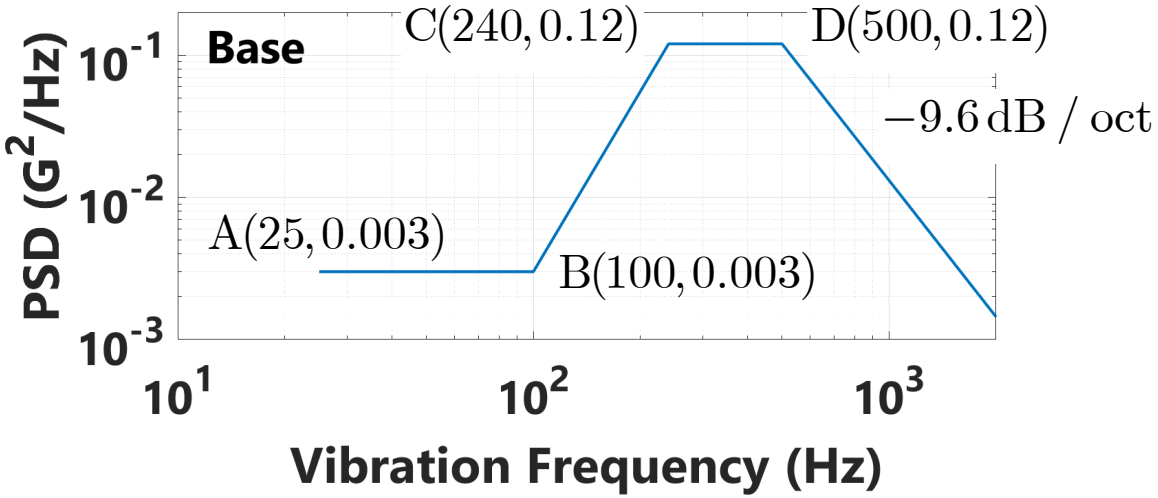


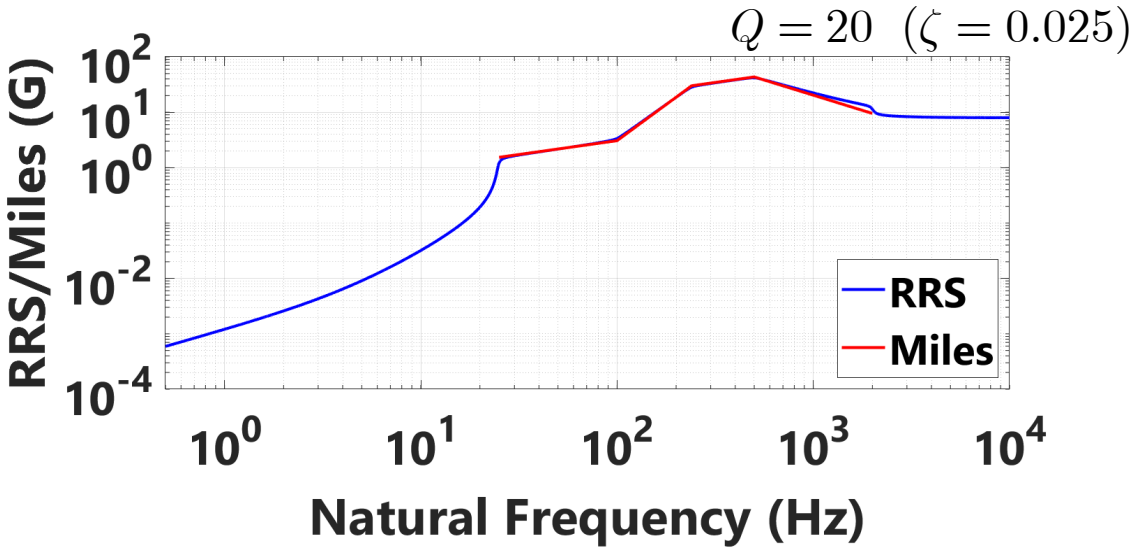
Milesの式

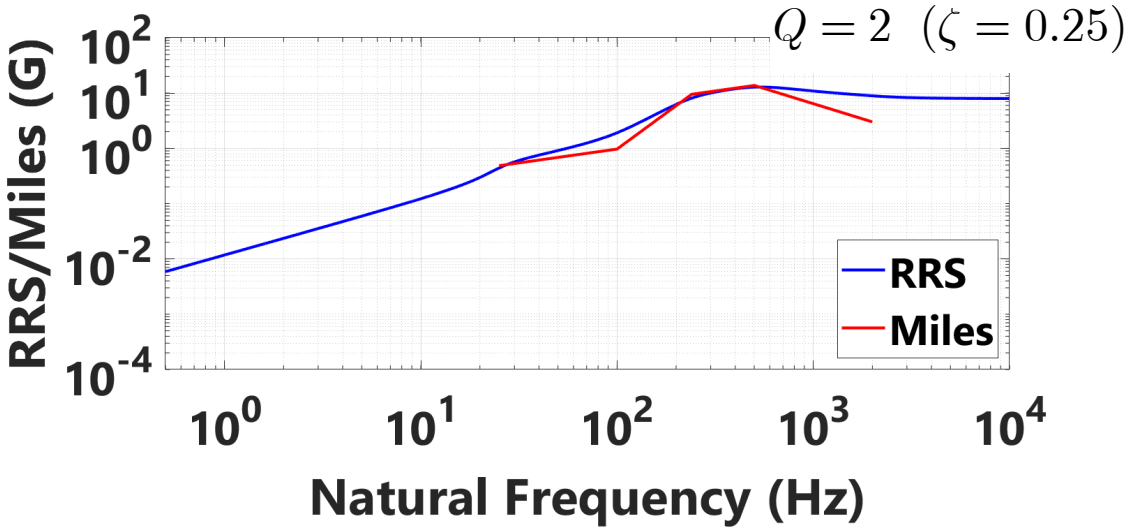
★実効値をより簡単に見積もる方法

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}Qf_o\ddot{S}_o^{base}} \quad (13.3.7)$$





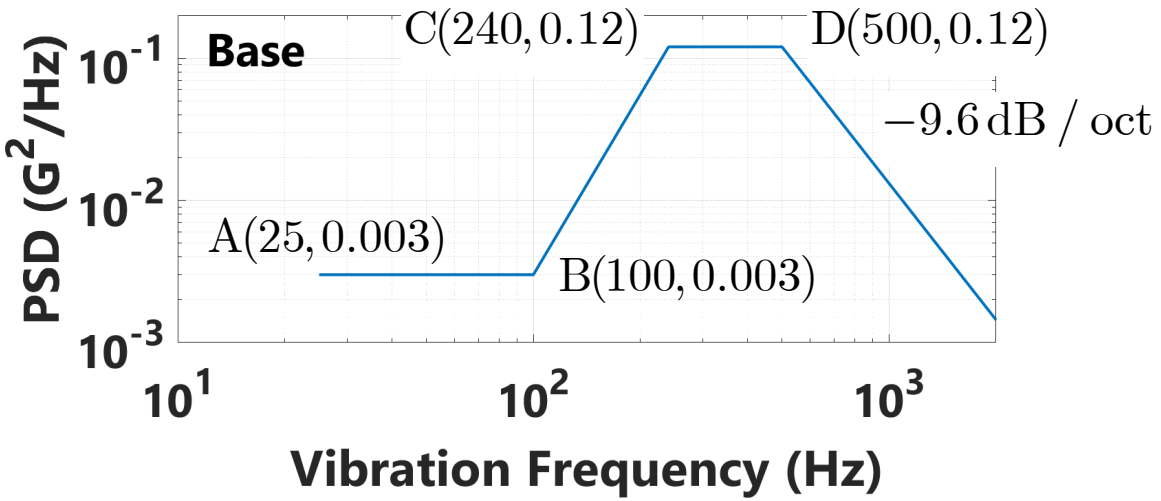


Milesの式

★実効値をより簡単に見積もる方法

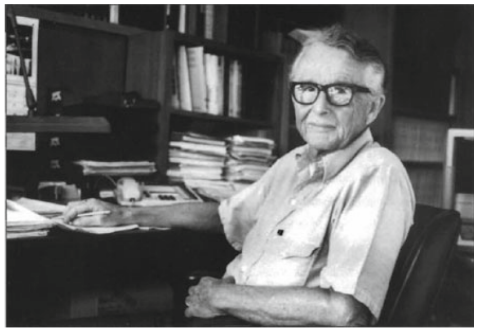
$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2}{(1 - {\eta_n}^2)^2 + 4{\zeta_n}^2 {\eta_n}^2} \ddot{S}_n^{\mathrm{base}} \right) \Delta \tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_o \ddot{S}_o^{base}} \quad (13.3.7)$$



Milesの式について詳しく勉強したい場合には、 以下の文献をダウンロードして読むとよいでしょう。

Jaap Wijker, ”Miles’ Equation in Random Vibrations -Theory and Applications in Spacecraft Structures Design-”, Solid Mechanics and Its Applications Vol. 248, Springer.



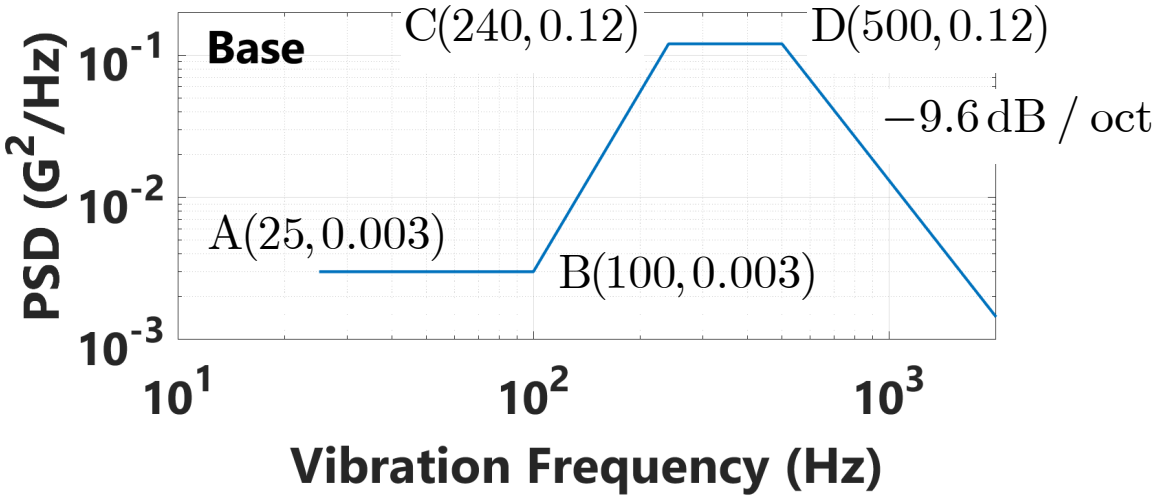
John Wilder Miles (1920-2008)

Milesの式

★実効値をより簡単に見積もる方法

【例題13.3.1】

土台のランダム加振条件が下のPSDプロファイルのように与えられている場合、 供試体の1次の固有振動数が$180\mathrm{Hz}$だとしたら、設計時の静荷重条件は何Gにしておけばよいか？(3σ区間で考えなさい)。



【略解】加振振動数が固有振動数と同じ$180\,\mathrm{Hz}$のときには、グラフのBC間でPSDの値が決まる。第11回第3章で学んだ通り、PSDの値Sと加振振動数fとの関係が、両対数グラフで、点(f_1, S_1)と(f_2, S_2)を通る直線関係にある場合、両社の関係は

$$S = S_1 \left(\frac{f}{f_1}\right)^a \quad , \quad a = \frac{\log_{10}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)} \tag{1}$$

と書ける。いま、グラフより、

$$\begin{cases} f_1 = 100 & , \quad S_1 = 0.003 \\ f_2 = 240 & , \quad S_2 = 0.12 \end{cases} \tag{2}$$

であるので、

$$a = \frac{\log_{10}\left(\frac{0.12}{0.003}\right)}{\log_{10}\left(\frac{240}{100}\right)} = 4.213605 \tag{3}$$

Milesの式

★実効値をより簡単に見積もる方法

よって、$f = 180\,\mathrm{Hz}$ のときの S の値は

$$S = 0.003 \times \left(\frac{180}{100}\right)^{4.213605} = 0.035706 \tag{4}$$

3σ区間で考えるとすると、Milesの式より、静加速度荷重条件は

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2} Q \times 180 \times 0.035706} \tag{5}$$

となる。ここで、Q値を

$$Q = 20 \tag{6}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\mathrm{rms}} &= 3\sqrt{\frac{\pi}{2} 20 \times 180 \times 0.035706} \\ &= 3 \times 14.209557996 \approx 42.63\,\mathrm{G} \end{aligned} \tag{7}$$

※ちなみに、RRSの場合は

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = 3 \times 14.2888 \approx 42.87\,\mathrm{G}$$

第3章のまとめ

- 減衰が小さい場合には、土台のランダム加振による搭載物の応答の実効値は式(13.3.7)

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} Q f_o \ddot{S}_o} \tag{13.3.7}$$

で近似することができる。ただし、$\ddot{S}_o$ は固有振動数 f_o での土台の振動のPSDである。この式はMilesの式と呼ばれる。

- Milesの式がよい近似を与えるのは減衰が小さい場合であり、小さくない場合には、第2章で学んだRRSを用いる方がよいだろう。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

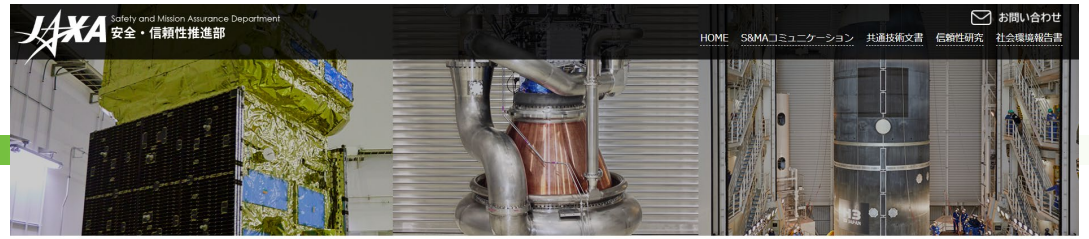
第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

付録A　JAXAの技術標準・設計標準

おまけ：JAXAの技術標準・設計標準

★いい参考書だと思います

https://sma.jaxa.jp/techdoc.html



HOME > JAXA共通技術文書

JAXAの開発経験を役立ててください

安全・信頼性推進部では衛星・ロケット・探査機等、様々な宇宙機を開発する際の道しるべとなるよう多くの共通文書を整備しています。これらは、より効率的な開発を進めるため、より成功確率を高めるため、長い年月をかけて追加や見直しされながら出来上がった、所謂「虎の巻」です。成り立ちとしてJAXA内部利用が主であったことから、体裁として「～すること」「～しなければならない」といった表現になっていますが、この中にはベンチャー企業にとっても役立つ情報が必ずあります。

1. プログラム管理要求文書
   - JMR-000　共通技術文書の定義及び管理
   - JMR-001　システム安全標準 English
   - JMR-002　ロケットペイロード安全標準 English
     - JMR-002様式
     - CZA-2018029　ロケットペイロード システム安全プログラム計画書/安全データパッケージテンプレート
     - CZA-2018029　様式
   - JMR-003　スペースデブリ発生防止標準 English
   - JMR-003-HB001　スペースデブリ発生防止対策　設計・運用マニュアル（宇宙機編）
   - JMR-003-HB002　スペースデブリ発生防止対策　設計・運用マニュアル（ロケット編）
   - JMR-004　信頼性プログラム標準 English
   - JMR-005　品質保証プログラム標準 English
   - JMR-006　コンフィギュレーション管理標準 English
   - JMR-010　コンタミネーション管理標準 English
   - JMR-012　電気・電子・電気機構部品プログラム標準 English
   - JMR-013　品質保証プログラム標準（基本要求 JIS Q 9100） English
   - JMR-014　感星等保護プログラム標準
   - JMR-016　人工衛星の衝突リスク管理標準

2. 技術要求・ガイドライン文書

1. 共通
   - JERG-0-001　宇宙用高圧ガス機器技術基準 English
   - JERG-0-017　品質保証プログラム標準　解説書
   - JERG-0-018　ヒューマンファクタ分析ハンドブック
   - JERG-0-039　宇宙用はんだ付工程標準
   - JERG-0-039-TM001A　宇宙用はんだ付工程標準（JERG-0-039）技術データ集
   - JERG-0-040　宇宙用電子機器搭載工程標準
   - JERG-0-041　宇宙用電気配線工程標準
   - JERG-0-041-TM001C　宇宙用電気配線工程標準（JERG-0-041）技術データ集
   - JERG-0-042　プリント配線板と部立品の設計標準
   - JERG-0-043　宇宙用表面実装はんだ付工程標準
   - JERG-0-043-TM001A　宇宙用表面実装はんだ付工程標準（JERG-0-043）技術データ集
   - JERG-0-047　再突入機の再突入飛行に係る安全基準 English
   - JERG-0-047-HB001　再突入機の再突入飛行に係る安全基準 解説書
   - JERG-0-049　ソフトウェア開発標準 English
   - JERG-0-050　海外部品品質確保ハンドブック
   - JERG-0-051　海外コンポーネント品質確保ハンドブック
   - JERG-0-052　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（共通編）
   - JERG-0-062　民生機器宇宙適用ガイドライン
   - JERG-0-063　宇宙開発信頼性技術ハンドブック

2. ロケット
   - JERG-1-007　射場運用安全技術基準 English
   - JERG-1-008　ロケット搭載ソフトウェア開発標準
   - JERG-1-009　ロケット機器間給フリー部品適用工程標準
   - JERG-1-009-HB001　ロケット機器間給フリー部品適用工程標準（JERG-1-009）解説書
   - JERG-1-010　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（ロケット編）

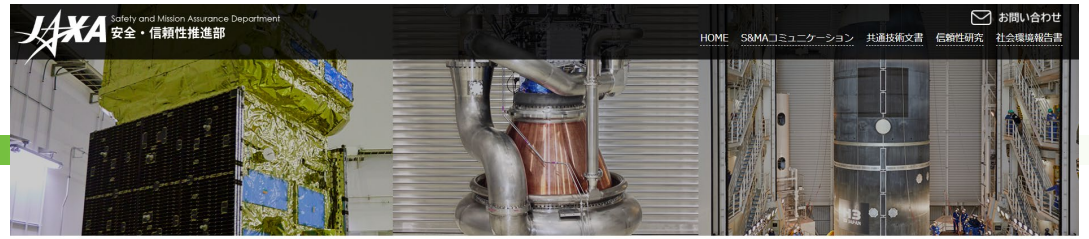
3. 宇宙機 -- 宇宙機設計標準体系図
   - JERG-2-000　宇宙機（人工衛星・探査機）設計標準 English
   - JERG-2-023　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（長寿命衛星編）
   - JERG-2-024　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（技術実証編）
   - JERG-2-025　公衆小型落下物　ハザード解析ハンドブック
   - JERG-2-026　軌道上サービスミッションに係る安全基準 English
   - JERG-2-100　システム設計標準
   - JERG-2-120　単一故障・波及故障防止標準
   - JERG-2-130　宇宙機一般試験標準
   - JERG-2-130-HB001　衝撃試験ハンドブック
   - JERG-2-130-HB002　音響試験ハンドブック
   - JERG-2-130-HB003　振動試験ハンドブック
   - JERG-2-130-HB004　フォースリミット振動試験ハンドブック
   - JERG-2-130-HB005　熱真空試験ハンドブック
   - JERG-2-130-HB006　環境試験仕様作成ハンドブック
   - JERG-2-130-HB007　宇宙機一般試験標準ハンドブック
   - JERG-2-141　宇宙環境標準
   - JERG-2-142　一般環境標準（宇宙機）
   - JERG-2-143　耐宇宙環境設計標準（耐放射線設計標準） English
   - JERG-2-144　微小デブリ衝突耐性評価標準 English
   - JERG-2-151　ミッション・軌道設計標準
   - JERG-2-152　運用管理標準 English
   - JERG-2-153　省資管理標準
   - JERG-2-200　電気設計標準
   - JERG-2-200-TP001　科学衛星等電気設計基準テンプレート English
   - JERG-2-211　帯電・放電設計標準 English
   - JERG-2-212　ワイヤディレーティング標準 English
   - JERG-2-213　絶縁設計標準 English
   - JERG-2-311　MLI制御防止設計標準
   - JERG-2-320　構造設計標準
   - JERG-2-330　機構設計標準 English
   - JERG-2-340　宇宙機用推進系設計標準
   - JERG-2-400　通信設計標準 English
   - JERG-2-400-HB201　CCSDS規格　●JAXA CCSDS HP
   - JERG-2-400-TP100　科学衛星等通信設計基準テンプレート
   - JERG-2-400-TP101
     通信・データハンドリングアーキテクチャ概要及び衛星地上・地上サブネットワークプロトコル
   - JERG-2-400-TP102
     通信・データハンドリングアーキテクチャ　エンドツーエンドプログラム
   - JERG-2-400-TP103
     通信・データハンドリングアーキテクチャ　スペースリンクプロトコル
   - JERG-2-401　テレコマンドデータリンクプロトコル設計標準
   - JERG-2-402　AOSデータリンクプロトコル設計標準
   - JERG-2-403　スペースコミュニケーション・エンドツーエンドプロトコル設計標準
   - JERG-2-411　RF通信系設計標準
   - JERG-2-420　RF回線設計標準
   - JERG-2-431　MIL-STD-1553Bオンボードサブネットワーク設計標準
   - JERG-2-432　Space Wire オンボードサブネットワーク設計標準
   - JERG-2-432-TP101　SpaceWire-R English
   - JERG-2-500　制御系設計標準 English
   - JERG-2-510　姿勢制御系設計標準 English
   - JERG-2-600　ソフトウェア開発標準（宇宙機用）
   - JERG-2-610　宇宙機ソフトウェア開発標準 English
   - JERG-2-700-TP001　衛星の機能モデル（Functional Model of Spacecraft（FMS））English
   - JERG-2-700-TP002　宇宙機監視管理プロトコル English
   - JERG-2-700-TP004　宇宙機情報ベース2定義（Definition of Spacecraft Information Base 2 (DSIB2)） English
   - JERG-2-701　運用準備標準
   - JERG-2-700-TP108　通信・データ処理アーキテクチャ　タイム管理

4. 地上設備
   - JERG-3-001　地上設備・装置品質プログラム標準
   - JERG-3-003　地上ソフトウェア開発標準 English
   - JERG-3-004　地上設備・装置の保全ガイドライン

おまけ：JAXAの技術標準・設計標準

★いい参考書だと思います

https://sma.jaxa.jp/techdoc.html



- JERG-2-000　宇宙機（人工衛星・探査機）設計標準 English
- JERG-2-023　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（長寿命衛星編）
- JERG-2-024　宇宙転用可能部品の宇宙適用ハンドブック（科学衛星編）
- JERG-2-025　公募小型副衛星 ハザード解析ハンドブック
- JERG-2-026　軌道上サービスミッションに係る安全基準 English
- JERG-2-100　システム設計標準
- JERG-2-120　単一故障・波及故障防止標準
- JERG-2-130　宇宙機一般試験標準
- JERG-2-130-HB001　衝撃試験ハンドブック
- JERG-2-130-HB002　音響試験ハンドブック
- JERG-2-130-HB003　振動試験ハンドブック
- JERG-2-130-HB004　フォースリミット振動試験ハンドブック
- JERG-2-130-HB005　熱真空試験ハンドブック
- JERG-2-130-HB006　環境試験信頼性要求ハンドブック
- JERG-2-130-HB007　宇宙機一般試験標準ハンドブック
- JERG-2-141　宇宙環境標準
- JERG-2-142　一般環境標準（宇宙機）
- JERG-2-143　耐宇宙環境設計標準（耐放射線設計標準） English
- JERG-2-144　微小デブリ衝突耐性評価標準 English
- JERG-2-151　ミッション・軌道設計標準
- JERG-2-152　擾乱管理標準 English
- JERG-2-153　指向管理標準
- JERG-2-200　電気設計標準
- JERG-2-200-TP001　科学衛星等電気設計基準テンプレート English

付録B　多自由度系のRRSおよびMilesの式

多自由度系のRRS

★土台のランダム加振を受ける多自由度系

第12回第2章では、多自由度系の土台をランダム加振する場合のモード変位の過渡応答の式

$$w_i = e^{-\zeta_i \Omega_i t}\begin{bmatrix} C_1 \sin\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right) \\ +C_2 \cos\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right)\end{bmatrix} + p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1-(\eta_i^n)^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\cos(\omega_n t+\delta_n) \\ +\dfrac{2\zeta_i(\eta_i^n)^3}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}\sin(\omega_n t+\delta_n) \end{array} \right\} \quad (12.2.13)$$

$$X_n = \sqrt{2S_n \Delta\tilde{f}} \quad , \quad S_n = S(f_n) \quad (12.2.3)$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad , \quad f_n = n\Delta\tilde{f} \quad (12.2.4)$$

$$p_i \equiv {\boldsymbol{\phi}_i}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{e} \quad (12.2.7)$$

$$\eta_i^n \equiv \frac{\omega_n}{\Omega_i} \quad (12.2.12)$$

を導いた。ただし、eは加振方向の基底ベクトルであり、p_iはi次モードにおける、加振方向の並進の刺激係数である。また、第12回第3章では1自由度系の場合のランダム応答の実効値の式

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}{(1-{\eta_n}^2)^2+4{\zeta_n}^2{\eta_n}^2}\ddot{S}_n^{\mathrm{base}}\right)\Delta\tilde{f}} \quad (12.3.11)$$

を導き、今回の第1章では、これをRRSと呼ぶことを学んだ。さらに、第3章では、これをより簡略化した式、すを導いた。こうなると、「多自由度系のRRSやMileSの式はどうなるのだろうか？」という興味が湧いてくる。そこで、この付録では、これらを求めてみよう。

多自由度系のRRS

★土台のランダム加振を受ける多自由度系のRRS

まず、式(12.2.13)より、ランダム加振を受けるときの定常応答は、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=1}^{N_D} w_k \boldsymbol{\phi}_k \tag{12.2.1}$$

$$w_i = w_i(t)$$

$$= p_i \sum_{n=1}^{M} X_n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1-(\eta_i^n)^2 + 4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2 + 4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2} \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ + \dfrac{2\zeta_i(\eta_i^n)^3}{\left[1-(\eta_i^n)^2\right]^2 + 4{\zeta_i}^2(\eta_i^n)^2} \sin(\omega_n t + \delta_n) \end{array} \right\} \tag{13.B.2}$$

となる。このとき、加振方向（$\boldsymbol{e}$ベクトルに方向）の慣性力は

$$F = F(t) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{x}} = \sum_{k=1}^{N_D} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{M} w_k \boldsymbol{\phi}_k = \sum_{k=1}^{N_D} p_k w_k \tag{13.B.3}$$

となるので、加振方向の慣性力の実効値は

$$F_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T F^2 dt} \tag{13.B.4}$$

これを、加振方向の並進の有効質量 μ_k の総和

$$\tilde{M} \equiv \sum_{j=1}^{N_D} \mu_j \tag{13.B.6}$$

で割れば、ランダム加振を受ける多自由度系の加振方向の応答加速度の実効値が求まる。

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \frac{F_{\mathrm{rms}}}{\tilde{M}} \tag{13.B.7}$$

（供試体の総質量 M ではなく$\tilde{M}$で割る意味はわかりますか？）。実際に、式(13.B.4)を計算してみると、まず、

$$\int_0^T F^2 dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{N_D}\sum_{\ell=1}^{N_D} p_k \ddot{w}_k p_\ell \ddot{w}_\ell dt$$

$$= \sum_{k=1}^{N_D}\sum_{\ell=1}^{N_D} p_k p_\ell \int_0^T \ddot{w}_k \ddot{w}_\ell dt \tag{13.B.8}$$

多自由度系のRRS

★土台のランダム加振を受ける多自由度系のRRS

ここで、1自由度系の場合に定常応答式

$$x(t)=\sum_{n=1}^{M}X_n\cos\left(2\pi f_n t+\delta_n+\phi_n\right) \tag{12.3.2}$$

から、実効値

$$\int_0^T\left|x(t)\right|^2dt=\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{M}{X_n}^2 \tag{12.3.6}$$

を導いたのと同様に、

$$\int_0^T\ddot{w}_k\ddot{w}_\ell dt$$

$$=\delta_{k\ell}\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{M}{p_k}^2{X_n}^2\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{1-(\eta_k^n)^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}\right\}^2\\&+\left\{\frac{2\zeta_k(\eta_k^n)^3}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}\right\}^2\end{aligned}\right\}$$

$$=\delta_{k\ell}\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{M}{p_k}^2{X_n}^2\frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_k^n)^2}$$

$$=\delta_{k\ell}\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{M}{p_k}^2\times 2S_n\Delta\tilde{f}\frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_i}^2(\eta_k^n)^2}$$

$$=\delta_{k\ell}{p_k}^2T\sum_{n=1}^{M}\frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}S_n\Delta\tilde{f} \tag{13.B.9}$$

となるので、

$$\int_0^T F^2dt$$

$$=\sum_{k=1}^{N_D}\sum_{\ell=1}^{N_D}p_kp_\ell\delta_{k\ell}{p_k}^2T\sum_{n=1}^{M}\frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}S_n\Delta\tilde{f}$$

$$=T\sum_{k=1}^{N_D}{p_k}^4\sum_{n=1}^{M}\frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}S_n\Delta\tilde{f} \tag{13.B.10}$$

ここで、刺激係数 p_k の2乗は有効質量 μ_k であるので、

多自由度系のRRS

★土台のランダム加振を受ける多自由度系のRRS

$$\int_0^T F^2 dt = T\sum_{k=1}^{N_D}{\mu_k}^2 \sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2} S_n \Delta\tilde{f} \tag{13.B.11}$$

したがって、慣性力のRRSは、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T F^2 dt} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N_D}{\mu_k}^2 \sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2} S_n \Delta\tilde{f}} \end{aligned} \tag{13.B.12}$$

ここで、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}}^k \equiv \sqrt{\sum_{n=1}^{M} \frac{1+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2}{\left[1-(\eta_k^n)^2\right]^2+4{\zeta_k}^2(\eta_k^n)^2} S_n \Delta\tilde{f}} \tag{13.B.13}$$

$$\eta_i^n \equiv \frac{\omega_n}{\Omega_i} \tag{12.2.12}$$

とおけば、$\ddot{x}_{\mathrm{rms}}^k$ は k 次のモードの加速度のRRSであり、

$$F_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_D}(\mu_k \ddot{x}_{\mathrm{rms}}^k)^2} \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{N_D}(F_{\mathrm{rms}}^k)^2} \tag{13.B.14}$$

ただし、F_{rms}^k は k 次のモードの慣性力のRRSと言える。

$$F_{\mathrm{rms}}^k \equiv \mu_k \ddot{x}_{\mathrm{rms}}^k \tag{13.B.15}$$

そして、系全体の加速度のRRSは式(13.B.5)

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \frac{F_{\mathrm{rms}}}{\tilde{M}} \tag{13.B.7}$$

より、

$$\ddot{x}_{\mathrm{rms}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N_D}(\mu_k \ddot{x}_{\mathrm{rms}}^k)^2}}{\sum_{j=1}^{N_D}\mu_j} \tag{13.B.16}$$

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

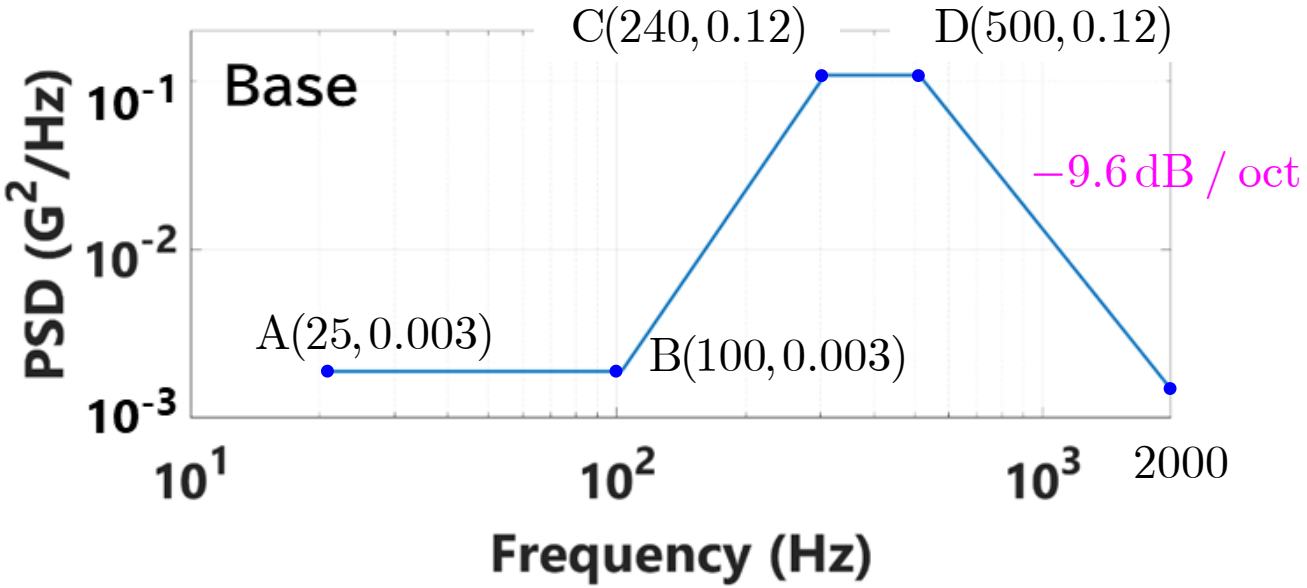
第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

2025年7月7日(月)2限

課題

2025年7月13日(日)18時00分締切

[1] 6UのCubeSatを設計したところ、1次から3次までの固有振動数が、 それぞれ218Hz、430Hz、1012Hz であった．この衛星を打ち上げるロケットのランダム環境は以下の図の通りである。衛星の強度を静荷重解析で評価する場合、何Gの荷重をかけた解析をすればよいか。Milesの式を用いて求めなさい。ただし、ランダム振動のばらつきを考えて、3σで考えなさい。また、計算に必要な定数は自分で設定しなさい。 なお、4次以上の固有振動数は2000Hzを超えていた。(5点)



自由課題

[2] 問題[1]で求めた荷重で静荷重解析をしてみたところ、機軸方向のランダム加振において、 一部の箇所の応力が許容応力を超えると推定された。問題[1]の計算方法では近似が厳しすぎるために許容応力が超えると考えられるため、有効質量を考慮して、より精度の高い近似で機軸方向の荷重を求めることとした。 衛星の総質量は10.0kg で、機軸方向の有効質量は1次が2.5kg、2次が1.5kg、3次1.0kg であった。 静荷重解析で評価する場合の荷重を求めなさい。ただし、ランダム振動のばらつきを考えて、3σで考えなさい。(3点)

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第13回　ランダム加振される物体に作用する荷重

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第14回　振動に対する耐性の評価法

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第14回の学修目標

★ CubeSatの振動試験について説明できる。

★ 正弦波振動試験について説明できる。

★ ランダム振動試験について説明できる。

★ サインバースト試験について説明できる。

第14回の全体構成

第1章　CubeSatの振動試験

第2章　正弦波振動試験

第3章　ランダム振動試験

第4章　サインバースト試験

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第14回　振動に対する耐性の評価法

2025年7月14日(月)2限

第1章　CubeSatの振動試験

第1章の学修目標

★ 振動試験の項目および手順について説明できる。

宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験

毎度毎度の動画ですが・・・

http://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=af7664b58f8a5e3b9e0fc347797b60e5

宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験

https://www.jaxa.jp/projects/rockets/epsilon/pdf/EpsilonUsersManual.pdf

CubeSatの環境条件

有効質量比で判断

固有振動数※	3軸とも113Hz以上
準静的加速度	機軸方向10G, 直交方向1G
正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$ 4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min
ランダム振動	20 – 100 Hz : 0.000944 G^2/Hz 100 – 300 Hz : 11.1 dB/oct 300 – 500 Hz : 0.0542 G^2/Hz 500 – 2000 Hz : -9.5 dB/oct （30秒間）

※ 事実上は, 共振振動数

宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験

実は, 打ち上げ耐性の他にもいくつか目的があって実施する

表 2.2-1　振動試験の目的と種類

	打上げ時の振動環境に対する耐性の確認	剛性の確認	ワークマンシップの確認	構造数学モデルの確認
正弦波振動試験	○	○	○*1)	○*3)
ランダム振動試験	○	○	○*2)	―
サインバースト試験	○	―	○	○*4)
モーダルサーベイ試験	―	―	―	○

*1)　主にシステム・サブシステムレベルのインテグレーションを含むワークマンシップの確認

*2)　主にコンポーネントレベルのワークマンシップの確認

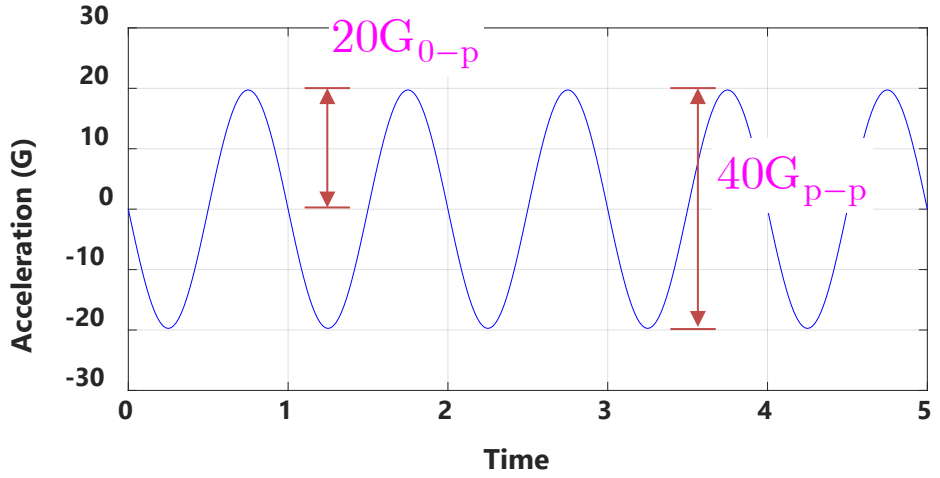
*3)　固有振動数とその周波数における伝達関数の確認

*4)　応力による静的な構造数学モデルの確認

参考文献:JERG-2-130-HB002B「振動試験ハンドブック」

宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験



振動試験のレベルは加速度で規定する。変位が

$$x = A\cos\omega t \tag{14.1.1}$$

の場合であれば、加速度は

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t \tag{14.1.2}$$

であるので、加速度振幅は

$$\ddot{x}_{0-\mathrm{p}} = A\omega^2 \tag{14.1.3}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{p}-\mathrm{p}} = 2A\omega^2 \tag{14.1.4}$$

○○$G_{0\text{-}p}$： 加速度振幅が○○G

○○$G_{p\text{-}p}$： 加速度の幅（最小値と最大値の差。つまり、振幅の2倍）が○○G

つまり、$5\,\mathrm{G}_{0-\mathrm{p}}$ なら、加速度振幅は

$$5\times 9.806\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2 = 49.3\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$$

ちなみに、土台の変位が

$$y = y_o\cos\omega t \tag{14.1.5}$$

で、対象物の変位が

$$x = A\cos(\omega t+\delta) \tag{14.1.6}$$

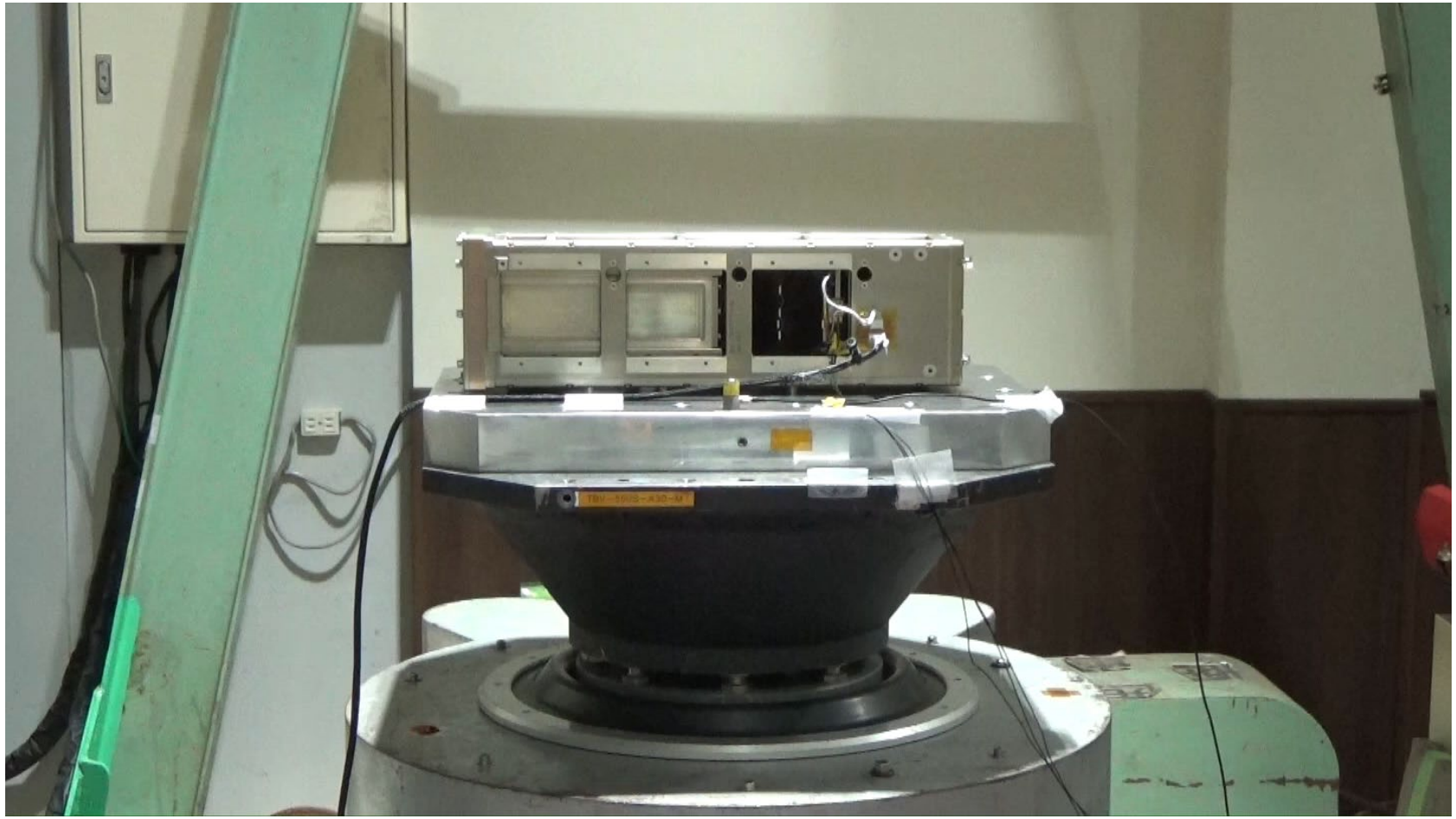
であった場合、加速度振幅比は

$$\frac{\ddot{x}_{0-\mathrm{p}}}{\ddot{y}_{0-\mathrm{p}}} = \frac{A\omega^2}{y_o\omega^2} = \frac{A}{y_o} \tag{14.1.7}$$

となるので、振幅比と同じになる。

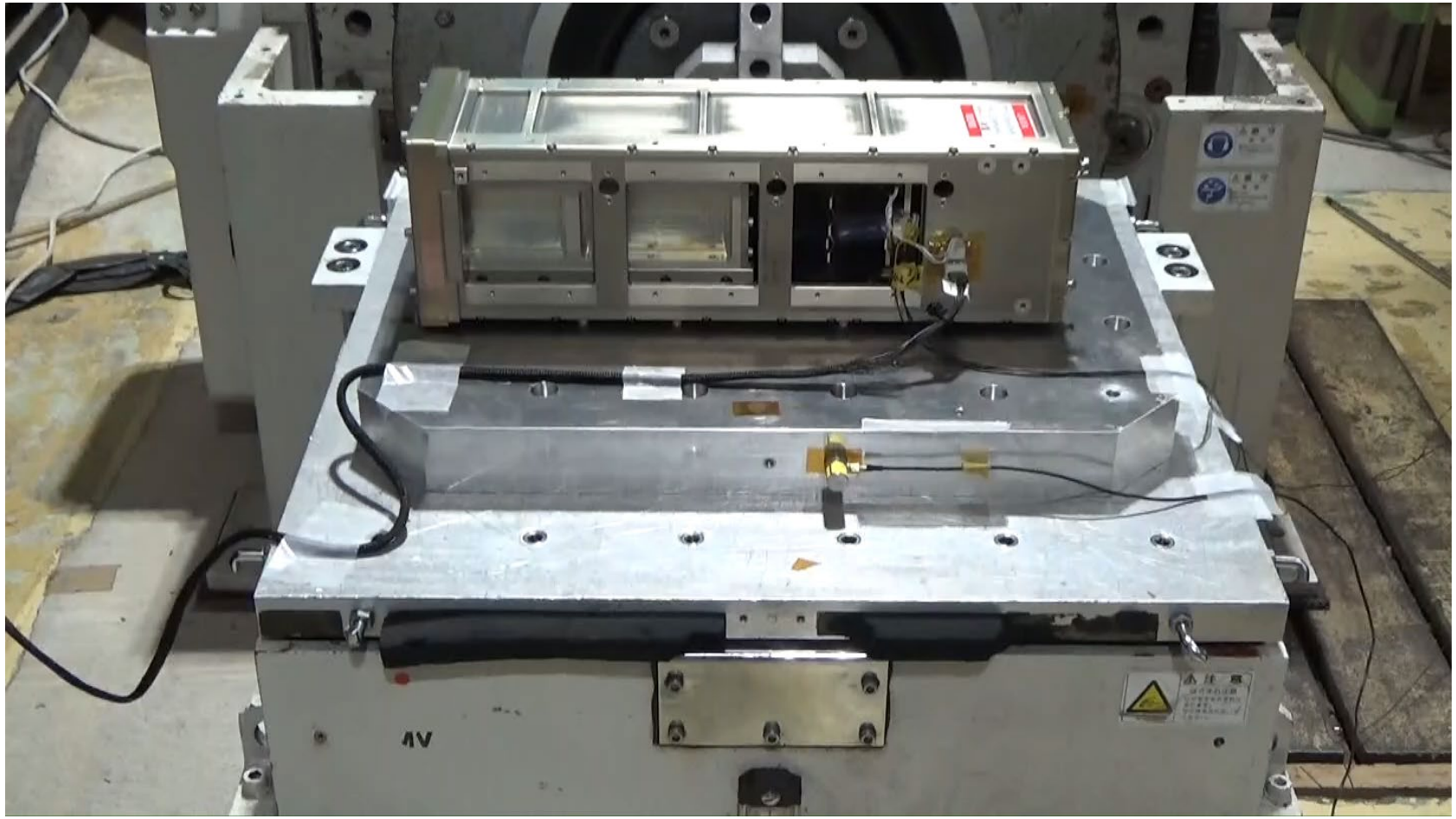
宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験

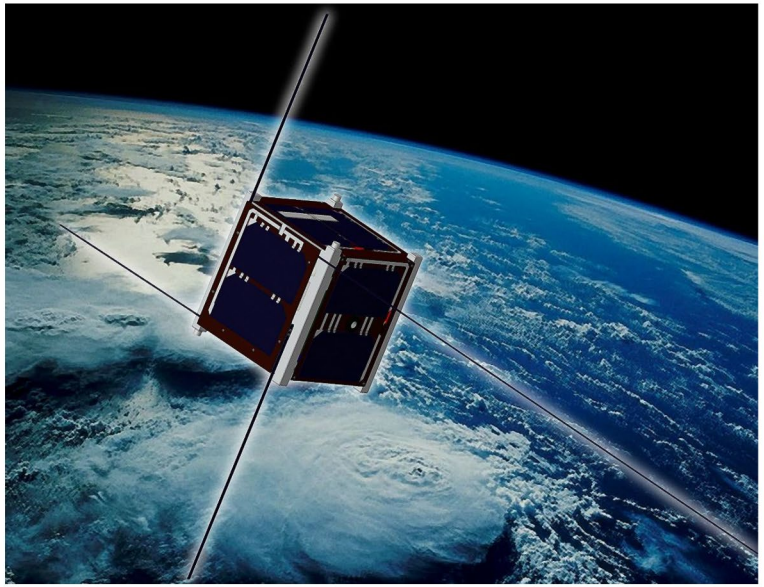


宇宙機の振動試験

★打上げ環境に耐えられることを確認するための試験



NEXUS 開発プロジェクトチーム
NEXUS Project Team



アマチュア通信技術実証衛星「NEXUS」

「FM 振動試験計画・報告書」

Doc.No.09 版：第 3 版	作成日：2018/05/30

NEX-SDP-Doc No.09

目次

1. 目的 ..... - 3 -
2. 適用範囲 ..... - 3 -
2.1. 適用文書 ..... - 3 -
2.2. 関連文書 ..... - 3 -
2.3. 検証項目 ..... - 3 -
3. 試験概要 ..... - 4 -
3.1. 試験日時 ..... - 5 -
3.2. 試験場所 ..... - 5 -
3.3. 実施体制 ..... - 5 -
4. 試験装置 ..... - 5 -
4.1. 供試体 ..... - 5 -
4.1.1. NESUS FM ..... - 5 -
4.1.2. CubeSat 振動試験用ケース ..... - 6 -
4.1.3. 1U 用 POD ..... - 7 -
4.1.4. 2U SAT DUMMY ..... - 7 -
4.2. 試験冶具 ..... - 8 -
4.3. 振動試験装置 ..... - 11 -
4.3.1. 補助テーブル ..... - 11 -
4.4. 加速度ピックアップ ..... - 12 -
4.5. チャタリング検出器 ..... - 14 -
4.6. 全体構成 ..... - 15 -
4.7. 仕様機器・機材一覧 ..... - 16 -
5. 試験手順 ..... - 17 -
6. 評価方法 ..... - 18 -
6.1. FM 動作確認 ..... - 18 -
6.2. トルクチェック ..... - 18 -
7. 安全管理 ..... - 18 -
8. 試験結果及び考察 ..... - 19 -
8.1. モーダルサーベイ試験(検証項目③) ..... - 19 -
8.2. 正弦波振動試験 ..... - 26 -
8.3. ランダム振動試験 ..... - 33 -
8.4. FM 動作確認(検証項目①) ..... - 36 -
8.5. 分離検知スイッチのチャタリング確認(検証項目①) ..... - 36 -
8.6. トルクチェック(検証項目②) ..... - 36 -
8.7. ダイニーマの目視確認(検証項目④⑤⑥) ..... - 36 -
8.8. 分離検知スイッチの絶縁確認(検証項目⑦⑧) ..... - 37 -
9. 結論 ..... - 37 -

目次

1. 目的 ..... - 3 -
2. 適用範囲 ..... - 3 -
   2.1. 適用文書 ..... - 3 -
   2.2. 関連文書 ..... - 3 -
   2.3. 検証項目 ..... - 3 -
3. 試験概要 ..... - 4 -
   3.1. 試験日時 ..... - 5 -
   3.2. 試験場所 ..... - 5 -
   3.3. 実施体制 ..... - 5 -
4. 試験装置 ..... - 5 -
   4.1. 供試体 ..... - 5 -
      4.1.1. NESUS FM ..... - 5 -
      4.1.2. CubeSat 振動試験用ケース ..... - 6 -
      4.1.3. 1U 用 POD ..... - 7 -
      4.1.4. 2U SAT DUMMY ..... - 7 -
   4.2. 試験冶具 ..... - 8 -
   4.3. 振動試験装置 ..... - 11 -
      4.3.1. 補助テーブル ..... - 11 -
   4.4. 加速度ピックアップ ..... - 12 -
   4.5. チャタリング検出器 ..... - 14 -
   4.6. 全体構成 ..... - 15 -
   4.7. 仕様機器・機材一覧 ..... - 16 -
5. 試験手順 ..... - 17 -
6. 評価方法 ..... - 18 -
   6.1. FM 動作確認 ..... - 18 -
   6.2. トルクチェック ..... - 18 -
7. 安全管理 ..... - 18 -
8. 試験結果及び考察 ..... - 19 -
   8.1. モーダルサーベイ試験(検証項目③) ..... - 19 -
   8.2. 正弦波振動試験 ..... - 26 -
   8.3. ランダム振動試験 ..... - 33 -
   8.4. FM 動作確認(検証項目①) ..... - 36 -
   8.5. 分離検知スイッチのチャタリング確認(検証項目①) ..... - 36 -
   8.6. トルクチェック(検証項目②) ..... - 36 -
   8.7. ダイニーマの目視確認(検証項目④⑤⑥) ..... - 36 -
   8.8. 分離検知スイッチの絶縁確認(検証項目⑦⑧) ..... - 37 -
9. 結論 ..... - 37 -

目次

1. 目的 ..... - 3 -
2. 適用範囲 ..... - 3 -
2.1. 適用文書 ..... - 3 -
2.2. 関連文書 ..... - 3 -
2.3. 検証項目 ..... - 3 -
3. 試験概要 ..... - 4 -
3.1. 試験日時 ..... - 5 -
3.2. 試験場所 ..... - 5 -
3.3. 実施体制 ..... - 5 -
4. 試験装置 ..... - 5 -
4.1. 供試体 ..... - 5 -
4.1.1. NESUS FM ..... - 5 -
4.1.2. CubeSat 振動試験用ケース ..... - 6 -
4.1.3. 1U 用 POD ..... - 7 -
4.1.4. 2U SAT DUMMY ..... - 7 -
4.2. 試験治具 ..... - 8 -
4.3. 振動試験装置 ..... - 11 -
4.3.1. 補助テーブル ..... - 11 -
4.4. 加速度ピックアップ ..... - 12 -
4.5. チャタリング検出器 ..... - 14 -
4.6. 全体構成 ..... - 15 -
4.7. 仕様機器・機材一覧 ..... - 16 -
5. 試験手順 ..... - 17 -
6. 評価方法 ..... - 18 -
6.1. FM 動作確認 ..... - 18 -
6.2. トルクチェック ..... - 18 -
7. 安全管理 ..... - 18 -
8. 試験結果及び考察 ..... - 19 -
8.1. モーダルサーベイ試験(検証項目③) ..... - 19 -
8.2. 正弦波振動試験 ..... - 26 -
8.3. ランダム振動試験 ..... - 33 -
8.4. FM 動作確認(検証項目①) ..... - 36 -
8.5. 分離検知スイッチのチャタリング確認(検証項目①) ..... - 36 -
8.6. トルクチェック(検証項目②) ..... - 36 -
8.7. ダイニーマの目視確認(検証項目④⑤⑥) ..... - 36 -
8.8. 分離検知スイッチの絶縁確認(検証項目⑦⑧) ..... - 37 -
9. 結論 ..... - 37 -

1. 目的

本書は，アマチュア通信技術実証衛星「NEXUS」（以下 NEXUS）が，打ち上げ時の振動に耐え得るか検証するための，振動試験計画を記したものである．また，試験計画が 2 節に示す適用範囲に遵守していることを示すことを目的とする．

2. 適用範囲

2.1. 適用文書

本書は以下に示す文書の最新版によるものとする．

(1) JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機
(2) KNX-07011C 環境基準 C_検証試験抜粋
(3) JMR-002B_N1 ロケットペイロード安全標準
(4) JERG-0-042B プリント配線板と組立品の設計標準
(5) JERG-2-001B_N1 小型衛星安全設計
(6) JERG-2-213A 絶縁設計標準
(7) JERG-2-214_N1 構造設計標準
(8) JERG-2-320A-N1 電源系設計標準
(9) CSA-108024C 公募相乗り小型衛星搭載リチウムイオンバッテリ(二次電池)の安全設計ガイドライン
(10) CSA-109009B 爆発性雰囲気での電気機器
(11) CSA-110015 分離後の RF 誤放射
(12) CSA-111006 機構に対するシステム安全
(13) CSA-111030 構造強度検証の考え方
(14) CSA-112040A 非金属ロックワイヤ
(15) ACX-11007 小型副衛星の安全設計手引き
(16) NEX-SDP-003-A スタンダードハザードレポート
(17) NEX-SDP-004-01-A ユニークハザードレポート NEX-001 構造系
(18) NEX-SDP-004-03-A ユニークハザードレポート NEX-003 通信系
(19) NEX-SDP-004-04-A ユニークハザードレポート NEX-004 電力系
(20) NEX-SDP-Doc No.01 設計図面
(21) NEX-SDP-Doc No.06 構造解析報告書
(22) NEX-SDP-Doc No.07 EM 振動試験計画・報告書
(23) NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書
(24) NEX-SDP-Doc No.23 バッテリセル検証計画書

2.2. 関連文書

本書の関連文書を以下に示す．

① トルクチェック管理表
② SPR-SDP-023 EM 振動試験計画・報告書
③ 圧電式加速度ピックアップ PV シリーズ_カタログ_0211-25
④ JAXA-JERG-2-130-HB003A_振動試験ハンドブック
⑤ 振動計測装置総合カタログ(IMV 株式会社)
⑥ 67C-Y-2017-181 CubeSat 振動試験用ケース取扱説明書
⑦ 振動の減数を表す係数

2.3. 検証項目

本試験の検証項目を以下の Table 1 に示す．

1. 目的

本書は，アマチュア通信技術実証衛星「NEXUS」（以下 NEXUS）が，打ち上げ時の振動に耐え得るか検証するための，振動試験計画を記したものである．また，試験計画が 2 節に示す適用範囲に遵守していることを示すことを目的とする．

2. 適用範囲

2.1. 適用文書

本書は以下に示す文書の最新版によるものとする．

(1) JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機
(2) KNX-07011C 環境基準 C_検証試験抜粋
(3) JMR-002B_N1 ロケットペイロード安全標準
(4) JERG-0-042B プリント配線板と組立品の設計標準
(5) JERG-2-001B_N1 小型衛星安全設計
(6) JERG-2-213A 絶縁設計標準
(7) JERG-2-214_N1 構造設計標準
(8) JERG-2-320A-N1 電源系設計標準
(9) CSA-108024C 公募相乗り小型衛星搭載リチウムイオンバッテリ(二次電池)の安全設計ガイドライン
(10) CSA-109009B 爆発性雰囲気での電気機器
(11) CSA-110015 分離後の RF 誤放射
(12) CSA-111006 機構に対するシステム安全
(13) CSA-111030 構造強度検証の考え方
(14) CSA-112040A 非金属ロックワイヤ
(15) ACX-11007 小型副衛星の安全設計手引き
(16) NEX-SDP-003-A スタンダードハザードレポート
(17) NEX-SDP-004-01-A ユニークハザードレポート NEX-001 構造系
(18) NEX-SDP-004-03-A ユニークハザードレポート NEX-003 通信系
(19) NEX-SDP-004-04-A ユニークハザードレポート NEX-004 電力系
(20) NEX-SDP-Doc No.01 設計図面
(21) NEX-SDP-Doc No.06 構造解析報告書
(22) NEX-SDP-Doc No.07 EM 振動試験計画・報告書
(23) NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書
(24) NEX-SDP-Doc No.23 バッテリセル検証計画書

2.2. 関連文書

本書の関連文書を以下に示す．

① トルクチェック管理表
② SPR-SDP-023 EM 振動試験計画・報告書
③ 圧電式加速度ピックアップ PV シリーズ_カタログ_0211-25
④ JAXA-JERG-2-130-HB003A_振動試験ハンドブック
⑤ 振動計測装置総合カタログ(IMV 株式会社)
⑥ 67C-Y-2017-181 CubeSat 振動試験用ケース取扱説明書
⑦ 振動の減数を表す係数

1. 目的

本書は，アマチュア通信技術実証衛星「NEXUS」（以下 NEXUS）が，打ち上げ時の振動に耐え得るか検証するための，振動試験計画を記したものである．また，試験計画が 2 節に示す適用範囲に遵守していることを示すことを目的とする．

2. 適用範囲

2.1. 適用文書

本書は以下に示す文書の最新版によるものとする．

(1) JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機
(2) KNX-07011C 環境基準 C_検証試験抜粋
(3) JMR-002B_N1 ロケットペイロード安全標準
(4) JERG-0-042B プリント配線板と組立品の設計標準
(5) JERG-2-001B_N1 小型衛星安全設計
(6) JERG-2-213A 絶縁設計標準
(7) JERG-2-214_N1 構造設計標準
(8) JERG-2-320A-N1 電源系設計標準
(9) CSA-108024C 公募相乗り小型衛星搭載リチウムイオンバッテリ(二次電池)の安全設計ガイドライン
(10) CSA-109009B 爆発性雰囲気での電気機器
(11) CSA-110015 分離後の RF 誤放射
(12) CSA-111006 機構に対するシステム安全
(13) CSA-111030 構造強度検証の考え方
(14) CSA-112040A 非金属ロックワイヤ
(15) ACX-11007 小型副衛星の安全設計手引き
(16) NEX-SDP-003-A スタンダードハザードレポート
(17) NEX-SDP-004-01-A ユニークハザードレポート NEX-001 構造系
(18) NEX-SDP-004-03-A ユニークハザードレポート NEX-003 通信系
(19) NEX-SDP-004-04-A ユニークハザードレポート NEX-004 電力系
(20) NEX-SDP-Doc No.01 設計図面
(21) NEX-SDP-Doc No.06 構造解析報告書
(22) NEX-SDP-Doc No.07 EM 振動試験計画・報告書
(23) NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書
(24) NEX-SDP-Doc No.23 バッテリセル検証計画書

2.2. 関連文書

本書の関連文書を以下に示す．

① トルクチェック管理表
② SPR-SDP-023 EM 振動試験計画・報告書
③ 圧電式加速度ピックアップ PV シリーズ_カタログ_0211-25
④ JAXA-JERG-2-130-HB003A_振動試験ハンドブック
⑤ 振動計測装置総合カタログ(IMV 株式会社)
⑥ 67C-Y-2017-181 CubeSat 振動試験用ケース取扱説明書
⑦ 振動の減数を表す係数

2.3. 検証項目

本試験の検証項目を以下の Table 1 に示す．

Table 1 検証項目

項目番号	検証事項	安全審査の検証項目
①	振動試験/衝撃試験により電子機器の健全性を確認する．	NEX-SDP-003-A-スタンダードハザードレポート HR-1 b)-3
②	材料の許容応力に対して，安全余裕が正となること．	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機　4.8 節
③	イプシロンロケットの I/F 条件の固有振動数条件(113Hz 以上，3 軸共通)を満たすこと．	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機　4.2 節
④	十分な強度を持つダイニーマを選定すること．	
⑤	ダイニーマの適切な結び方の選定	
⑥	ダイニーマの冗長設計	
⑦	電源系を 3 インヒビット化すること．	
⑧	通信機の電源を 3 インヒビット化すること．	NEX-SDP-004-03-A-ユニークハザードレポート NEX-003 1-3

上記の検証項目に対する検証方法を以下の Table 2 に示す．

Table 2 検証方法

項目番号	確認方法
①	試験前後に衛星全体の動作確認を行い，正常に動作するか確認する．動作確認事項の詳細は 6.1 節に示す．また，振動試験中にチャタリングが起きないかを，分離検知スイッチ 3 個について，チャタリング検出回路を用いて確認する．振動試験中は，チャタリング確認用の LED を，ビデオカメラを用いて録画しておく．
②	振動試験後，構造の破壊が起きていないかを目視確認する．また，目視確認できる範囲でネジ類の緩みがないか，トルクチェックを行い，確認する．トルクチェックの詳細は 6.2 節に示す．
③	振動試験前後にモーダルサーベイ試験を行い，最低次固有振動数が各軸 113Hz 以上であることを確認する．
④⑤⑥	振動試験後にダイニーマのほつれ，断線がないか目視で確認する．
⑦⑧	試験後にスイッチによる絶縁ができているか確認する．分離検知スイッチの絶縁検証の詳細は，適用文書(23)「NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書」に示す．

3. 試験概要

本試験は，NEXUS FM に対しランダム振動試及び正弦波振動試験を実施し，2.3 節に示した検証項目について評価する．振動特性レベルを以下の Table 3 に示す．Table 3 の値は，適用文書(1)「JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機」より与えられた機械環境条件(AT レベル)である．ただし，Table 3 において，座標の添え字 B はロケット機体座標系を表している．以下の文書において，添え字 B はロケット機体座標系，添え字 SC は衛星座標系を表す．各座標系の関係を以下の Figure 1 に示す．

Table 1 検証項目

項目番号	検証事項	安全審査の検証項目
①	振動試験/衝撃試験により電子機器の健全性を確認する.	NEX-SDP-003-A-スタンダードハザードレポート HR-1 b)-3
②	材料の許容応力に対して，安全余裕が正となること.	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機　4.8 節
③	イプシロンロケットの I/F 条件の固有振動数条件(113Hz 以上，3 軸共通)を満たすこと.	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機　4.2 節
④	十分な強度を持つダイニーマを選定すること.	
⑤	ダイニーマの適切な結び方の選定	
⑥	ダイニーマの冗長設計	
⑦	電源系を 3 インヒビット化すること.	
⑧	通信機の電源を 3 インヒビット化すること.	NEX-SDP-004-03-A-ユニークハザードレポート NEX-003 1-3

上記の検証項目に対する検証方法を以下の Table 2 に示す.

Table 2 検証方法

項目番号	確認方法
①	試験前後に衛星全体の動作確認を行い，正常に動作するか確認する．動作確認事項の詳細は 6.1 節に示す．また，振動試験中にチャタリングが起きないかを，分離検知スイッチ 3 個について，チャタリング検出回路を用いて確認する．振動試験中は，チャタリング確認用の LED を，ビデオカメラを用いて録画しておく.
②	振動試験後，構造の破壊が起きていないかを目視確認する．また，目視確認できる範囲でネジ類の緩みがないか，トルクチェックを行い，確認する．トルクチェックの詳細は 6.2 節に示す.
③	振動試験前後にモーダルサーベイ試験を行い，最低次固有振動数が各軸 113Hz 以上であることを確認する.
④⑤⑥	振動試験後にダイニーマのほつれ，断線がないか目視で確認する.
⑦⑧	試験後にスイッチによる絶縁ができているか確認する．分離検知スイッチの絶縁検証の詳細は，適用文書(23)「NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書」に示す.

Table 1 検証項目

項目番号	検証事項	安全審査の検証項目
①	振動試験/衝撃試験により電子機器の健全性を確認する.	NEX-SDP-003-A-スタンダードハザードレポート HR-1 b)-3
②	材料の許容応力に対して，安全余裕が正となること.	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機 4.8 節
③	イプシロンロケットの I/F 条件の固有振動数条件(113Hz 以上，3 軸共通)を満たすこと.	JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機 4.2 節
④	十分な強度を持つダイニーマを選定すること.	
⑤	ダイニーマの適切な結び方の選定	
⑥	ダイニーマの冗長設計	
⑦	電源系を 3 インヒビット化すること.	
⑧	通信機の電源を 3 インヒビット化すること.	NEX-SDP-004-03-A-ユニークハザードレポート NEX-003 1-3

上記の検証項目に対する検証方法を以下の Table 2 に示す.

Table 2 検証方法

項目番号	確認方法
①	試験前後に衛星全体の動作確認を行い，正常に動作するか確認する．動作確認事項の詳細は 6.1 節に示す．また，振動試験中にチャタリングが起きないかを，分離検知スイッチ 3 個について，チャタリング検出回路を用いて確認する．振動試験中は，チャタリング確認用の LED を，ビデオカメラを用いて録画しておく.
②	振動試験後，構造の破壊が起きていないかを目視確認する．また，目視確認できる範囲でネジ類の緩みがないか，トルクチェックを行い，確認する．トルクチェックの詳細は 6.2 節に示す.
③	振動試験前後にモーダルサーベイ試験を行い，最低次固有振動数が各軸 113Hz 以上であることを確認する.
④⑤⑥	振動試験後にダイニーマのほつれ，断線がないか目視で確認する.
⑦⑧	試験後にスイッチによる絶縁ができているか確認する．分離検知スイッチの絶縁検証の詳細は，適用文書(23)「NEX-SDP-Doc No.18 3 インヒビット健全性確認試験計画書」に示す.

3. 試験概要

本試験は，NEXUS FM に対しランダム振動試及び正弦波振動試験を実施し，2.3 節に示した検証項目について評価する．振動特性レベルを以下の Table 3 に示す．Table 3 の値は，適用文書(1)「JX-ESPC-101657 ロケットインターフェース管理文書 NEXUS/イプシロンロケット 4 号機」より与えられた機械環境条件(AT レベル)である．ただし，Table 3 において，座標の添え字 B はロケット機体座標系を表している．以下の文書において，添え字 B はロケット機体座標系，添え字 SC は衛星座標系を表す．各座標系の関係を以下の Figure 1 に示す.

Table 3 イプシロンロケットからの構造要求（AT レベル）

分類	要求項目	要求内容		試験公差
機械環境	正弦波振動(3 軸共通)	22~36Hz	1.0G，4oct/min	±3dB
		43~57Hz	1.0G，0.2oct/min	
	ランダム振動 (3 軸共通)	20~100Hz	0.000944G^2/Hz	±6dB
		100~300Hz	11.1dB/oct	
		300~500Hz	0.0542G^2/Hz	
		500~2000Hz	-9.5dB/oct	
		time	30sec	
		O.A.	5.1Grms	

Table 4 低レベル正弦波振動（モーダルサーベイ）

周波数範囲	試験レベル	掃引速度
20~2000Hz	0.5G	2oct/min(往復)

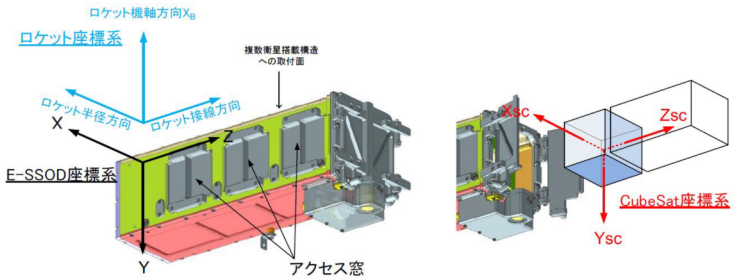


Figure 1 各座標系の関係(適用文書(1)より抜粋)

3.1. 試験日時

2018 年 6 月 25 日(月)9:00~17:00

・再試験

2018 年 7 月 17 日(火)9:00~17:00

3.2. 試験場所

〒252-0185 神奈川県相模原市緑区日連 870

IMV 株式会社 東京テストラボ

TEL：042-686-6388

3.3. 実施体制

試験責任者：宮崎康行

試験リーダー：小野弘幸

試験参加者：小野弘幸，高坂大樹，鈴木脩斗，山口清，山田晃一郎，中村壮児，佐藤陸

4. 試験装置

4.1. 供試体

4.1.1. NESUS FM

本試験の供試体である，NEXUS FM の外観を Figure 2 に，諸元を以下の Table 5 に示す.

Table 3 イプシロンロケットからの構造要求（AT レベル）

分類	要求項目	要求内容		試験公差
機械環境	正弦波振動(3 軸共通)	22~36Hz	1.0G，4oct/min	±3dB
		43~57Hz	1.0G，0.2oct/min	
	ランダム振動 (3 軸共通)	20~100Hz	0.000944G²/Hz	±6dB
		100~300Hz	11.1dB/oct	
		300~500Hz	0.0542G²/Hz	
		500~2000Hz	-9.5dB/oct	
		time	30sec	
		O.A.	5.1Grms	

Xのデシベル値

：$10\log_{10} X$

$10\log_{10} X = 3$

$\Rightarrow X \approx 2$

$10\log_{10} X = -3$

$\Rightarrow X \approx 0.5$

Table 4 低レベル正弦波振動（モーダルサーベイ）

周波数範囲	試験レベル	掃引速度
20~2000Hz	0.5G	2oct/min(往復)

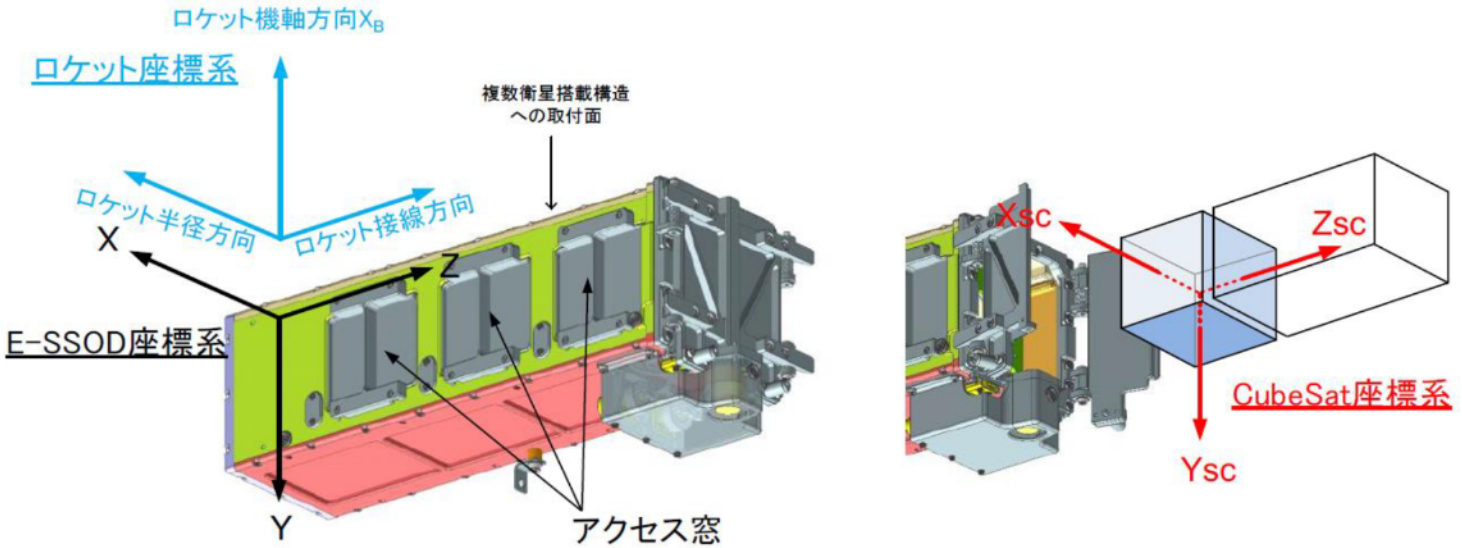


Figure 1 各座標系の関係(適用文書(1)より抜粋)

Table 3 イプシロンロケットからの構造要求（AT レベル）

分類	要求項目	要求内容		試験公差
機械環境	正弦波振動(3 軸共通)	22~36Hz	1.0G，4oct/min	±3dB
		43~57Hz	1.0G，0.2oct/min	
	ランダム振動 (3 軸共通)	20~100Hz	0.000944G²/Hz	±6dB
		100~300Hz	11.1dB/oct	
		300~500Hz	0.0542G²/Hz	
		500~2000Hz	-9.5dB/oct	
		time	30sec	
		O.A.	5.1Grms	

Table 4 低レベル正弦波振動（モードサーベイ）

周波数範囲	試験レベル	掃引速度
20~2000Hz	0.5G	2oct/min(往復)

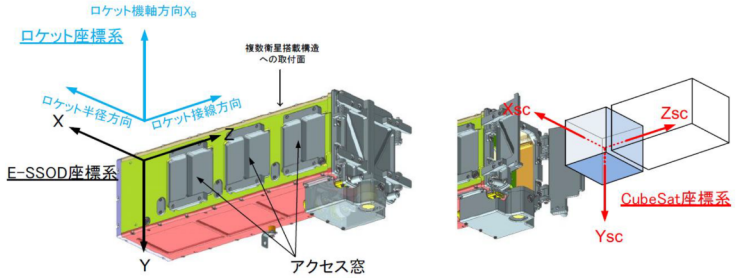


Figure 1 各座標系の関係(適用文書(1)より抜粋)

3.1. 試験日時
2018 年 6 月 25 日(月)9:00~17:00

・再試験
2018 年 7 月 17 日(火)9:00~17:00

3.2. 試験場所
〒252-0185　神奈川県相模原市緑区日連 870
IMV 株式会社 東京テストラボ
TEL：042-686-6388

3.3. 実施体制
試験責任者：宮崎康行
試験リーダー：小野弘幸
試験参加者：小野弘幸，高坂大樹，鈴木脩斗，山口清，山田晃一郎，中村壮児，佐藤陸

4. 試験装置
4.1. 供試体
4.1.1. NESUS FM
本試験の供試体である，NEXUS FM の外観を Figure 2 に，諸元を以下の Table 5 に示す．

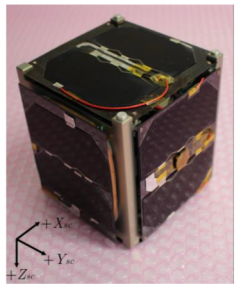


Figure 2 NEXUS FM 構体

Table 5 NEXUS FM 諸元(適用文書(20)より抜粋)

質量	1.24kg	
寸法	100.0mm×100.0mm×113.5mm	
材質	一次構造部材	A7075-T7351
	外面パネル	A6061-T6
	内部基板	FR-4
	締結材	SUS303

4.1.2. CubeSat 振動試験用ケース
NEXUS FM を収納する CubeSat 振動試験用ケースの外観を以下の Figure 3 に，諸元を以下の Table 6 に示す．また，NEXUS FM の収納方向を以下の Figure 4 に示す．

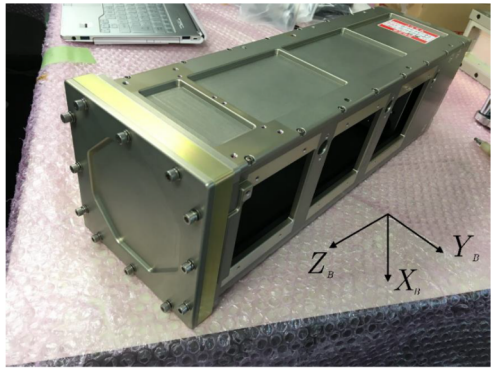


Figure 3 CubeSat 振動試験用ケース

Table 6 CubeSat 振動試験用ケース諸元(関連文書⑥より抜粋)

製造業者	IHI エアロスペース
形状	469×140×140mm
質量	3.8kg

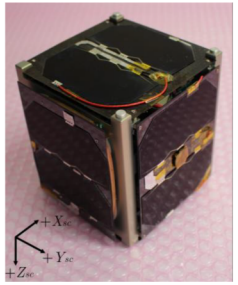


Figure 2 NEXUS FM 構体

Table 5 NEXUS FM 諸元(適用文書(20)より抜粋)

質量	1.24kg	
寸法	100.0mm×100.0mm×113.5mm	
材質	一次構造部材	A7075-T7351
	外面パネル	A6061-T6
	内部基板	FR-4
	締結材	SUS303

4.1.2. CubeSat 振動試験用ケース

NEXUS FM を収納する CubeSat 振動試験用ケースの外観を以下の Figure 3 に，諸元を以下の Table 6 に示す．また，NEXUS FM の収納方向を以下の Figure 4 に示す．

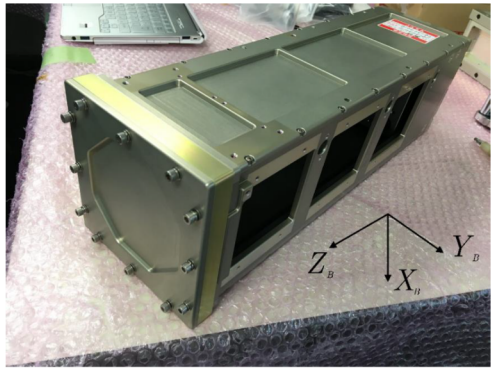


Figure 3 CubeSat 振動試験用ケース

Table 6 CubeSat 振動試験用ケース諸元(関連文書⑥より抜粋)

製造業者	IHI エアロスペース
形状	469×140×140mm
質量	3.8kg

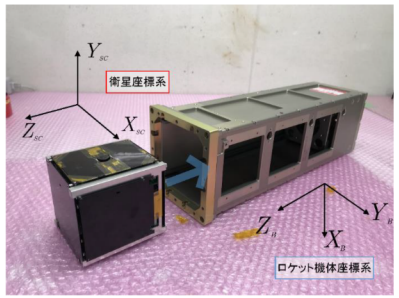


Figure 4 供試体収納方向

4.1.3. 1U 用 POD

モーダルサーベイ試験にて，供試体の固有振動数を調べる際，4.1.2 節の CubeSat 振動試験用ケースの共振点と，供試体の共振点がほぼ同等の振動数にあり，供試体のみの共振点を調査することが困難であるため，モーダルサーベイ試験のみ，以下の 1U 用 POD を用い，試験を行う．1U 用 POD の外観を Figure 5 に，諸元を以下の Table 7 に示す．1U 用 POD は，適用文書(22)「NEX-SDP-Doc No.07 EM 振動試験計画・報告書」に示す EM 振動試験の際に用いたものである．ただし，1U 用 POD への供試体の収納方向は，Figure 4 に示す CubeSat 振動試験用ケースへの収納方向と同様にする．

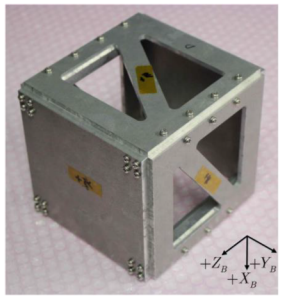


Figure 5 1U 用 POD

Table 7 1U 用 POD 諸元

質量	1.062kg
寸法	125.0mm×134.0mm×125mm
材質	アルミニウム合金

4.1.4. 2U SAT DUMMY

本衛星は 1U サイズであるため，NEXUS FM を搭載した後，2U サイズのダミーマスを試験用ケースに搭載し，ロケット搭載時のコンフィギュレーションを再現する．搭載するダミーマスの外観を Figure 6 に，諸元を以下の Table 8 に示す．

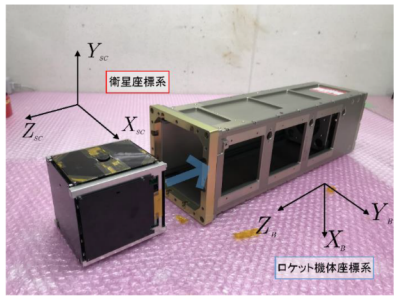


Figure 4 供試体収納方向

4.1.3. 1U 用 POD

モーダルサーベイ試験にて，供試体の固有振動数を調べる際，4.1.2 節の CubeSat 振動試験用ケースの共振点と，供試体の共振点がほぼ同等の振動数にあり，供試体のみの共振点を調査することが困難であるため，モーダルサーベイ試験のみ，以下の 1U 用 POD を用い，試験を行う．1U 用 POD の外観を Figure 5 に，諸元を以下の Table 7 に示す．1U 用 POD は，適用文書(22)「NEX-SDP-Doc No.07 EM 振動試験計画・報告書」に示す EM 振動試験の際に用いたものである．ただし，1U 用 POD への供試体の収納方向は，Figure 4 に示す CubeSat 振動試験用ケースへの収納方向と同様にする．

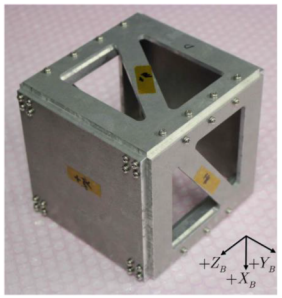


Figure 5 1U 用 POD

Table 7 1U 用 POD 諸元

質量	1.062kg
寸法	125.0mm×134.0mm×125mm
材質	アルミニウム合金

4.1.4. 2U SAT DUMMY

本衛星は 1U サイズであるため，NEXUS FM を搭載した後，2U サイズのダミーマスを試験用ケースに搭載し，ロケット搭載時のコンフィギュレーションを再現する．搭載するダミーマスの外観を Figure 6 に，諸元を以下の Table 8 に示す．

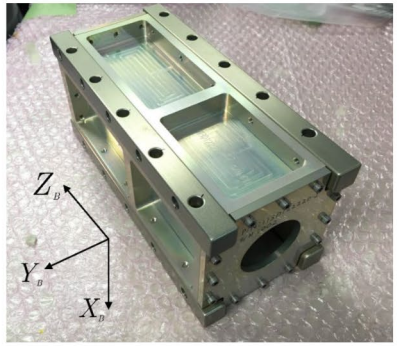


Figure 6 2U SAT DUMMY

Table 8 2U SAT DUMMY 諸元(関連文書⑥より抜粋)

製造業者	IHI エアロスペース
形状	100×100×227mm
質量	3.0kg

4.2. 試験治具

試験治具の図面を以下の Figure 7 に，外観を Figure 8 に示す．材質は A5052 である．

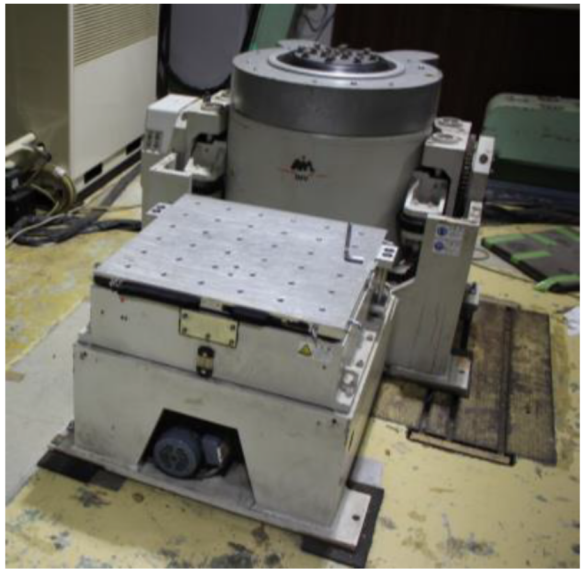


Figure 11 振動試験装置 i240/SA3M/H6

Table 9 振動試験装置諸元

製造業者	IMV 株式会社
型番	i240/SA3M/H6
実施可能試験	正弦波試験，ランダム試験，衝撃試験
最大加振力	正弦波：24kN ランダム波：24kN rms
振動数範囲	2600Hz
最大加速度	1200m/s^2
最大速度	2.2m/s
搭載質量	400kgf(試験品，冶具，ボルト等を含む)
最大振幅	51mm$^{p\text{-}p}$
加振方向	上下及び水平方向

Figure 13 3 軸加速度ピックアップ

Table 10 加速度ピックアップ諸元(関連文書④より抜粋)

製造業者	リオン株式会社
型式	PV-97C
質量	4.7g
電荷感度	0.12 pC/(m/s^2)
電圧感度	
測定周波数範囲(±1dB)	1~10000Hz
取付共振周波数	
横感度比	5%以下
標準取付方法	接着
最大測定加速度(peak)	5000 m/s^2
ベース歪感度	0.1(m/s^2)/μstrain
熱過渡応答	1.0(m/s^2)/℃
仕様温度範囲	-50~+200℃
静電容量	500pF
ケース材料	チタン

Figure 14 1 軸加速度ピックアップ

Table 11 1 軸加速度ピックアップ諸元(関連文書⑤より抜粋)

製造業者	IMV 株式会社
型番	VP-32
共振周波数	30000Hz<
振動数範囲	fc~10000Hz±1dB (fc は増幅器の時定数によって決まる値)
電荷感度	3.0pC/(m/s^2)±10%
最大許容加速度	9800 m/s^2
静電容量	1500pF
使用温度範囲	-40~160℃
質量	24g
材質	ステンレススチール(SUS303)

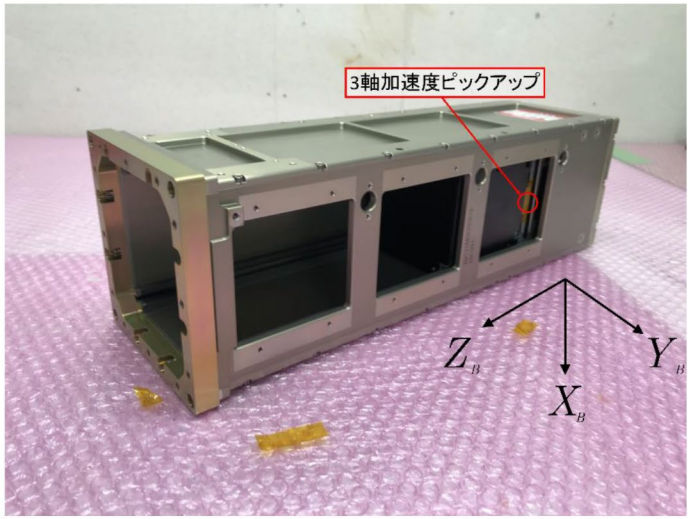


Figure 15 加速度ピックアップ取り付け位置

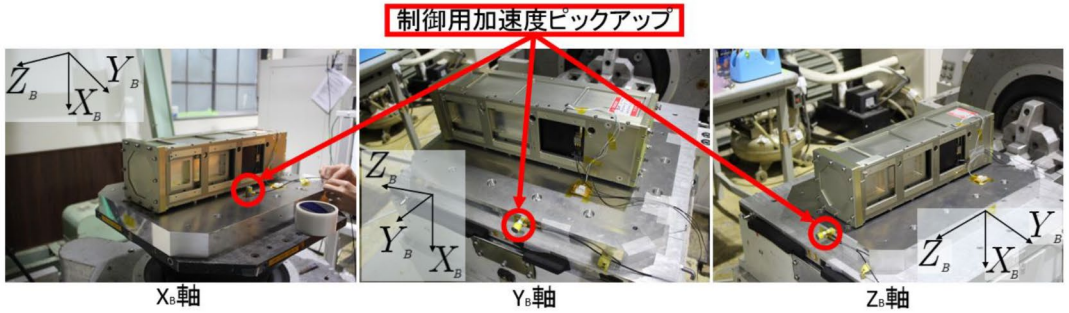


Figure 16 制御用加速度ピックアップ取り付け位置

4.7. 仕様機器・機材一覧

本試験で用いる仕様機器・機材一覧を以下の Table 12 に示す.

Table 12 仕様機器・機材一覧

No	持ち物	個数	☑	No	持ち物	個数	☑
[1]	NEXUS　FM	1		[31]	ピンセット	2	
[2]	CubeSat 振動試験用ケース	1		[32]	フラックス	1	
[3]	1U 用 POD	1		[33]	ラジオペンチ	1	
[4]	1U 用治具	1		[34]	ニッパー	1	
[5]	2U SAT DUMMY	1		[35]	カッター	2	
[6]	試験用治具	1		[36]	ドライバー	3	
[7]	チャタリング検出器	1		[37]	精密ドライバー	1	
[8]	チャタリング検出器用配線	3		[38]	電子ノギス	1	
[9]	データポート用予備配線	1		[39]	JIS 定規	1	
[10]	記録用 PC	3		[40]	延長ケーブル	2	
[11]	治具取り付け用ボルト M10	15		[41]	カプトンテープ	1	
[12]	1U 用 POD ネジ M3×10	複数		[42]	養生テープ	2	
[13]	POD 対治具用ネジ M3×10	複数		[43]	マーカーペン	2	
[14]	治具用ネジ M3×20，15	複数		[44]	手袋	複数	
[15]	治具用ネジ M3×20(小なべ)	複数		[45]	マスク	複数	
[16]	バネ座金 M3	複数		[46]	帽子	複数	
[17]	六角レンチ(大)	2		[47]	白衣&クリーンウェア	複数	
[18]	六角レンチ(小)	2		[48]	カメラ	2	
[19]	トルクドライバー	1		[49]	ビデオカメラ	3	
[20]	トルクレンチ	1		[50]	三脚	3	
[21]	トルクドライバー変換ビット	2		[51]	SD カード	5	
[22]	瞬間接着剤	2		[52]	アルコール	1	
[23]	ハサミ	2		[53]	キムワイプ	2	
[24]	紙やすり	1		[54]	テスタ	2	
[25]	はんだごて	2		[55]	梱包材	複数	
[26]	はんだ	1		[56]	メジャー	2	
[27]	ロックタイト（中強度）	1		[57]	結束バンド	複数	
[28]	エポキシ	1		[58]	USB ケーブル	4	
[29]	スポイラー	2		[59]	予備配線（黒，白，赤）	3	
[30]	ストリッパー	2		[60]			

5. 試験手順
本試験の試験手順を以下に示す.

No	場所	時刻	手順
[1]	日大	試験前	FM 動作確認を行う(6.1 節を参照).
[2]	日大		衛星構体を組立てる．その際，関連文書①「トルク管理表」に従って，ネジ類にトルクを負荷する.
[3]	日大		アンテナ用ダイニーマが結ばれていることを目視で確認する.
[4]	日大		分離検知スイッチによる絶縁を確認する(適用文書(23)を参照).
[5]	日大		衛星構体を 1U 用 POD に収納し，フライトピンを外す.
[6]	日大		1U 用治具に，1U 用 POD を取り付ける.
[7]	日大		振動試験治具に CubeSat 振動試験用ケースを取り付けておく.
[8]	相模原	9:00-10:30	搬入
[9]	相模原		加速度ピックアップを取り付ける(Figure 17 参照).
[10]	相模原		チャタリング検出器を接続する(Figure 20 参照).
[11]	相模原		試験前のバッテリ電圧を測定する.
[12]	相模原		加振台に 1U 用治具を取り付ける.
[13]	相模原	10:30-10:40	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[14]	相模原		モーダルサーベイ試験を行い，供試体の固有振動数を確認する.
[15]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[16]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[17]	相模原	10:40-11:00	1U 用治具を加振台から取り外し，衛星構体を 1U 用 POD から取り出す.
[18]	相模原		CubeSat 振動試験用ケースに衛星構体を収納し，その後，2U SAT DUMMY を収納する(Figure 4 参照).
[19]	相模原		振動試験用治具を加振台に取り付ける.
[20]	相模原		制御用加速度ピックアップを振動試験用治具に取り付ける(Figure 16 参照)
[21]	相模原	11:00-11:15	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[22]	相模原		正弦波振動試験(X_B 軸)を行う.
[23]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[24]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[25]	相模原	11:15-11:25	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[26]	相模原		ランダム振動試験(X_B 軸)を行う.
[27]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[28]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[29]	相模原	11:25-11:50	振動試験用治具，制御用加速度ピックアップを加振台からとり外し，CubeSat 振動試験用ケースから，衛星構体を取り出す.
[30]	相模原		1U 用 POD に衛星構体を収納する.
[31]	相模原		1U 用治具を加振台に取り付ける.
[32]	相模原		制御用加速度ピックアップを 1U 用治具に取り付ける(Figure 17 参照)
[33]	相模原	11:50-12:00	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[34]	相模原		モーダルサーベイ試験を行い，供試体の固有振動数が試験前と変化していないか確認する.
[35]	相模原	12:00-12:30	1U 用治具と 1U 用 POD を取り外し，水平加振台に換装する.
[36]	相模原	12:30-16:00	上記[13]～[34]を，赤字の部分を Y_B 軸，Z_B 軸に変更して繰り返す．ただし，Y_B 軸終了後，治具の取り付け方向を変更する.
[37]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[38]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[39]	相模原		試験後のバッテリ電圧を測定する.
[40]	相模原	16:00-17:00	試験装置片付け，撤収
[41]	日大	試験後	衛星構体を試験用 POD から取り出し，分離検知スイッチによる絶縁を確認する(適用文書(23)を参照).
[42]	日大		ダイニーマのほつれ，断線がないか，目視で確認する.
[43]	日大		FM 動作確認を行う(6.1 節参照).
[44]	日大		ネジ類の緩みがないか目視で確認する.

No	場所	時刻	手順
[1]	日大	試験前	FM 動作確認を行う(6.1 節を参照).
[2]	日大		衛星構体を組立てる．その際，関連文書①「トルク管理表」に従って，ネジ類にトルクを負荷する.
[3]	日大		アンテナ用ダイニーマが結ばれていることを目視で確認する.
[4]	日大		分離検知スイッチによる絶縁を確認する(適用文書(23)を参照).
[5]	日大		衛星構体を 1U 用 POD に収納し，フライトピンを外す.
[6]	日大		1U 用治具に，1U 用 POD を取り付ける.
[7]	日大		振動試験治具に CubeSat 振動試験用ケースを取り付けておく.
[8]	相模原	9:00-10:30	搬入
[9]	相模原		加速度ピックアップを取り付ける(Figure 17 参照).
[10]	相模原		チャタリング検出器を接続する(Figure 20 参照).
[11]	相模原		試験前のバッテリ電圧を測定する.
[12]	相模原		加振台に 1U 用治具を取り付ける.
[13]	相模原	10:30-10:40	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[14]	相模原		モーダルサーベイ試験を行い，供試体の固有振動数を確認する.
[15]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[16]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[17]	相模原	10:40-11:00	1U 用治具を加振台から取り外し，衛星構体を 1U 用 POD から取り出す.
[18]	相模原		CubeSat 振動試験用ケースに衛星構体を収納し，その後，2U SAT DUMMY を収納する(Figure 4 参照).
[19]	相模原		振動試験用治具を加振台に取り付ける.
[20]	相模原		制御用加速度ピックアップを振動試験用治具に取り付ける(Figure 16 参照)

※ モーダルサーベイ：低い振動レベルで，共振点と応答倍率のみを確認する試験

[20]	相模原		制御用加速度ピックアップを振動試験用治具に取り付ける(Figure 16 参照)
[21]	相模原	11:00-11:15	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[22]	相模原		正弦波振動試験(X_B 軸)を行う.
[23]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[24]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[25]	相模原	11:15-11:25	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[26]	相模原		ランダム振動試験(X_B 軸)を行う.
[27]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[28]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[29]	相模原	11:25-11:50	振動試験用治具，制御用加速度ピックアップを加振台からとり外し，CubeSat 振動試験用ケースから，衛星構体を取り出す.
[30]	相模原		1U 用 POD に衛星構体を収納する.
[31]	相模原		1U 用治具を加振台に取り付ける.
[32]	相模原		制御用加速度ピックアップを 1U 用治具に取り付ける(Figure 17 参照)
[33]	相模原	11:50-12:00	スイッチチャタリングの有無をモニタ開始する.
[34]	相模原		モーダルサーベイ試験を行い，供試体の固有振動数が試験前と変化していないか確認する.
[35]	相模原	12:00-12:30	1U 用治具と 1U 用 POD を取り外し，水平加振台に換装する.
[36]	相模原	12:30-16:00	上記[13]～[34]を，赤字の部分を Y_B 軸，Z_B 軸に変更して繰り返す. ただし，Y_B 軸終了後，治具の取り付け方向を変更する.
[37]	相模原		スイッチチャタリングの有無をモニタ終了する.
[38]	相模原		加速度センサの出力を保存する.
[39]	相模原		試験後のバッテリ電圧を測定する.
[40]	相模原	16:00-17:00	試験装置片付け，撤収
[41]	日大	試験後	衛星構体を試験用 POD から取り出し，分離検知スイッチによる絶縁を確認する(適用文書(23)を参照).
[42]	日大		ダイニーマのほつれ，断線がないか，目視で確認する.
[43]	日大		FM 動作確認を行う(6.1 節参照).
[44]	日大		ネジ類の緩みがないか目視で確認する.

【Y_{SC}軸試験前】

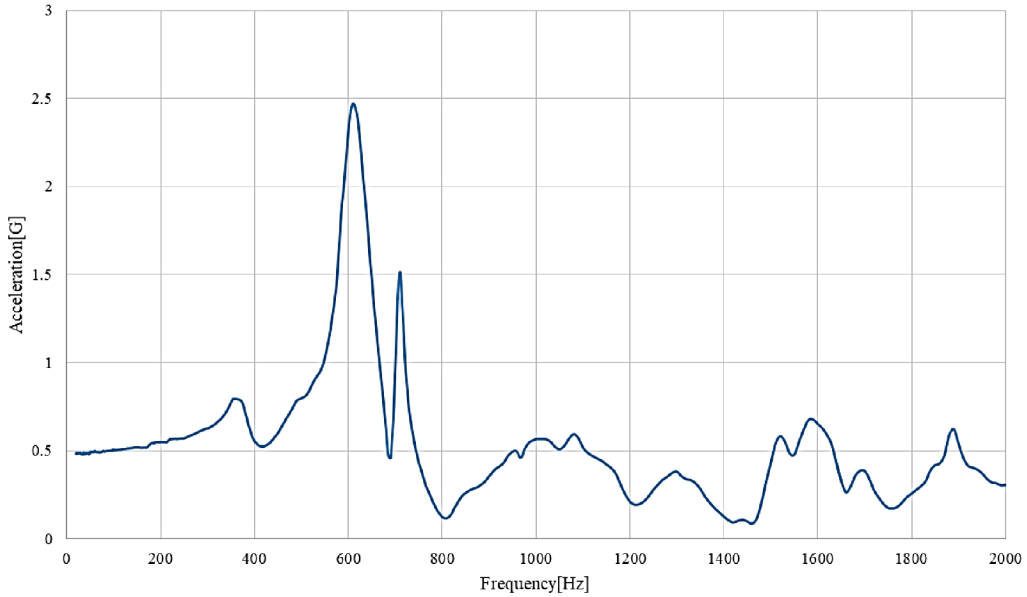


Figure 31 $X_B(Y_{sc})$軸再試験前

【Y_{SC}軸試験後】

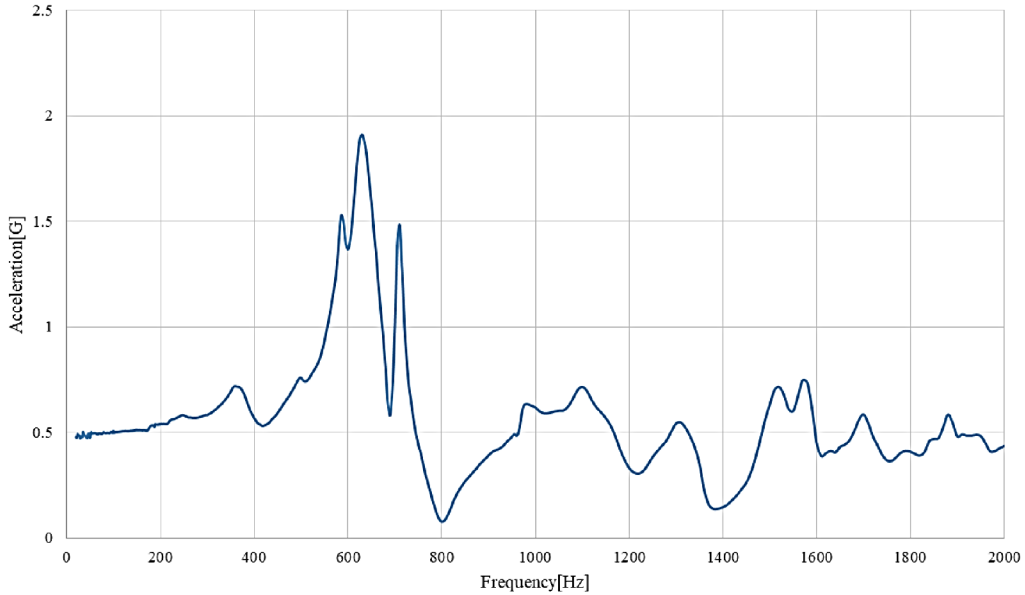


Figure 32 $X_B(Y_{sc})$軸再試験後

【X_{SC}軸試験前】

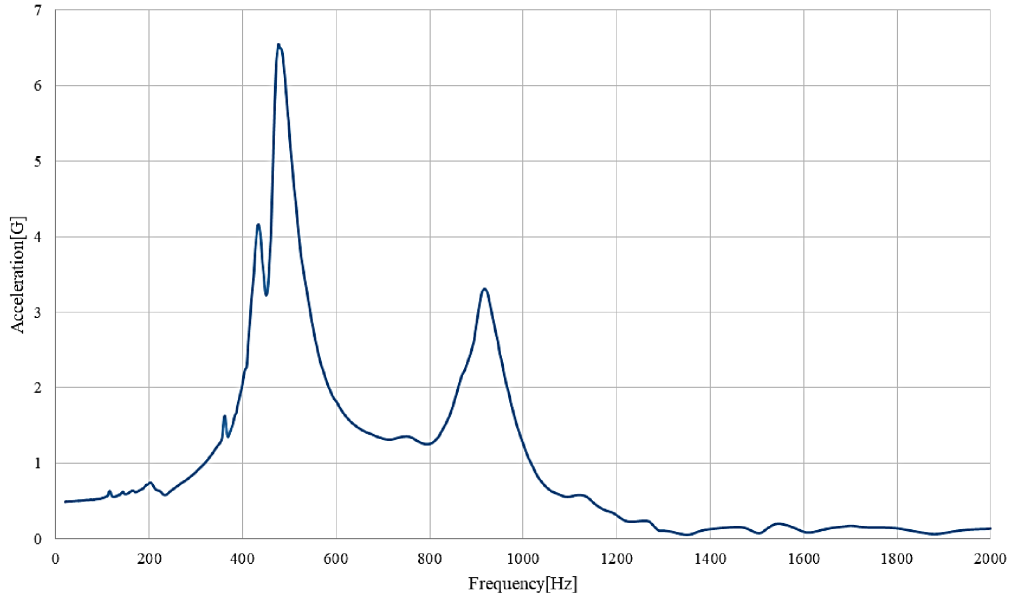


Figure 33 $Y_B(X_{sc})$軸再試験前

【X_{SC}軸試験後】

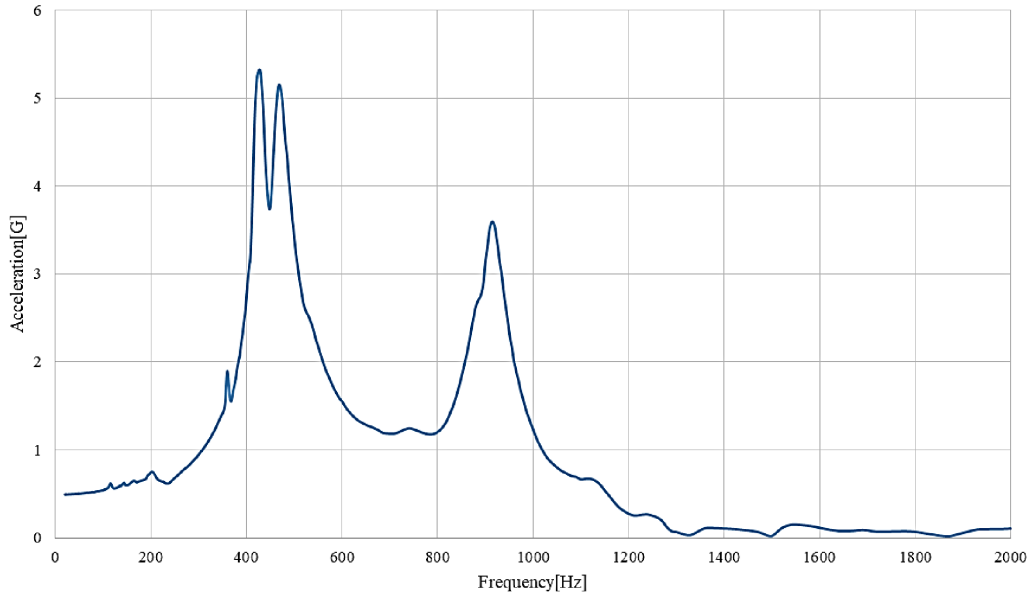


Figure 34 $Y_B(X_{sc})$軸再試験後

【Z_{sc}軸試験前】

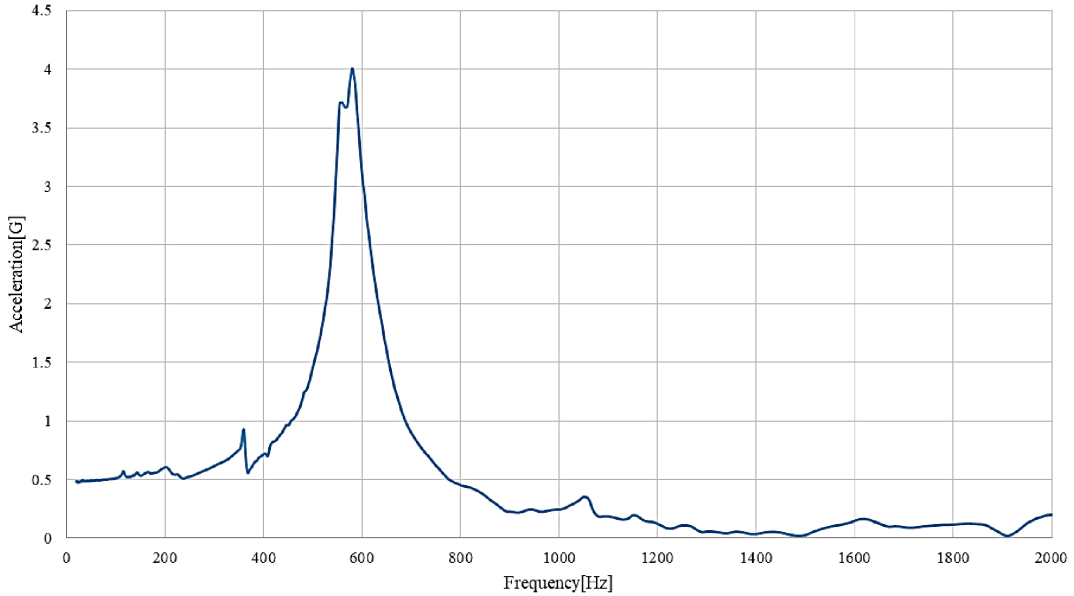


Figure 35 $Z_B(Z_{sc})$軸再試験前

【Z_{sc}軸試験後】

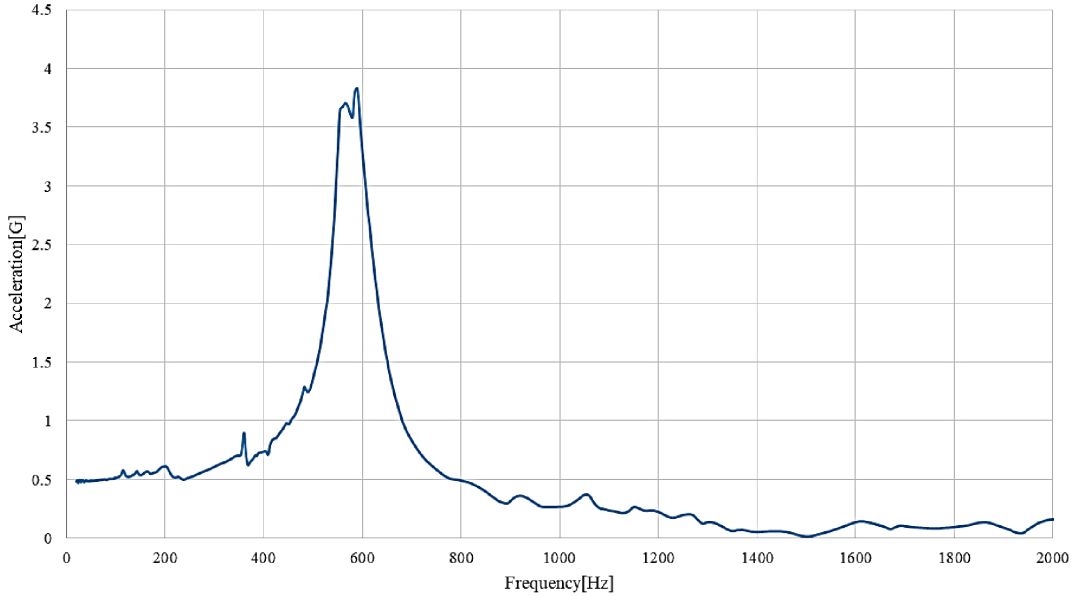


Figure 36 $Z_B(Z_{sc})$軸再試験後

Table 13 各試験共振振動数及び応答倍率

試験名	共振振動数[Hz]	応答倍率[-]
$X_B(Y_{sc})$軸試験前	540	12.98
$X_B(Y_{sc})$軸試験後	580	3.91
$Y_B(X_{sc})$軸試験前	530	5.75
$Y_B(X_{sc})$軸試験後	550	10.02
$Z_B(Z_{sc})$軸試験前	575	6.25
$Z_B(Z_{sc})$軸試験後	545	5.61

Table 14 共振振動数及び応答倍率(再試験)

試験名	共振振動数[Hz]	応答倍率[-]
$X_B(Y_{sc})$軸試験前	610	10.50
$X_B(Y_{sc})$軸試験後	630	7.56
$Y_B(X_{sc})$軸試験前	476	10.67
$Y_B(X_{sc})$軸試験後	468	5.56
$Z_B(Z_{sc})$軸試験前	580	9.34
$Z_B(Z_{sc})$軸試験後	590	8.43

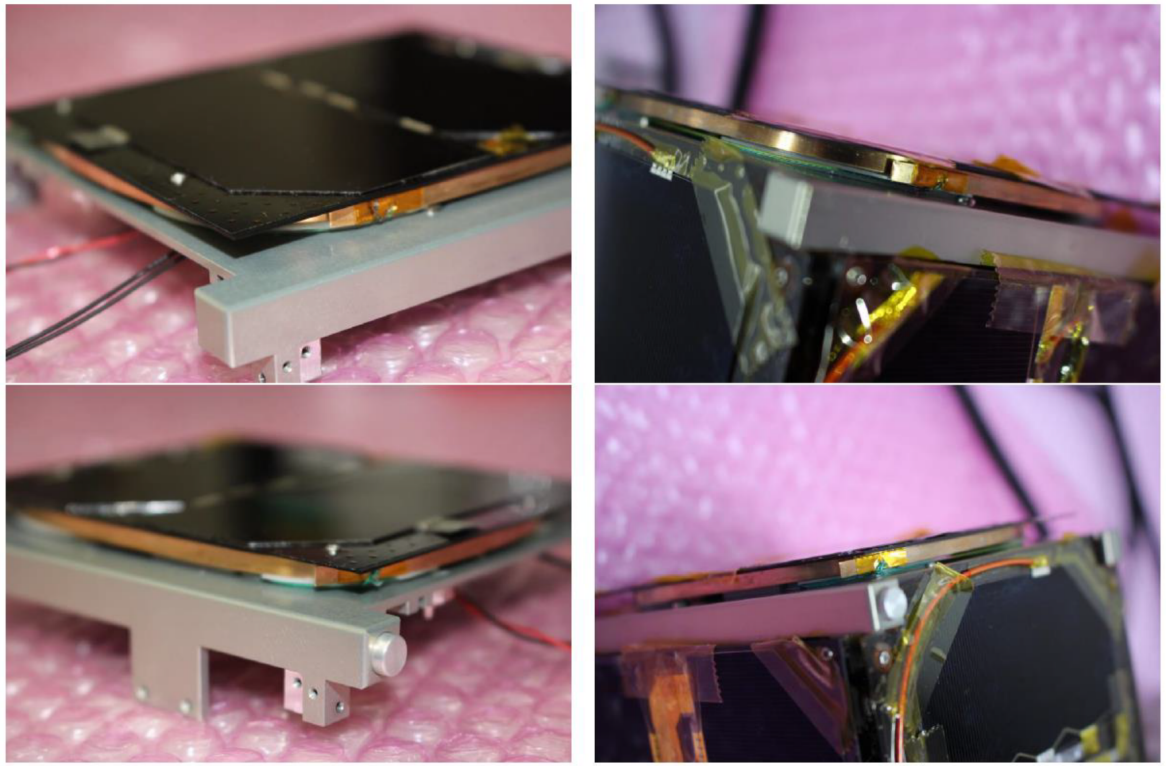


Figure 55 試験前後のダイニーマの様子

8.8. 分離検知スイッチの絶縁確認(検証項目⑦⑧)

試験後に，4.5 節のチャタリング検出器を用いて，分離検知スイッチの絶縁確認を行った．分離検知スイッチ 3 つをチャタリング検出器に接続した結果，LED は点灯しなかったため，分離検知スイッチは絶縁されていることが確認された．

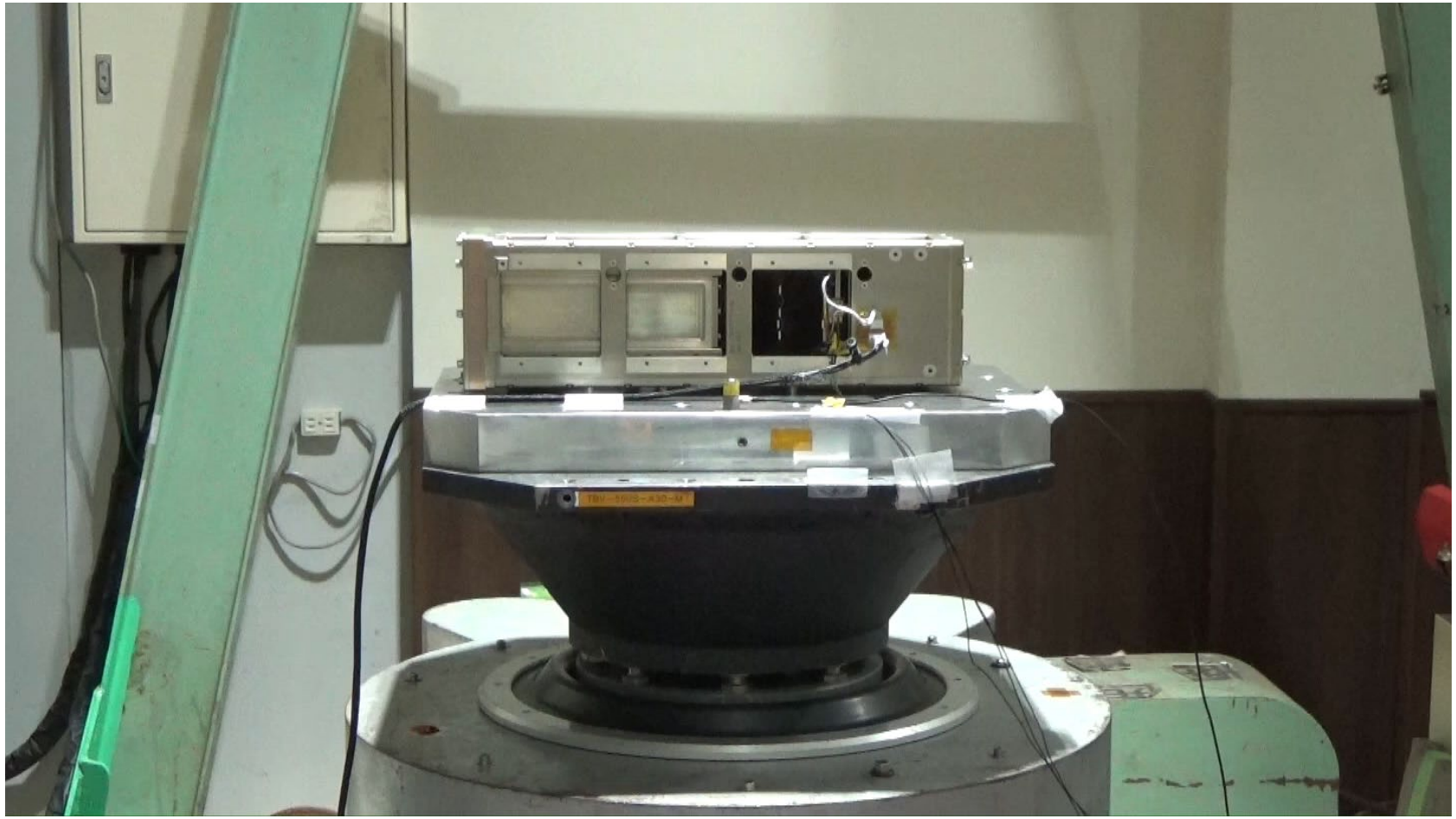
9. 結論

本試験より，以下の結論を得た．

1. 振動により，NEXUS FM に搭載している電子機器は故障しなかった．
2. 振動により，分離検知スイッチのチャタリングは発生しなかった．
3. 振動により，衛星構体の破壊は起きなかった．
4. 振動により，ダイニーマのほつれや断線は発生しなかった．
5. 振動により，分離検知スイッチは故障しなかった．

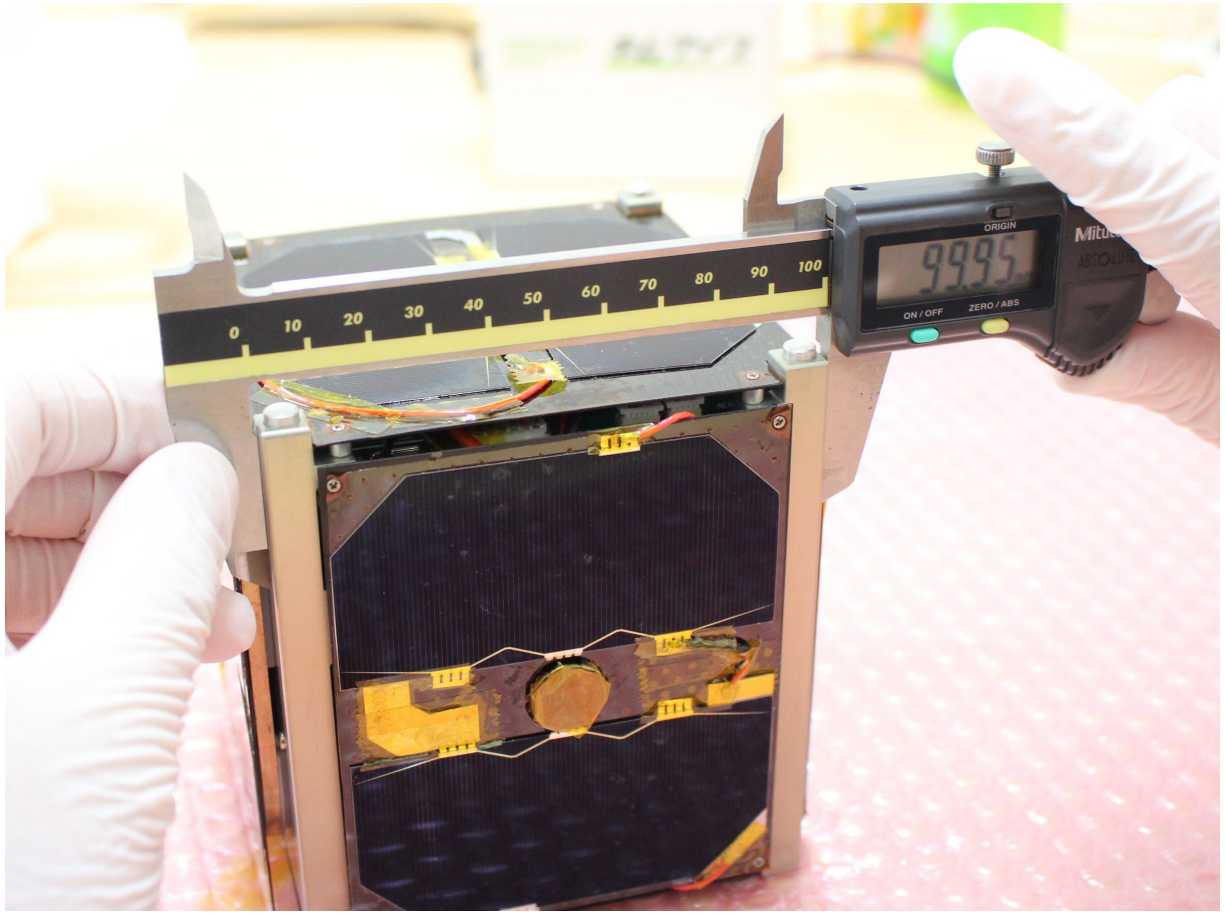
実際の振動試験

★加振機（振動試験機）を使って振動させて、加速度を計測

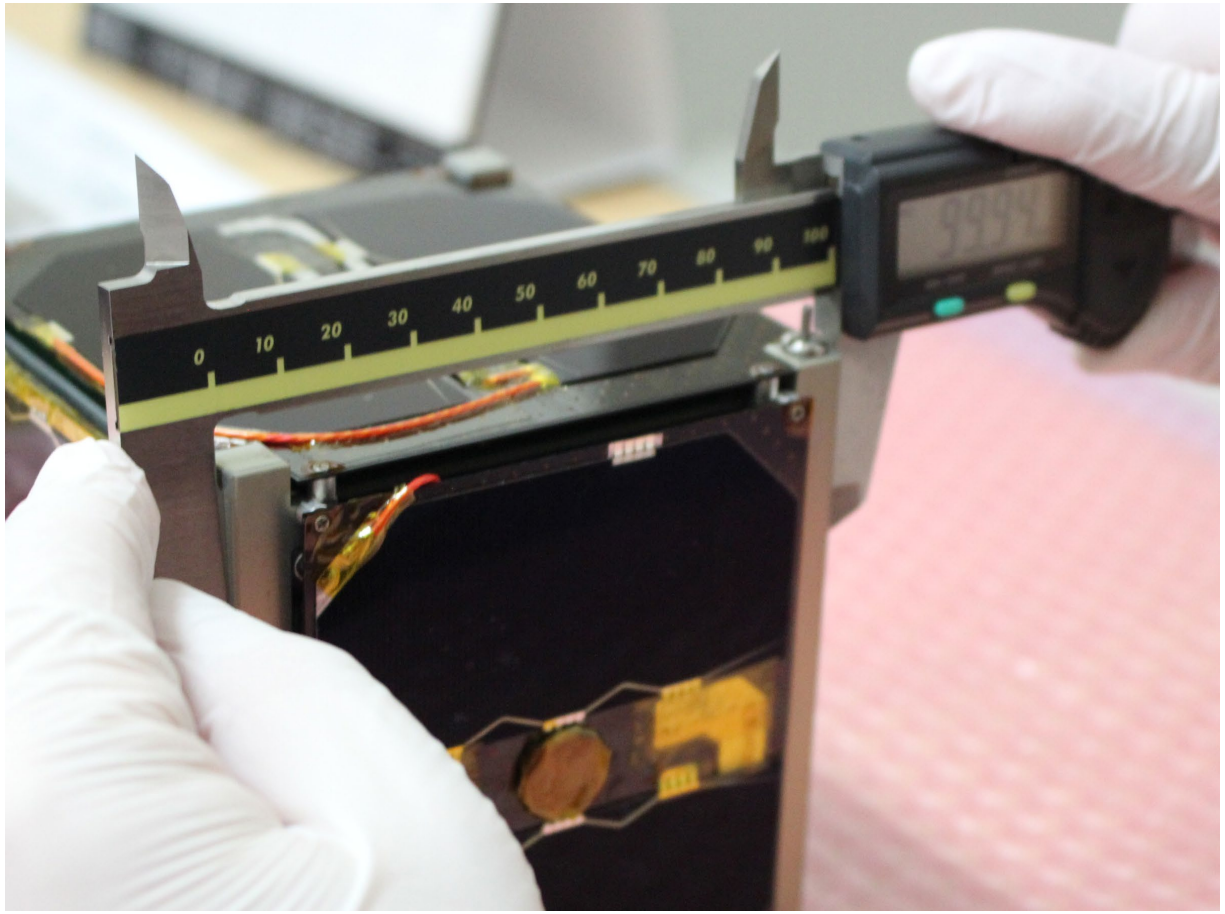


実際の振動試験

★試験後、問題がないかチェック



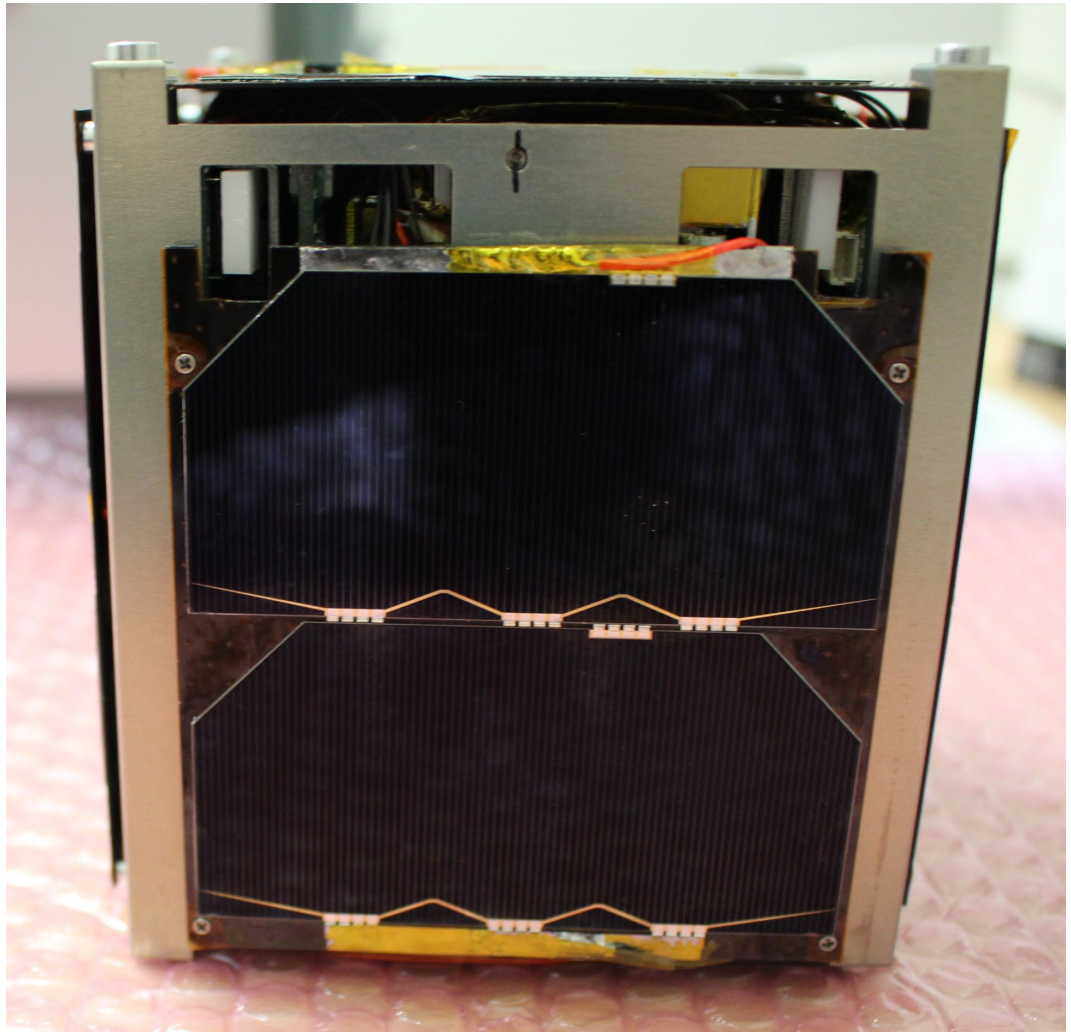
【試験前】



【試験後】

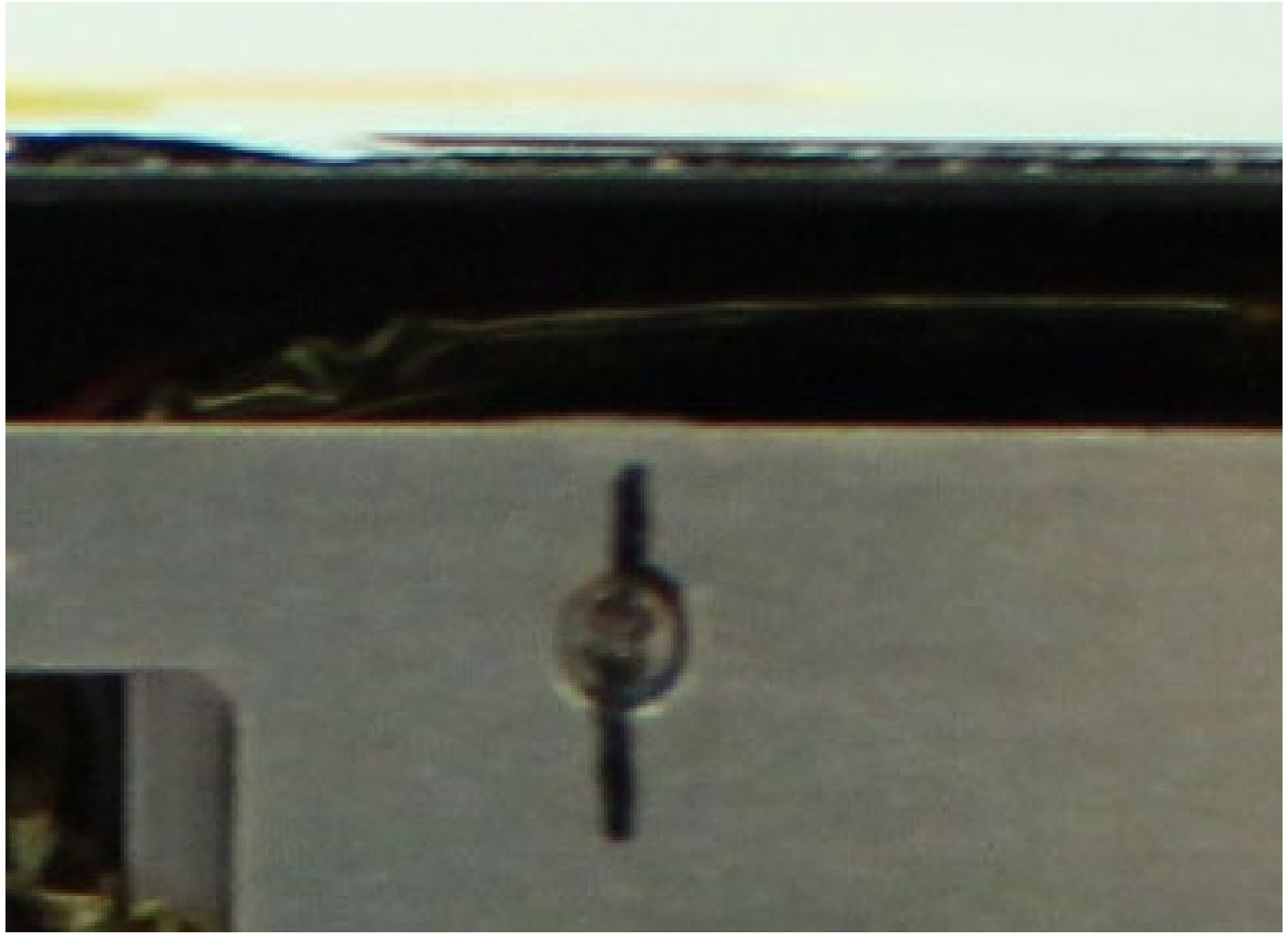
実際の振動試験

★試験後、問題がないかチェック



実際の振動試験

★試験後、問題がないかチェック



壊れなければそれでいいのか？

★設計通りに製造できているのか？

- 多くの宇宙機開発では、エンジニアリングモデル（EM）を製作し、試験を行って、設計値と符合するかを確認する。
- 符合していなければ、解析モデルを修正するか（コリレーションをとる）、EMを再製作する。
- その上で、フライトモデル（FM）を製作し、試験を行って、問題がないことを確認する。

壊れなければそれでいいのか？

★設計通りに製造できているのか？

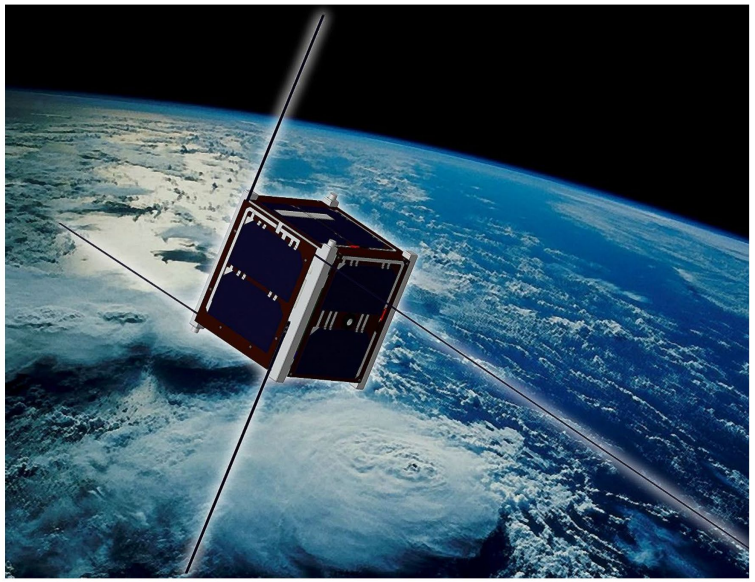
NEX-003-4

日本大学 NEXUS 開発プロジェクトチーム
Nihon University NEXUS Project Team
〒274-8501 千葉県船橋市習志野台 7-24-1 日本大学理工学部航空宇宙工学科

アマチュア通信技術実証衛星「NEXUS」

仕様書

文書コード：NEX-003-4 版：第 7 版	作成日：2020/04/30



https://stage.tksc.jaxa.jp/taurus/students/nexus/download/NEXUS_specification.pdf

第1章のまとめ

- 宇宙機の開発過程において、打ち上げ機の機械環境（加速度環境, 振動環境）に対する耐性があることを確認するため、振動試験を実施する。
- 振動試験では、打ち上げ機側から示される打ち上げ要求に応じて、例えば以下のような項目を検証する。
  - 固有振動数が要求値以上であること
  - 与えられた正弦波振動環境に対する耐性があり、かつ、試験前後にその強制振動特性が変化しないこと
  - 与えられたランダム振動環境に対する耐性があり、かつ、試験前後にその強制振動特性が変化しないこと
- 振動試験の前後で 構造上の不具合（破損やねじのゆるみ等）がないことを目視やトルクチェック等で 確認するとともに、動作試験を行うことで、打ち上げ機の機械環境に対する耐性があることを確認する。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第14回　振動に対する耐性の評価法

2025年7月14日(月)2限

第2章　正弦波振動試験

第2章の学修目標

★ 正弦波掃引の物理的意味について説明できる。

★ 正弦波振動試験の方法について説明できる。

★ 宇宙機開発過程において、宇宙機に正弦波振動試験を行う意義について説明できる。

「どの振動数で振動させても壊れない」ことを確認したいとき

★各振動数で同じ回数だけ振動させながら振動数を変えていけばよい

時刻tのときに振動数$f(t)$で振動させ、一定回数(n回)だけ振動したら、次は振動数$f(t)+df$でn回だけ振動させるとする。振動数$f(t)$でn回振動するのに要する時間をdtとすれば、

$$f(t+dt)=f(t)+df \tag{14.2.1}$$

ここで、$n=f(t)dt$であるので、

$$dt=\frac{n}{f(t)} \tag{14.2.2}$$

振動数を滑らかに変化させるとすると、nもdfも微小であるはず（そうでないと、無限に時間がかかってしまうことになる）。一般に、dtが微小なときには

$$f(t+dt)=f(t)+f'(t)dt \tag{14.2.3}$$

であるので、式(14.2.1)、(14.2.2)より、

$$f(t)+f'(t)\frac{n}{f(t)}=f(t)+df \tag{14.2.4}$$

となる。よって、

$$f'(t)=\frac{df}{n}f(t)\equiv Af(t) \tag{14.2.5}$$

となる。ただし、Aは、単位回数振動させるごとに増加させる振動数の量。したがって、式(14.2.5)より、

$$f=f_0e^{At} \tag{14.2.6}$$

つまり、指数関数的に振動数を変化させればよい！

例えば、時刻t_1のときの振動数がf_1、時刻$t_2=t_1+\Delta t$のときの振動数がf_2であるとすると、

$$f_1=f_0e^{At_1}\ ,\quad f_2=f_0e^{A(t_1+\Delta t)} \tag{14.2.7}$$

したがって、

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{f_0e^{A(t_1+\Delta t)}}{f_0e^{At_1}}=e^{A\Delta t} \tag{14.2.8}$$

つまり、いま現在、振動数が何Hzであるかに関わらず、「Δt後には、振動数を現在の一定倍にすればよい」。

「どの振動数で振動させても壊れない」ことを確認したいとき

★各振動数で同じ回数だけ振動させながら振動数を変えていけばよい

$$f = f_0 e^{At} \tag{14.2.6}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_0 e^{A(t_1+\Delta t)}}{f_0 e^{At_1}} = e^{A\Delta t} \tag{14.2.8}$$

つまり、いま現在、振動数が何Hzであるかに関わらず、「Δt 後には, 振動数を現在の一定倍にすればよい」。

実際の正弦波振動試験での要求は、例えば、

正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$ 4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min

「oct/min 」って何？

例えば、「m oct/min」とは、「1分後に振動数をmオクターブ上げる」という意味。これは、振動数(周波数)が、「1分後に2^m 倍になる」という意味。　これはまさに、式(14.2.8)が主張していること。実際、式(14.2.8)より

$$2^m = e^{A\times 60} \tag{14.2.9}$$

となるので、

$$e^A = 2^{\frac{m}{60}} \tag{14.2.10}$$

であり、式(14.2.6)より、

$$f = f_0 \left(2^{\frac{m}{60}}\right)^t = f_0 \left(2^{\frac{m}{60}t}\right) \tag{14.2.11}$$

「どの振動数で振動させても壊れない」ことを確認したいとき

★各振動数で同じ回数だけ振動させながら振動数を変えていけばよい

正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$　4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min

$$f = f_0\left(2^{\frac{m}{60}}\right)^t = f_0\left(2^{\frac{m}{60}t}\right) \tag{14.2.11}$$

【例題14.2.1】

加振振動数を22Hzから36Hzまで、 $4\mathrm{oct}/\mathrm{min}$ で変化させるとき、開始時から加振振動数が $36\,\mathrm{Hz}$ になるまでの時間を求めなさい。

【略解】式(14.2.11)において、

$$f_0 = 22\,, \quad m = 4 \tag{1}$$

であり、 振動させ始めてから $f = 36\,\mathrm{Hz}$ になるまでの時間は、

$$36 = 22 \times \left(2^{\frac{4}{60}t}\right) \tag{2}$$

であるので、

$$\frac{36}{22} = 2^{\frac{1}{15}t} \tag{3}$$

よって、

$$\log_{10}\left(\frac{36}{22}\right) = \log_{10} 2^{\frac{1}{15}t} = \frac{1}{15}t\log_{10}2 \tag{4}$$

したがって、

$$t = 15\frac{\log_{10}\left(\frac{36}{22}\right)}{\log_{10}2} = 10.6574\,\mathrm{sec} \tag{5}$$

このように 正弦波振動の振動数を変化させていくことを、一般に「正弦波掃引」(sine sweep)と呼ぶ。

ちなみに、通常は、 正弦波掃引は、up/downの両方(振動数を上げていく場合と下げていく場合の両方）を行う。downの場合は-4oct/minや-0.2oct/minで変化させることになる。

「どの振動数で振動させても壊れない」ことを確認したいとき

★各振動数で同じ回数だけ振動させながら振動数を変えていけばよい

正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$　4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min

$$f = f_0\left(2^{\frac{m}{60}}\right)^t = f_0\left(2^{\frac{m}{60}t}\right) \tag{14.2.11}$$

【例題14.2.2】

加振振動数を22Hzから36Hzまで、 $4\mathrm{oct}\,/\,\mathrm{min}$ で変化させるとき、 開始時から16秒後の加振振動数をを求めなさい。ただし、upとdownの間にインターバルを1秒おくこととする。

【略解】例題14.2.1の結果より、 upに10.6574秒かかり、インターバルが1秒 なので、 開始から16秒後は、down開始から、

$$t = 16 - 10.6574 - 1 = 4.3426 \tag{1}$$

である。down時の時間と加振振動数との関係は

$$f = 36 \times \left(2^{\frac{-4}{60}t}\right) \tag{2}$$

であるので、この式に式(1)を代入すると、 求めるべき加振振動数は、

$$f = 36 \times \left(2^{\frac{-4}{60}\times 4.3426}\right) \approx 29.45\,\mathrm{Hz} \tag{3}$$

試験結果の例

★この例では、試験条件が1次の固有振動数よりも低い振動数で設定されている

それゆえ、応答倍率はほぼ1

正弦波振動	22-36Hz : $1.0G_{0\text{-}p}$ 4oct/min 43-57Hz : $0.5G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min

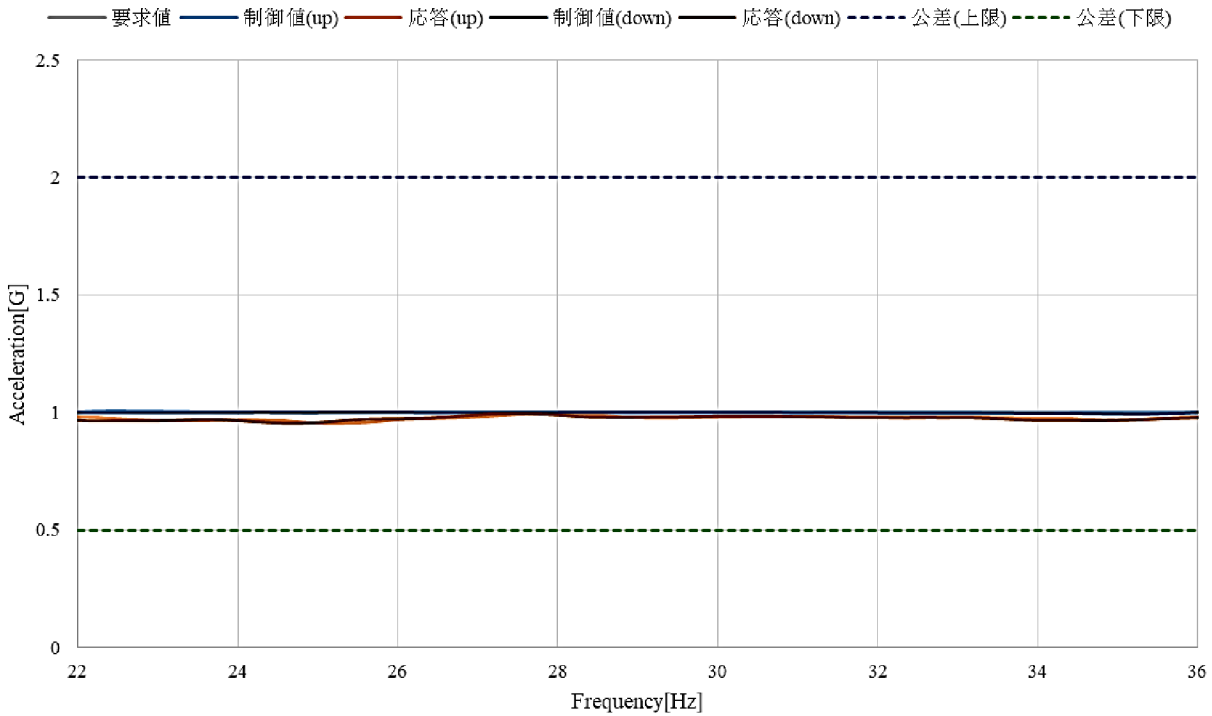
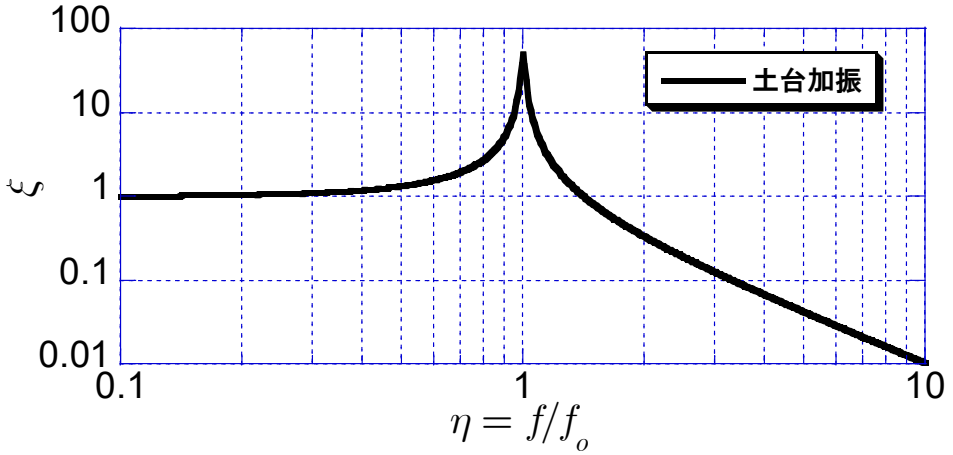
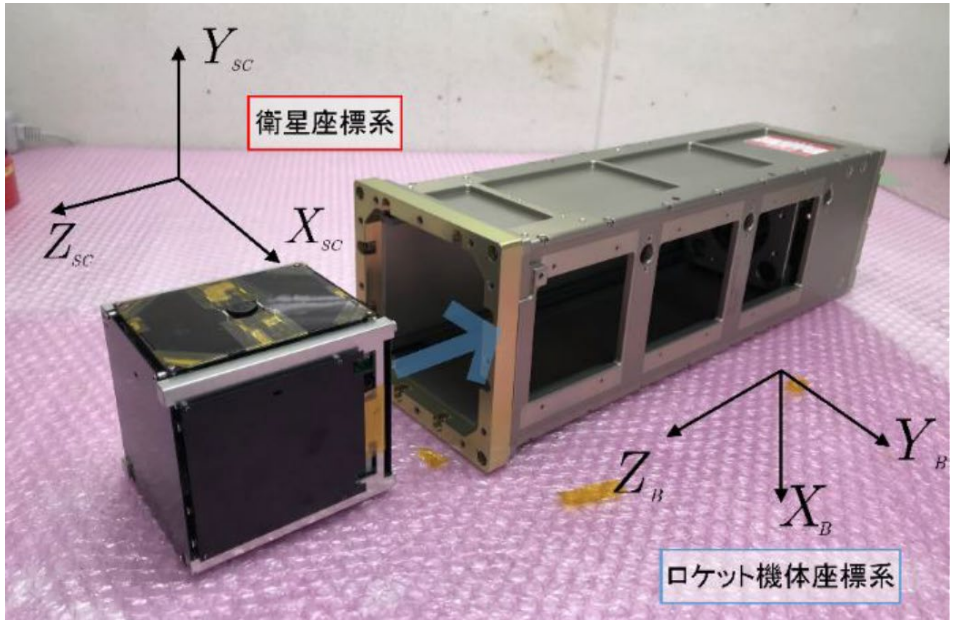


Figure 43 $X_B(Y_{sc})$軸，22-36Hz(再試験)





試験結果の例

★この例では、試験条件が1次の固有振動数よりも低い振動数で設定されている

それゆえ、応答倍率はほぼ1

正弦波振動	22-36Hz : 1.0$G_{0\text{-}p}$ 4oct/min 43-57Hz : 0.5$G_{0\text{-}p}$ 0.2oct/min

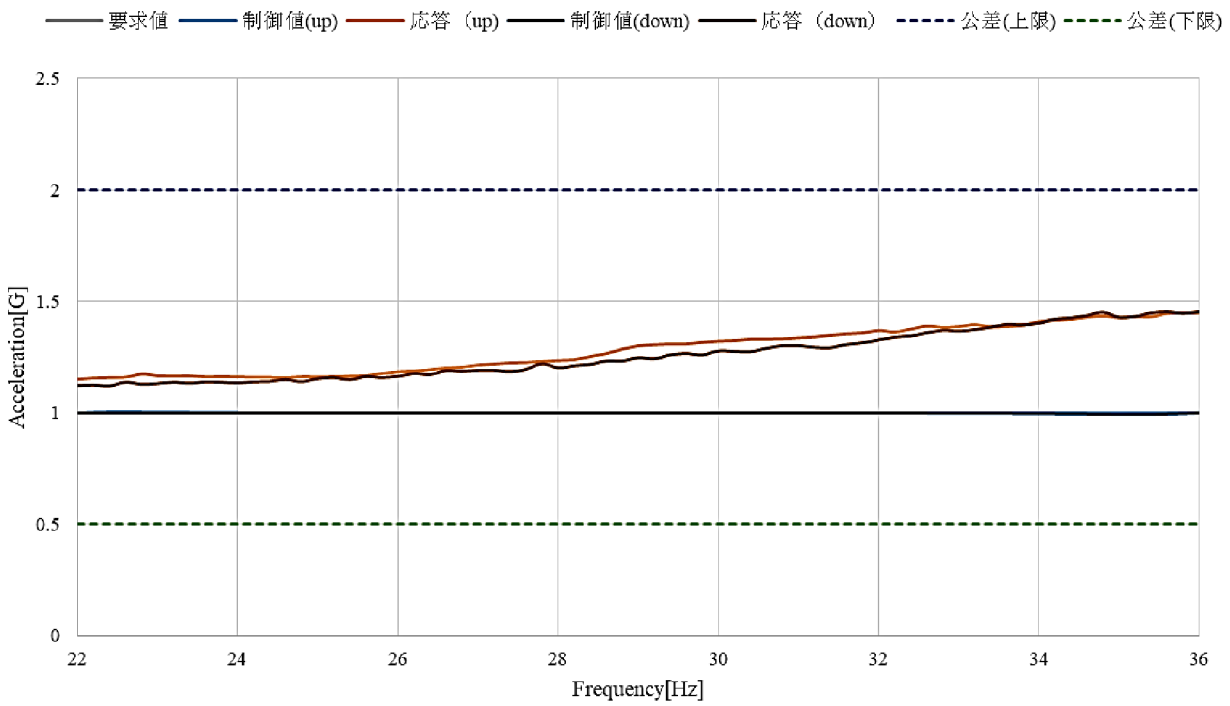
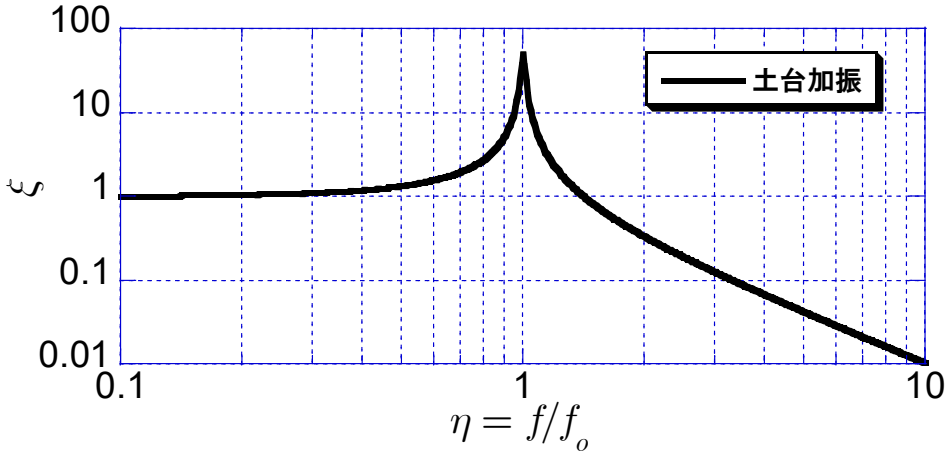
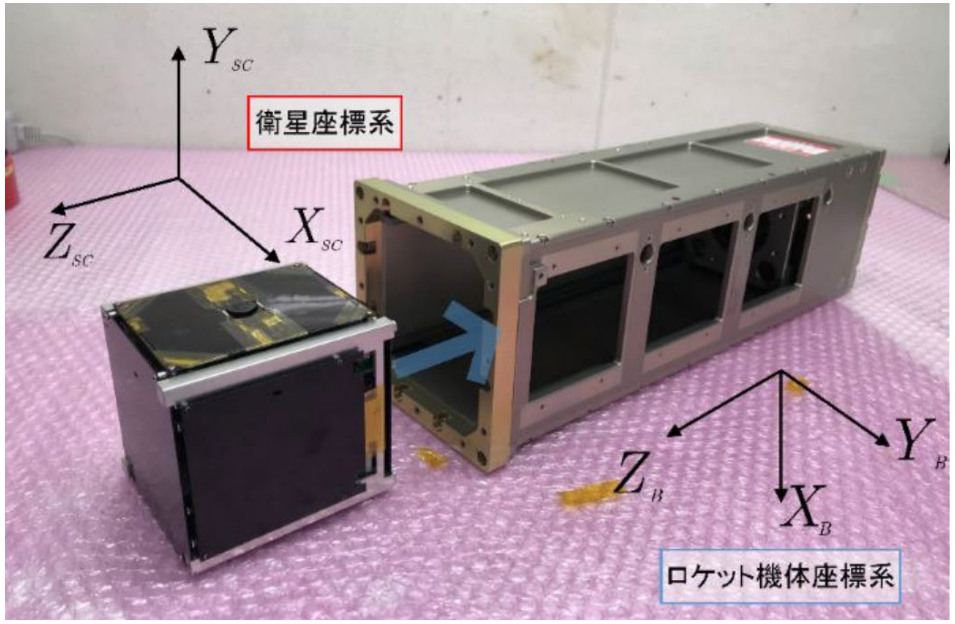


Figure 45 $Y_B(X_{sc})$軸，22-36Hz(再試験)





第2章のまとめ

- 一般に、幅広い振動数の範囲において、 それぞれの振動数で同じ回数だけ振動さたければ、一定時間後の振動数を現在の振動数の一定倍になるように、振動数を時間によって変化させていけばよい。
- その方法の1つとして、例えば「振動数を1分後にmオクターブ上げる(下げる)」というやり方がある。これは、「1分後に振動数が2^m倍になる」という意味である。
- 正弦波振動の振動数を変化させていくこと を、一般に「正弦波掃引」と呼ぶ。
- 一般的な正弦波振動試験(正弦波掃引試験)では、各振動数で振動する回数が等しくなるように振動数を変化させていく。その際、通常は、振動数を増加させた後、減少させて元に戻す方式(up/down方式)が採用される。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月14日(月)2限

第14回　振動に対する耐性の評価法

第3章　ランダム振動試験

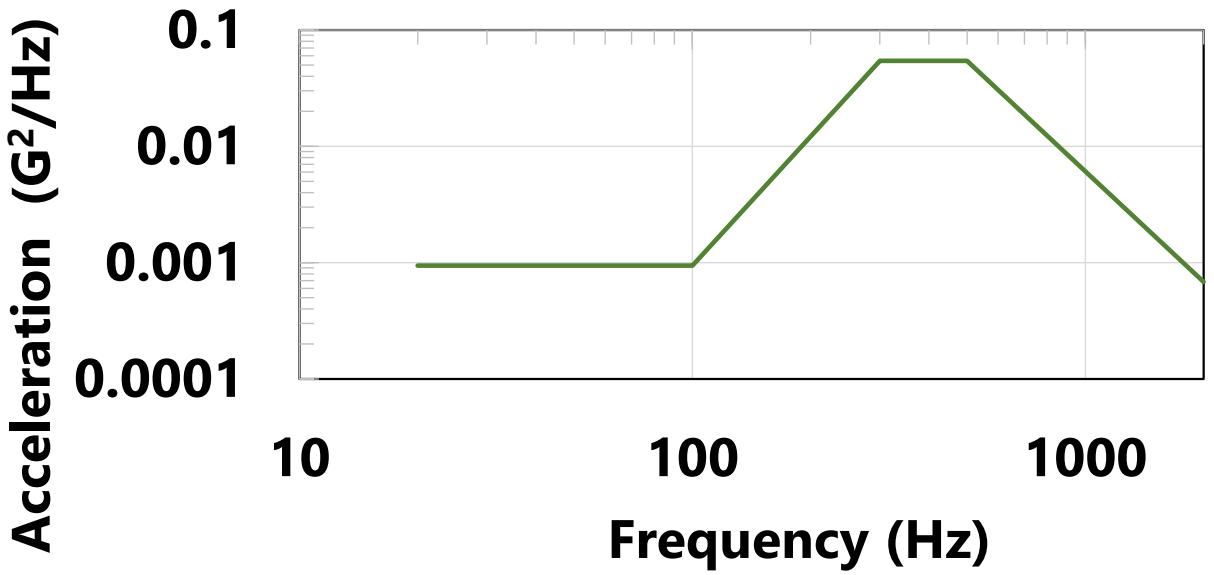
第3章の学修目標

★ 一般的なランダム振動試験の方法について説明できる。

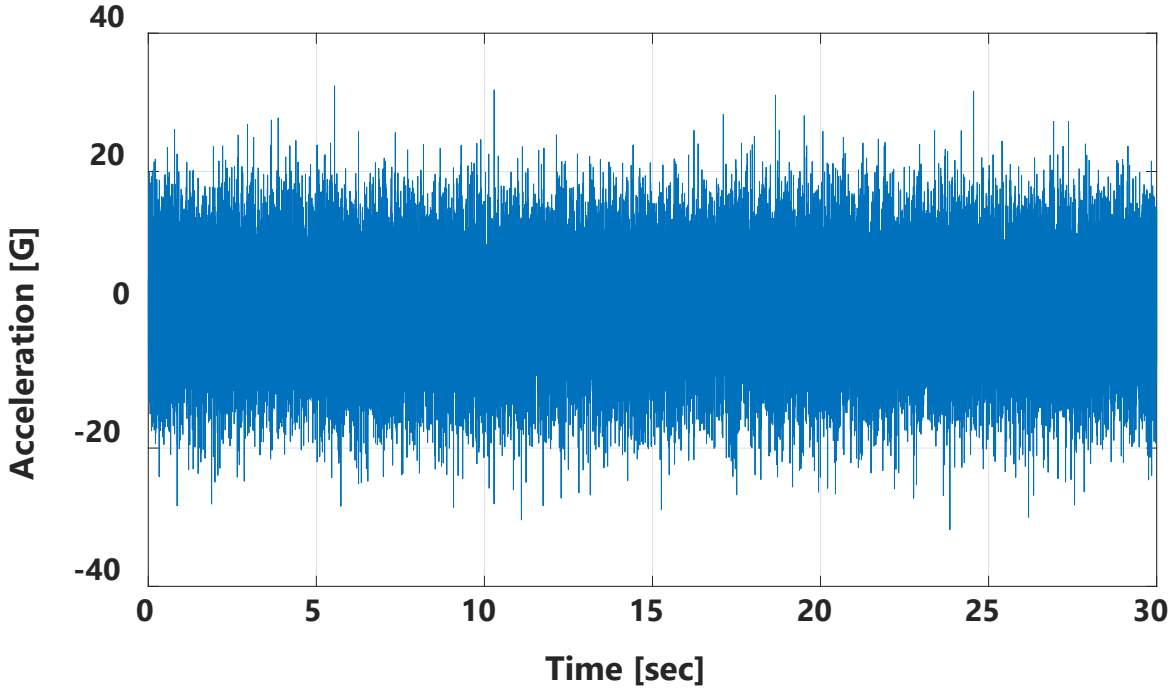
ランダム振動試験

★与えられたPSDプロファイルになるランダム振動を与えて耐性を確認する試験

ランダム振動	20 – 100 Hz : 0.000944 G²/Hz 100 – 300 Hz : (11.098 dB/oct) 300 – 500 Hz : 0.0542 G²/Hz 500 – 2000 Hz : -9.5 dB/oct (30秒間)

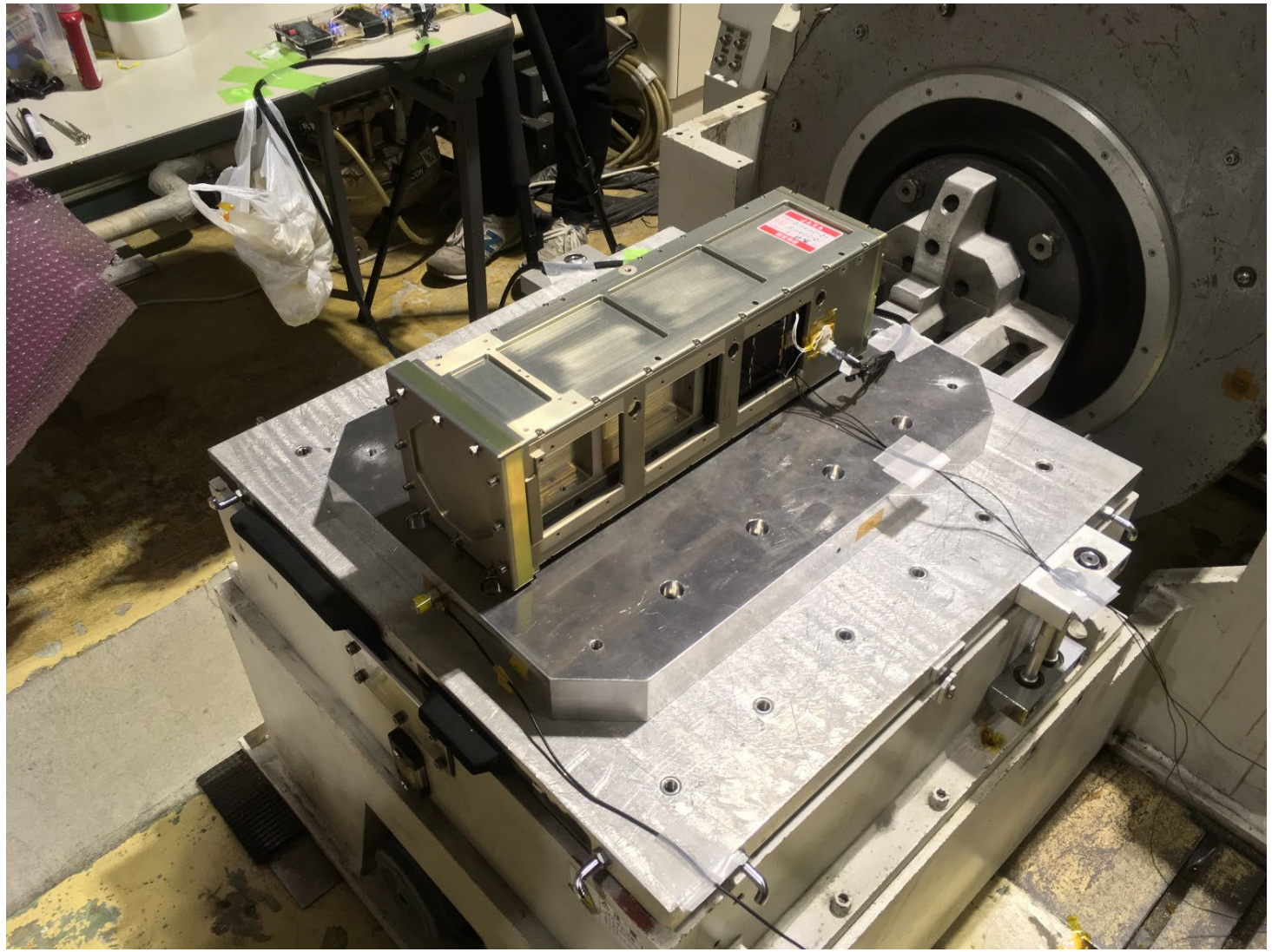


$$\begin{cases} \ddot{y} = \sum_{n=1}^{M} \sqrt{2\ddot{S}_n \Delta\tilde{f}} \cos\left(2\pi f_n t + \delta_n\right) \\ f_n \equiv n\Delta\tilde{f} \quad , \quad \ddot{S}_n^{base} \equiv \ddot{S}^{base}(f_n) \end{cases} \tag{13.1.3}$$



ランダム振動試験の例

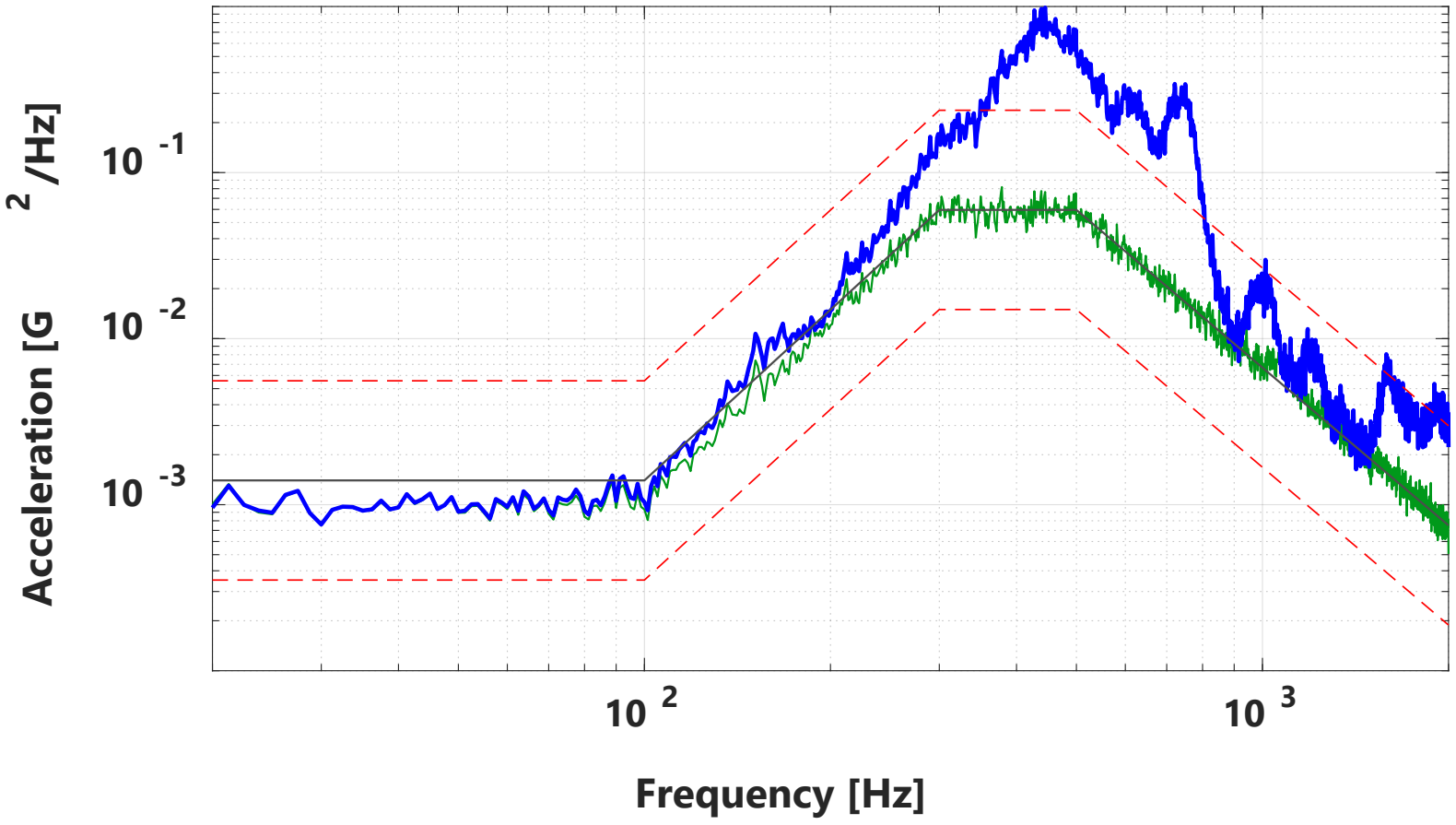
★NEXUS+ダミー+PODを長手方向(衛星放出方向)に加振した例



ランダム振動試験の例

★NEXUS+ダミー+PODを長手方向(衛星放出方向)に加振した例

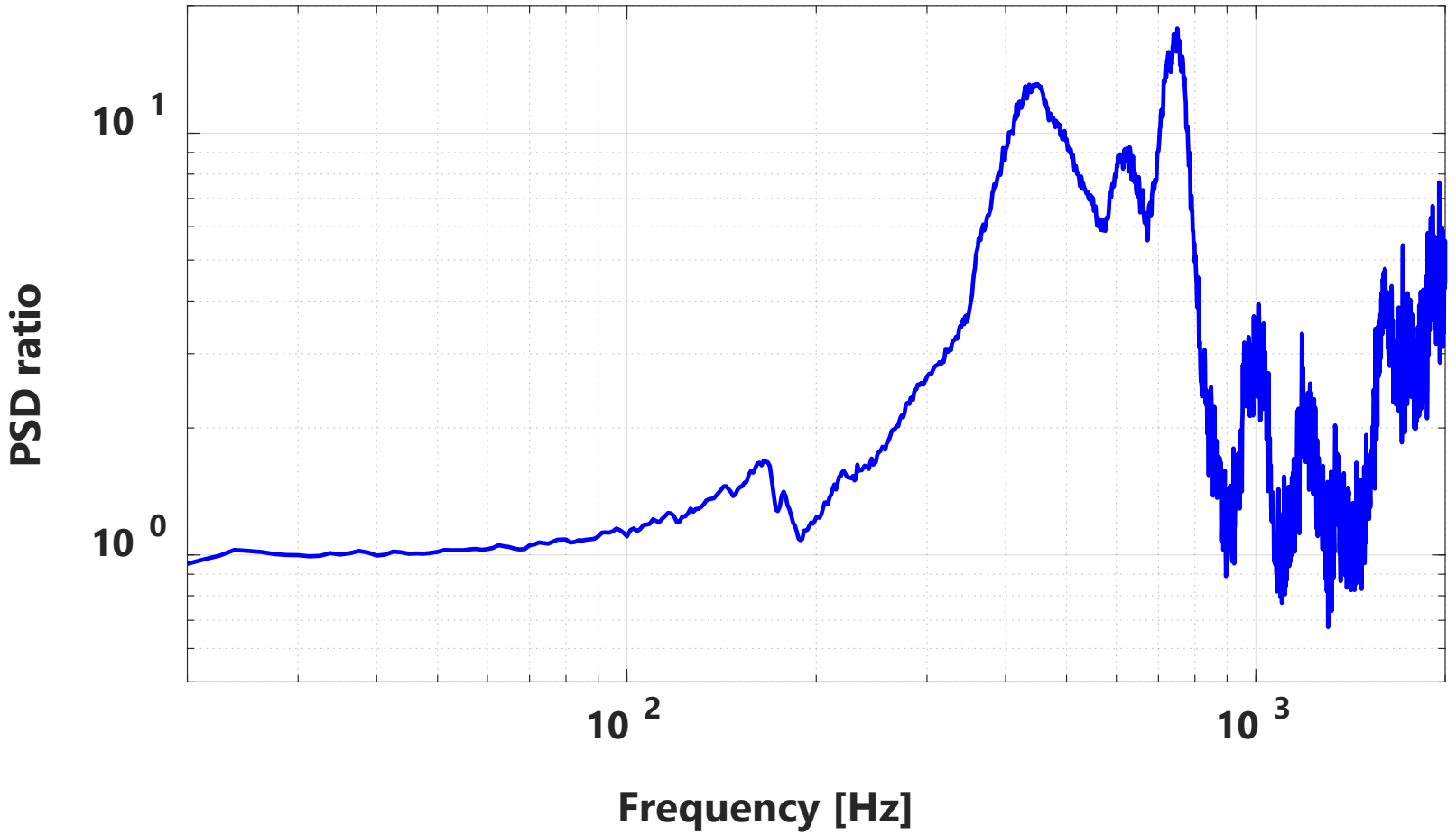
グレー：土台の目標値　赤：土台の目標値＋6dB
緑　　：土台の実測値　青：衛星の実測値



$$
\begin{cases}
+6\mathrm{dB} : 10^{\frac{6}{10}} \\
\quad = 3.981\text{倍} \\
-6\mathrm{dB} : 10^{\frac{-6}{10}} \\
\quad = \dfrac{1}{3.981}\text{倍} \\
\quad = 0.2512\text{倍}
\end{cases}
$$

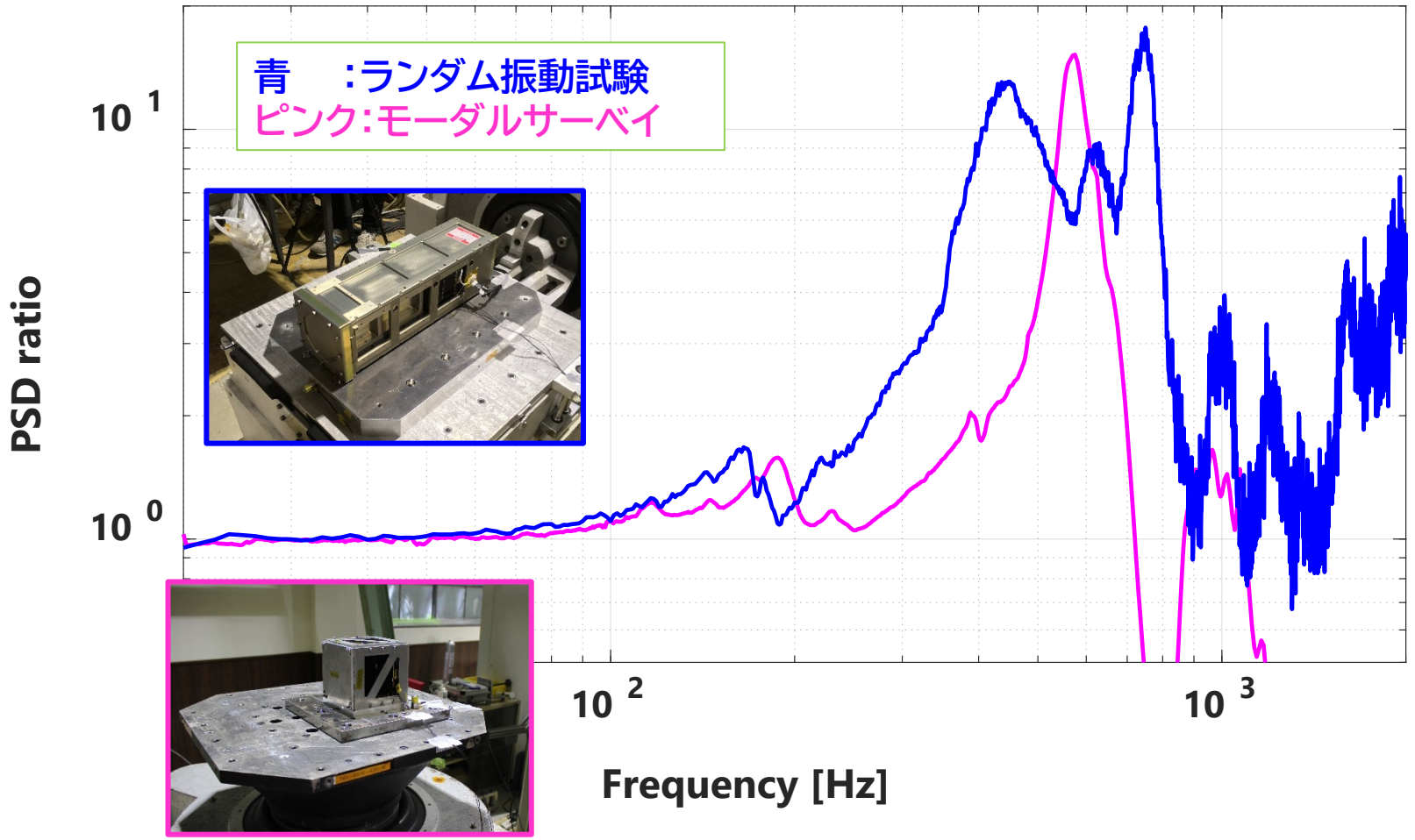
ランダム振動試験の例

★NEXUS+ダミー+PODを長手方向(衛星放出方向)に加振した例:土台と衛星のPSD比



ランダム振動試験の例

★NEXUS+ダミー+PODを長手方向(衛星放出方向)に加振した例:土台と衛星のPSD比



第3章のまとめ

- 与えられたPSDプロファイルにしたがって生成したランダム振動を 供試体の土台に与えて、 その振動に耐えられることを確認するのがランダム振動試験である。
- 一般的には、ランダム振動試験は3軸それぞれに対して実施する。また、その際、試験前後にモーダルサーベイを行い、強制振動特性（共振振動数や応答倍率等）に変化が見られないことも確認する。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月14日(月)2限

第14回　振動に対する耐性の評価法

第4章　サインバースト試験

第4章の学修目標

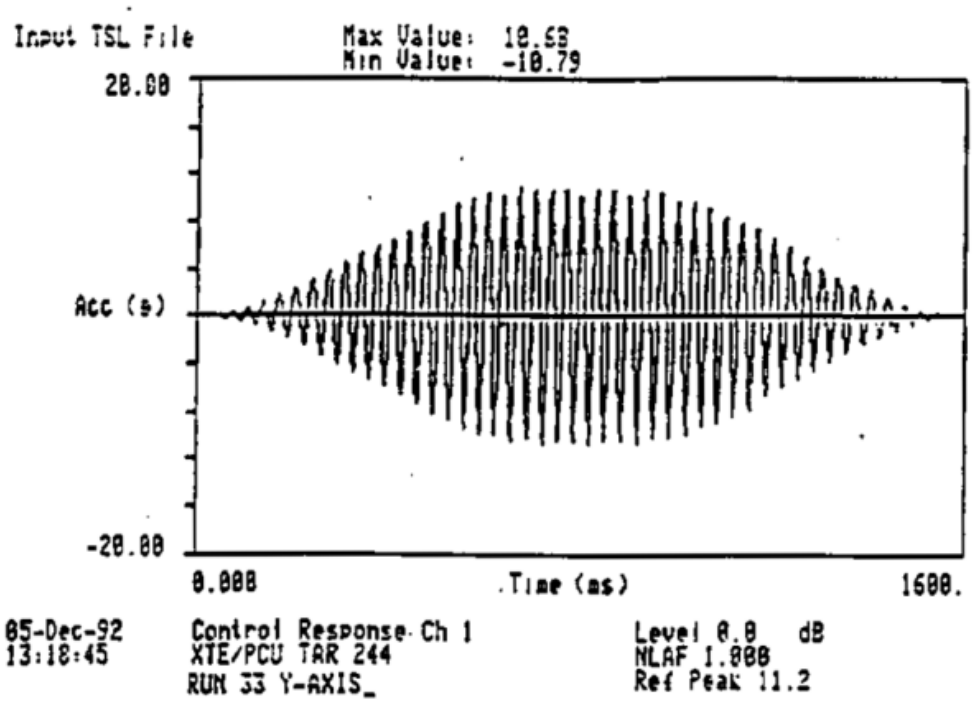
★ サインバースト試験について説明できる。

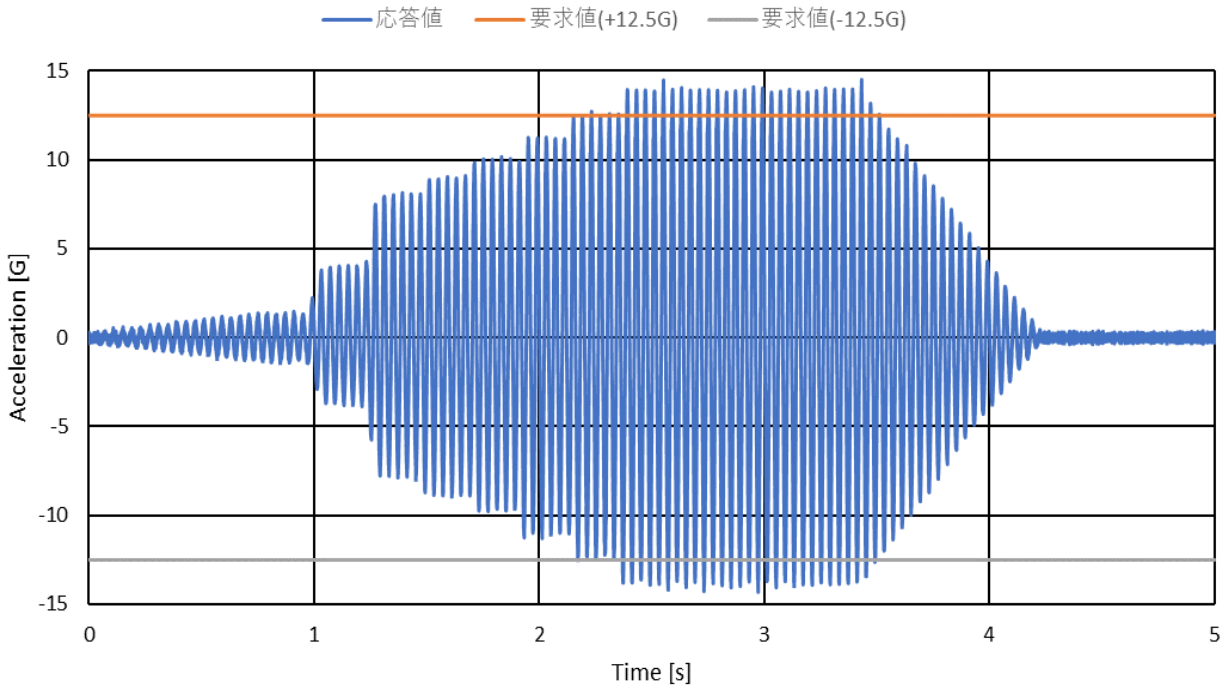
サインバースト試験

★準静的加速度環境を模擬した“振動”を与える試験

準静的加速度 機軸方向10G, 直交方向1G

NASA PT－TE－1420 "*Sine－Burst Load Test*" によれば、下図のような振動を与えることで、準静的荷重を与えたときと 同等の効果を供試体に与えることができる。



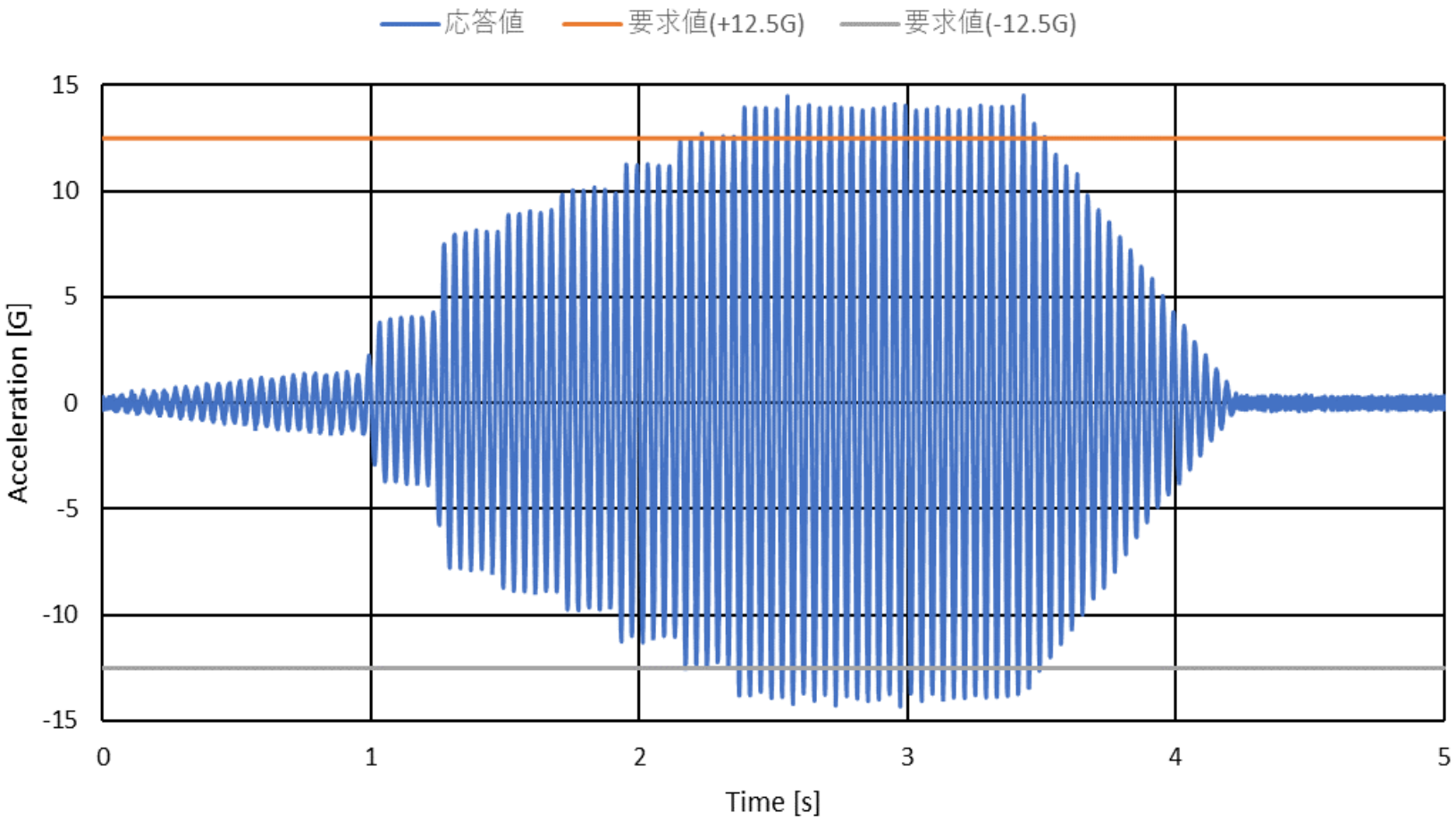


サインバースト試験

★準静的加速度環境を模擬した“振動”を与える試験

準静的加速度 機軸方向10G, 直交方向1G

何Hzで振動させればいい？



第4章のまとめ

- 正弦波振動のプロファイルを工夫することで、 供試体に対して準静的加速度と同等の負荷を与えることが可能である。
- そのような振動プロファイルを供試体に与えて、 耐性があることを検証するのがサインバースト試験である。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―
第14回　振動に対する耐性の評価法

2025年7月14日(月)2限

課題

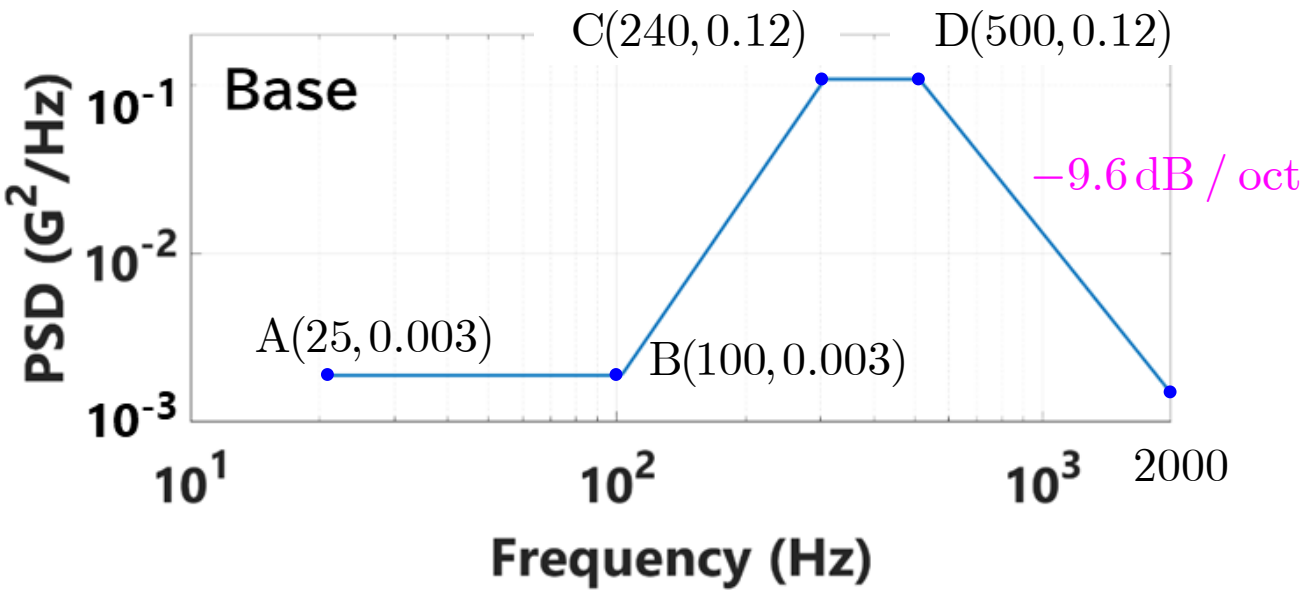
2025年7月20日(日)18時00分締切

[1] 正弦波掃引試験の条件が「25-70Hz, 0.9$G_{0\text{-}p}$, 2.5oct/min」と与えられているとき、upとdownの両方をやるとして、試験時間は何秒になるか？ただし、upとdownの間に1秒のインターバルを入れることとする。（3点）

[2] 問題[1]において、試験開始時から45秒後の加振振動数を求めなさい。（2点）

自由課題

[3] 下図のようなPSDプロファイルで土台をランダム振動させる場合のRRSを$3000\,\mathrm{Hz}$まで描きなさい。 ただし、振動数増分幅は$\Delta\tilde{f} = 0.5\,\mathrm{Hz}$、Q値は$Q = 20$としなさい。（5点）



振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第14回　振動に対する耐性の評価法

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp

第15回の学修目標

★ 衝撃の数学的表現について説明できる。

★ 衝撃応答の計算法について説明できる。

★ SRSについて説明できる。

★ CubeSatの衝撃試験について説明できる。

★ 衝撃試験におけるSRSの利用法について説明できる。

第15回の全体構成

第1章　衝撃を受ける物体の過渡応答

第2章　SRS（Shock Response Spectrum）とその計算法

第3章　CubeSatの衝撃試験とSRS

（これまでの振り返り）

感想、課題

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月21日(月)2限

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

第1章　衝撃を受ける物体の過渡応答

第1章の学修目標

★ 衝撃の数学的表現について説明できる。

★ 衝撃応答の直接計算法 およびモード法による計算法について説明できる。

衝撃とは

★デルタ関数で表現できる

衝撃荷重を時間の関数として、$\tilde{Q}(t)$とおくと、$\tilde{Q}(t)$の単位はNであり、$\tilde{Q}(t)$は、デルタ関数を$\delta(t)$として、

$$\tilde{Q}(t) = P\delta(t) \tag{15.1.1}$$

と表現できる。

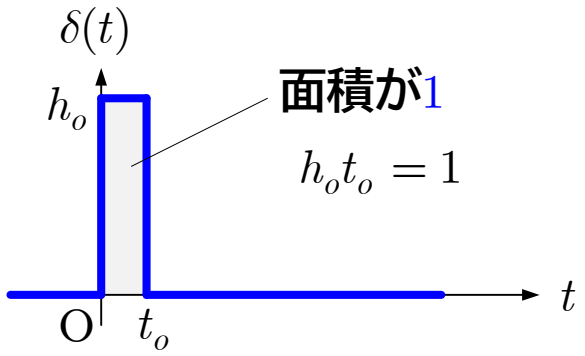
★デルタ関数とは

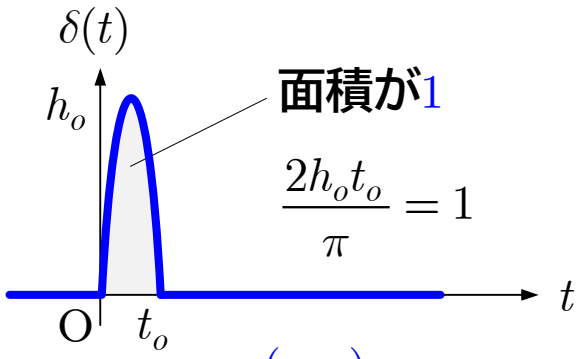
下図のように、面積が1で、時間幅が

$$t_o \to 0 \tag{15.1.2}$$

となるものをデルタ関数と呼ぶ。つまり、この条件を満たすものは全て、デルタ関数と呼ばれる。また、明らかにどの場合でも、デルタ関数の高さは無限大になる。

$$h_o \to \infty \tag{15.1.3}$$





$$\delta(t) = h_o \sin\left(\frac{\pi}{t_o} t\right)$$

面積が1であるので、デルタ関数を時間領域で定義すると、デルタ関数の単位は$1/s$。したがって、式(15.1.1)において、Pの単位はNs、つまり、力積と同じ単位。

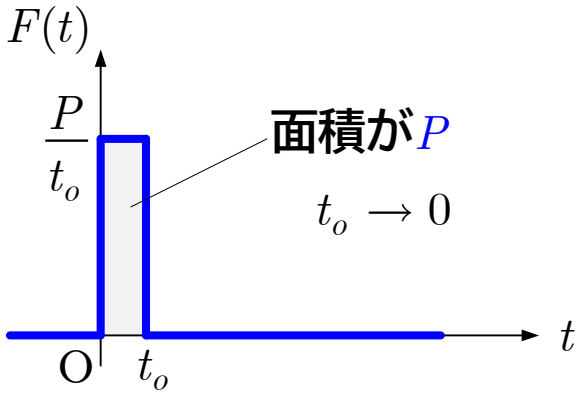
衝撃とは

★力積は有限

実際、この衝撃による力積は

$$\int_0^{t_o} P\delta(t)dt = P\int_0^{t_o} \delta(t)dt = P \qquad (15.1.4)$$

とって、P が力積を表している　（逆に言えば、P の値がわからないと、衝撃を数式で与えることができない）。

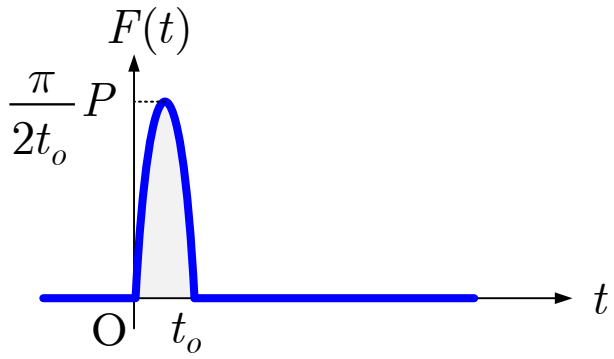


【例題15.1.1】

質量 m の質点が速度 v_o で等速直線運動をしている。いま、

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \dfrac{\pi}{2t_o} P \sin\left(\dfrac{\pi}{t_o} t\right) & (0 \le t \le t_o) \\ 0 & (t_o < t) \end{cases} \qquad (1)$$

なる荷重を作用させた。 このとき、質点に与えられる力積を求めなさい。 また、荷重を作用中、および、作用後の質点の位置 x と速度 v を時間 t の関数として求めなさい。ただし、$t = 0$ のとき、$x = 0$ である。



衝撃とは

★力積は有限

【略解】質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = F \tag{2}$$

これに式(15.1.5)を代入すると、荷重が作用中は

$$m\ddot{x} = \frac{\pi}{2t_o} P \sin\left(\frac{\pi}{t_o} t\right) \tag{3}$$

この微分方程式を解くと、

$$x = C_1 + C_2 t - \frac{t_o}{2\pi m} P \sin\left(\frac{\pi}{t_o} t\right) \tag{4}$$

問題文より、初期条件は

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_o \tag{5}$$

であるので、式(3)より、

$$C_1 = 0 \quad , \quad C_2 - \frac{1}{2m} P = v_o \tag{6}$$

したがって、荷重が作用している間の位置xと速度vは、

$$x = \left(v_o + \frac{1}{2m} P\right) t - \frac{t_o}{2\pi m} P \sin\left(\frac{\pi}{t_o} t\right) \tag{7}$$

$$v = v_o + \frac{1}{2m} P - \frac{1}{2m} P \cos\left(\frac{\pi}{t_o} t\right) \tag{8}$$

となる。よって、荷重が作用しなくなる$t = t_o$では、

$$x = \left(v_o + \frac{1}{2m} P\right) t_o \tag{9}$$

$$v = v_o + \frac{1}{2m} P + \frac{1}{2m} P = v_o + \frac{P}{m} \tag{10}$$

となるので、荷重が作用した後は、

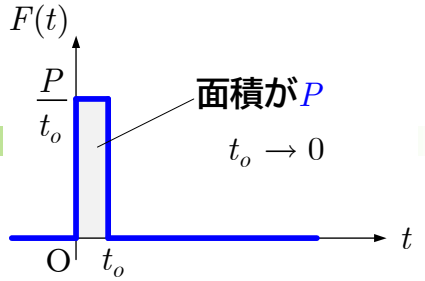
$$x = \left(v_o + \frac{1}{2m} P\right) t_o + \left(v_o + \frac{P}{m}\right)(t - t_o) \tag{11}$$

$$v = v_o + \frac{P}{m} \tag{12}$$

※ ちなみに、$t_o \to 0$のときには、

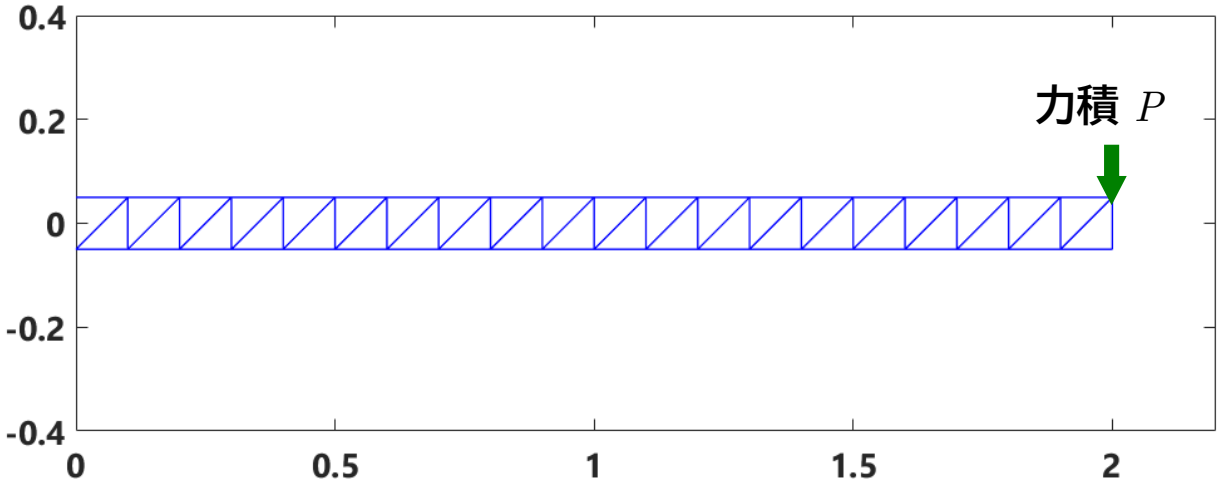
$$x = 0 \quad , \quad v = v_o + \frac{P}{m} \tag{15.1.5}$$

衝撃応答(インパルス応答)の解法



★結局のところ, 初速度を与えるだけ

第9回の付録に記載した通り、衝撃(impulse)を与えたときの応答とは、初速度が与えられたときの応答(特別なことは何もない)。



解き方は主に以下の2つ。

1. Runge-Kutta法など、 微分方程式を直接解く方法で解く。
2. モード法で解く。

もし、モード法で解くとしたら、

① 衝撃を受ける直前の位置ベクトルを$\boldsymbol{x}_o$、速度ベクトルを$\boldsymbol{v}_o$とすれば、力積ベクトルが$\boldsymbol{P}$である衝撃を受けた直後の速度の初期値は

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_o \quad , \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P} \qquad (15.1.6)$$

② そして、モード座標およびモード速度の初期値は、正規化された固有振動モードベクトル$\boldsymbol{\phi}_i$と 質量マトリクス$\boldsymbol{M}$を用いて次式で求められる。

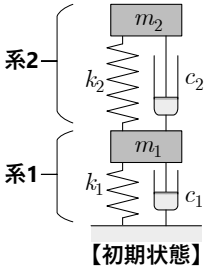
$$w_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) \, , \quad \dot{w}_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) \quad (15.1.7)$$

③ したがって、モード座標およびモード速度の時間変化は、状態遷移行列$\boldsymbol{B}$を用いて、次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} w_i(t) \\ \dot{w}_i(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(t) \begin{bmatrix} w_i(0) \\ \dot{w}_i(0) \end{bmatrix} \qquad (15.1.8)$$

ただし、i次モードの固有角振動数をΩ_i、減衰比をζ_iとして、第2回第4章の式$(2.4.14)$より、$\boldsymbol{B}(t)$は次式で計算できる。

衝撃応答(インパルス応答)の解法



★結局のところ，初速度を与えるだけ

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv e^{-\zeta_i \Omega_i t} \cos\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\Omega_i t\right) \\ x_2(t) \equiv e^{-\zeta_i \Omega_i t} \dfrac{\sin\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\Omega_i t\right)}{\sqrt{1-{\zeta_i}^2}} \\ \boldsymbol{B}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t)+\zeta x_2(t) & \dfrac{1}{\Omega_i}x_2(t) \\ -\Omega_i x_2(t) & x_1(t)-\zeta x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{15.1.9}$$

④ $w_i(t)$が求まったら、次式で時々刻々の位置ベクトルを求めることができる。

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\boldsymbol{\phi}_i \tag{15.1.10}$$

【例題15.1.1】質量が$10\mathrm{kg}$　、固有振動数が$200\mathrm{Hz}$のバネ・マス・ダンパー系に、質量が$0.1\mathrm{kg}$で固有振動数が$100\mathrm{Hz}$のバネ・マス・ダンパー系を取り付けた。この2自由度系の固有振動数は、第10回第3章で求めた通り、

$$\begin{cases} f_1 = 99.83\,\mathrm{Hz} \\ f_2 = 200.33\,\mathrm{Hz} \end{cases} \tag{10.3.29}$$

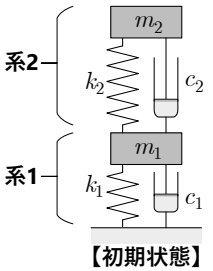
であり、正規化された固有振動モードは

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.010488562 \\ 3.160537772 \end{bmatrix} \tag{10.3.25}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0.316053777 \\ 0.104885616 \end{bmatrix} \tag{10.3.26}$$

である。この2自由度系の減衰比を実験で計測したところ、1次も2次も0.0025であった。この系が静止している状態で、 質点1に力積$+10\mathrm{N}$の衝撃を与えた。0.1秒後の質点2の加速度を求めなさい。

衝撃応答(インパルス応答)の解法



★結局のところ，初速度を与えるだけ

【略解】まず、位置および速度の初期値は

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P} \quad , \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

であり、式$(15.1.7)$より、モード座標とモード速度の初期値は

$$w_1(0) = \boldsymbol{\phi}_i{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) = 0 \ , \ w_2(0) = \boldsymbol{\phi}_2{}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(0) &= \boldsymbol{\phi}_1{}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{\phi}_1{}^T\boldsymbol{P} \\ &= \begin{bmatrix} 0.010488562 & 3.160537772 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0.10488562 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_2(0) &= \boldsymbol{\phi}_2{}^T\boldsymbol{P} \\ &= \begin{bmatrix} -0.316053777 & 0.104885616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -3.16053777 \end{aligned} \tag{5}$$

固有角振動数は

$$\Omega_1 = 2 \times \pi \times 99.83 = 627.2751 \tag{6}$$

$$\Omega_2 = 2 \times \pi \times 200.33 = 1258.727 \tag{7}$$

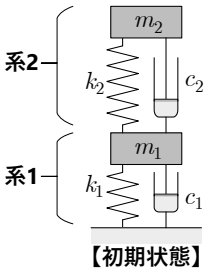
式$(15.1.9)$より、1次モードの時刻$t = 0.1$での行列 $\boldsymbol{B}$ は

$$\begin{aligned} x_1(10) &= e^{-0.025 \times 627.2751 \times 10} \times \\ &\qquad \cos(\sqrt{1 - 0.025^2} \times 627.2751 \times 10) \\ &= 0.206823572 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_2(10) &= e^{-0.025 \times 627.2751 \times 10} \times \\ &\qquad \sin(\sqrt{1 - 0.025^2} \times 627.2751 \times 10) \\ &= -0.02577 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}(10) = \begin{bmatrix} x_1(10) + \zeta_1 x_2(10) & \dfrac{1}{\Omega_1} x_2(10) \\ -\Omega_1 x_2(10) & x_1(10) - \zeta_1 x_2(10) \end{bmatrix}$$

衝撃応答(インパルス応答)の解法



★結局のところ，初速度を与えるだけ

$$= \begin{bmatrix} 0.206179 & -4.10787\times10^{-5} \\ 16.16341 & 0.207468 \end{bmatrix} \tag{8}$$

同様に、2次モードについては

$$\boldsymbol{B}(10) = \begin{bmatrix} 0.042553 & 5.76766\times10^{-6} \\ -9.13825 & 0.04219 \end{bmatrix} \tag{9}$$

よって、$t=0$でのモード座標およびモード速度は

$$\begin{bmatrix} w_1(10) \\ \dot{w}_1(10) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(10) \begin{bmatrix} w_1(0) \\ \dot{w}_1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.206179 & -4.10787\times10^{-5} \\ 16.16341 & 0.207468 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.104886 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4.30857\times10^{-6} \\ 0.02176 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} w_2(10) \\ \dot{w}_2(10) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(10) \begin{bmatrix} w_2(0) \\ \dot{w}_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.042553 & 5.76766\times10^{-6} \\ -9.13825 & 0.04219 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3.16054 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.82289\times10^{-5} \\ -0.13334 \end{bmatrix} \tag{11}$$

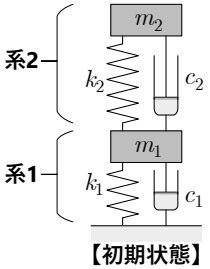
したがって、$t=0.1$でのモード加速度は、

$$\ddot{w}_1(10) = -2\zeta_1\Omega_1\dot{w}_1(10) - {\Omega_1}^2 w_1(10)$$
$$= -2\times0.025\times627.2751\times0.02176$$
$$-627.2751^2\times(-4.30857\times10^{-6})$$
$$= 1.012822 \tag{12}$$

$$\ddot{w}_2(10) = -2\zeta_2\Omega_2\dot{w}_2(10) - {\Omega_2}^2 w_2(10)$$
$$= -2\times0.025\times1258.727\times(-0.13334)$$
$$-1258.727^2\times(-1.82289\times10^{-5})$$
$$= 37.27385655 \tag{13}$$

よって、質点の加速度は

衝撃応答(インパルス応答)の解法



【初期状態】

★結局のところ，初速度を与えるだけ

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{x}}(10) &= \ddot{w}_1(10)\times\boldsymbol{\phi}_1 + \ddot{w}_2(10)\times\boldsymbol{\phi}_2 \\ &= 1.012822\times\begin{bmatrix}0.010488562\\3.160537772\end{bmatrix} \\ &\quad + 37.27385655\times\begin{bmatrix}-0.316053777\\0.104885616\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-11.76992011\\7.110553587\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

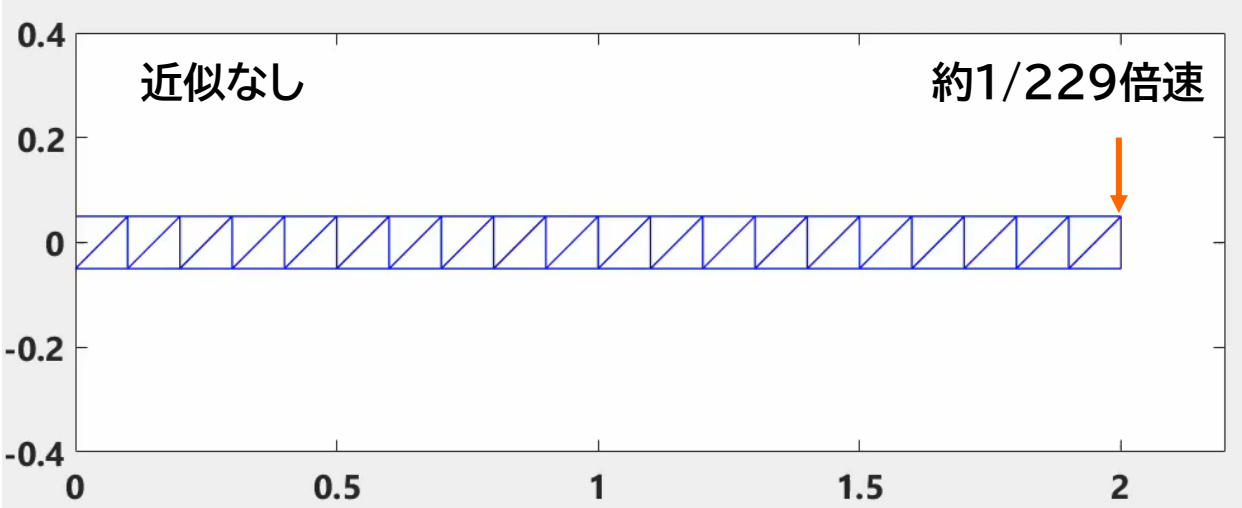
よって、質点2の加速度は

$$\ddot{x}_2(10) = 7.110553587\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2 \tag{15}$$

衝撃応答(インパルス応答)の例

★高次モードを無視しにくい

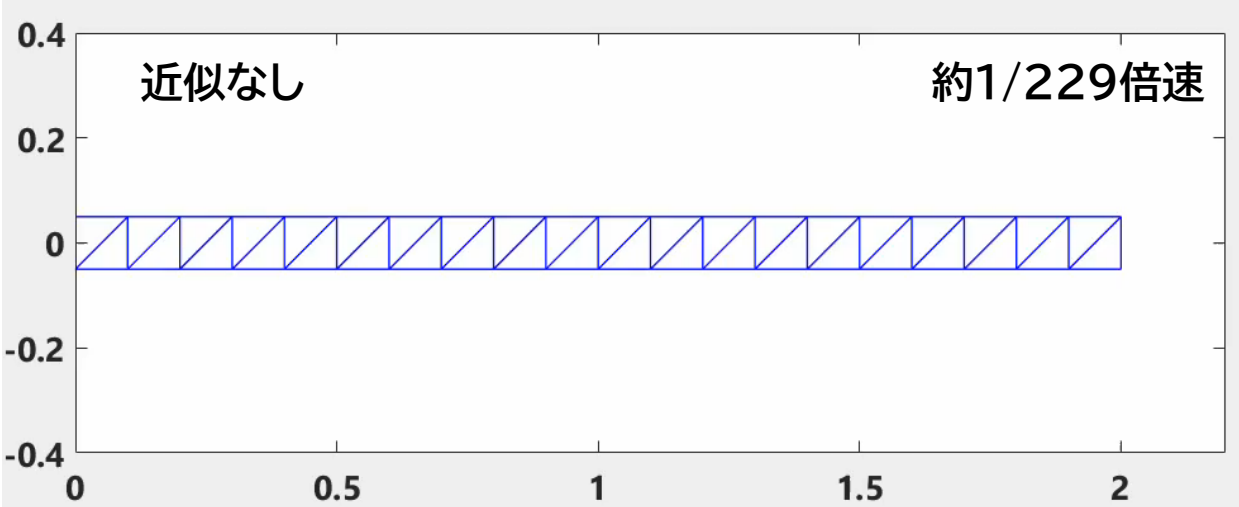
ヤング率 $E = 70\mathrm{GPa}$、密度 $\rho = 2700\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ で、直径が $1\mathrm{cm}$、厚さが $1\mathrm{mm}$、長さが $10\mathrm{cm}$ の薄肉円筒パイプで構成された下図のような $2\mathrm{m}$ のトラスがある。トラス部材の減衰比は 0.001 であるとして、このトラスの先端に力積が $0.001\mathrm{Ns}$ の衝撃を与えたときの応答は以下の通り。

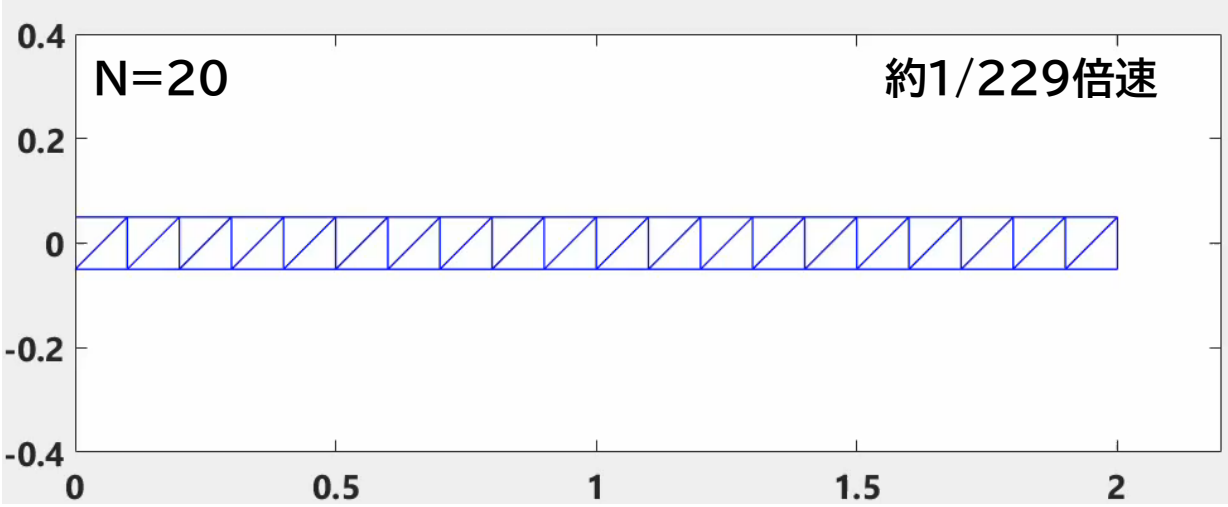


※ Δt は、最高次(80次)の固有振動の周期の1/4

衝撃応答(インパルス応答)の例

★高次モードを無視しにくい





第1章のまとめ(1/2)

- インパルス応答はモード法で解くことが可能ではある。実際、モード座標 w_i の厳密解は、衝撃ベクトルを $\boldsymbol{P}$、固有振動モードベクトルを ϕ_i とし、

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_o \quad , \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{15.1.6}$$

$$w_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) \, , \quad \dot{w}_i(0) = \boldsymbol{\phi}_i{}^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(0) \tag{15.1.7}$$

として、次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} w_i(t) \\ \dot{w}_i(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(t) \begin{bmatrix} w_i(0) \\ \dot{w}_i(0) \end{bmatrix} \tag{15.1.8}$$

ただし、

$$\begin{cases} x_1(t) \equiv e^{-\zeta\Omega_i t} \cos\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right) , \, x_2(t) \equiv e^{-\zeta\Omega_i t} \dfrac{\sin\left(\sqrt{1-{\zeta_i}^2}\,\Omega_i t\right)}{\sqrt{1-{\zeta_i}^2}} \\ \boldsymbol{B}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) + \zeta x_2(t) & \dfrac{1}{\Omega_i} x_2(t) \\ -\Omega_i x_2(t) & x_1(t) - \zeta x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{15.1.9}$$

第1章のまとめ(2/2)

- ただし、インパルス応答は高周波成分を含むので、かなり高次のモードまで考慮する必要がある。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

2025年7月21日(月)2限

第2章　SRS(Shock Response Spectrum)とその計算法

第2章の学修目標

★ SRSの定義について説明できる。

★ SRSの物理的意味について説明できる。

★ SRSの計算手順を説明できる。

SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★衝撃を与えたときの最大応答加速度

土台に衝撃を与えたときの土台の加速度の時系列データが得られたとする。このとき、土台の上に載っている物体の運動は、 物体の固有振動数 f_o と減衰比 ζ がわかっていれば、物体を1自由度バネ・マス・ダンパー系と近似することで求めることができる。

このとき、物体に生じる加速度の大きさの最大値 $a_{\max}$ は、当然のことながら、固有振動数 f_o の関数となる。

そこで、横軸に物体の固有振動数 f_o 、縦軸に最大加速度 $a_{\max}$ をとったグラフはSRSと呼ばれる。

★SRSの物理的意味

現実の物体は無限自由度であり、固有振動数は全てわかるわけではない。また、物体の各部に生じる加速度の全てを加速度計で計測できるわけではない。そこで、「固有振動数がこの値であったとしたら、 最大加速度はこの値になるであろう」と予測するのがSRSである。最大加速度がわかれば、その瞬間に物体に作用する応力は解析ソフトで求めることができるので、耐衝撃性を評価できることになる。

SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★SRSの計算手順

土台の変位をyとすると、 外力が作用しない場合の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{15.2.1}$$

台に対する質点の相対変位をuとすれば、

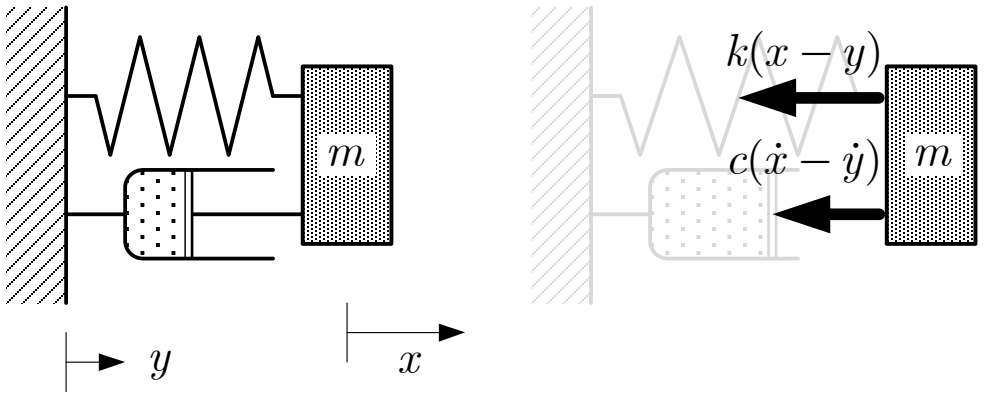
$$u = x - y \tag{15.2.2}$$

であり、運動方程式は

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y} \tag{15.2.3}$$

となる. つまり、

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_o\dot{u} + {\omega_o}^2 u = -\ddot{y} \tag{15.2.4}$$



土台の加速度をサンプリングタイムΔtで計測し、 その値をα_nとし、$t_n \le t \le t_{n+1}$の間で

$$\ddot{y} \approx \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}(t - t_n) + \alpha_n \tag{15.2.5}$$

と近似すると、

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_o\dot{u} + {\omega_o}^2 u = -\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}(t - t_n) - \alpha_n \tag{15.2.6}$$

と近似できる。これはまさに、第3回第3回の式(3.3.2)。つまり、

$$\boldsymbol{u}_n \equiv \begin{bmatrix} u_n \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^n \equiv -\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \tag{15.2.7}$$

と定義すれば、

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_n \tag{15.2.8}$$

であり、質点の加速度は、式(15.2.1)より、

$$\ddot{x}_{n+1} = -2\zeta\omega_o\dot{u}_{n+1} - {\omega_o}^2 u_{n+1} \tag{15.2.9}$$

により求められる。

SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★SRSの計算手順

ちなみに、$\omega_o = 2\pi f_o$ として、

$$\begin{cases} c \equiv e^{-\zeta\omega_o \Delta t} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o \Delta t\right) \\ s \equiv e^{-\zeta\omega_o \Delta t} \dfrac{\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_o \Delta t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{cases} P_{11} \equiv c + \zeta s \ , \ P_{12} \equiv \dfrac{1}{\omega_o} s \\ P_{21} \equiv -\omega_o s \ , \ P_{22} \equiv c - \zeta s \end{cases} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{cases} Q_{11} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2 \Delta t}\left[\dfrac{2\zeta(1-P_{11})}{\omega_o} + P_{12} - P_{11}\Delta t\right] \\ Q_{12} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2 \Delta t}\left[\Delta t - P_{12} - \dfrac{2\zeta(1-P_{11})}{\omega_o}\right] \\ Q_{21} \equiv -\dfrac{1}{{\omega_o}^2 \Delta t}\left[1 - P_{22} + P_{21}\left(\Delta t + \dfrac{2\zeta}{\omega_o}\right)\right] \\ Q_{22} \equiv \dfrac{1}{{\omega_o}^2 \Delta t}\left(1 - P_{22} + \dfrac{2\zeta}{\omega_o} P_{21}\right) \end{cases} \tag{3.4.5}$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} \equiv \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

これにより、加速度の時系列データ $\ddot{x}_n$ が得られるので、その大きさの最大値を求めれば、それが $a_{\max}$ となる。

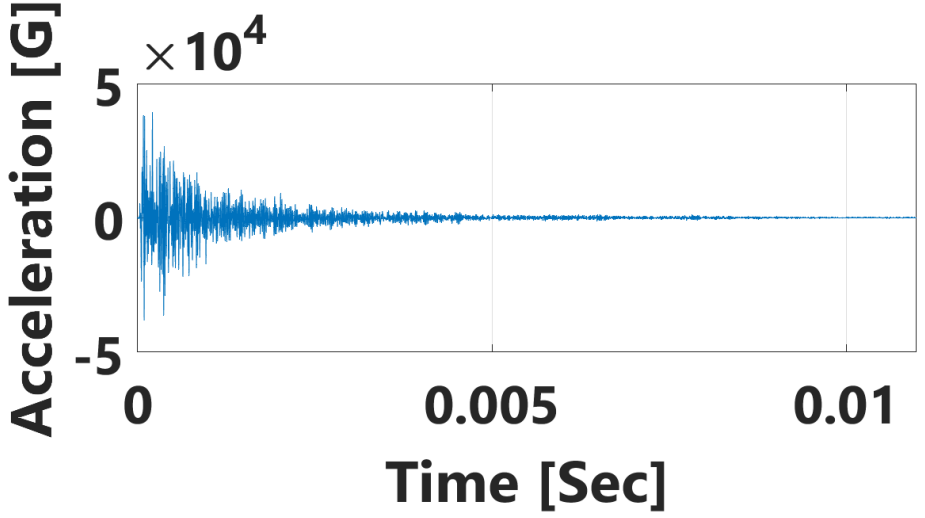
$$a_{\max} = a_{\max}(f_o) = \max\left(\left|\ddot{x}_n\right|\right) \tag{15.2.10}$$

f_o を変えていって、以上の作業を繰り返せば、f_o と $a_{\max}$ との関係が得られる。これがSRSである。

SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★SRSの計算手順

【例題15.2.1】土台に衝撃を与えたときの、時間刻み幅 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{sec}$ での土台の加速度のデータを得た。グラフにすると、下図のようである。供試体の固有振動数が $600\mathrm{Hz}$ である場合の、供試体の、状態遷移行列 P、Q を求めなさい。ただし、減衰 比は 0.025 としなさい。 また、供試体の最大加速度を求めなさい。



【略解】式$(3.4.3)$〜$(3.4.6)$に

$$\begin{cases} \zeta = 0.025 \quad , \quad \Delta t = 1.0 \times 10^{-6} \\ \omega_o = 2 \times \pi \times 600 = 3.76991118 \times 10^3 \end{cases} \tag{1}$$

を代入すると、

$$c = 9.99898656 \times 10^{-1} \tag{2}$$

$$s = 3.76954697 \times 10^{-3} \tag{3}$$

$$P_{11} = 9.99992894 \times 10^{-1} \tag{4}$$

$$P_{12} = 9.99903390 \times 10^{-7} \tag{5}$$

$$P_{21} = -1.42108573 \times 10^{1} \tag{6}$$

$$P_{22} = 9.99804417 \times 10^{-1} \tag{7}$$

$$Q_{11} = 3.33309299 \times 10^{-13} \tag{8}$$

$$Q_{12} = 1.66658695 \times 10^{-13} \tag{9}$$

$$Q_{21} = 4.99935396 \times 10^{-7} \tag{10}$$

$$Q_{22} = 4.99967993 \times 10^{-7} \tag{11}$$

SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★SRSの計算手順

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 9.99992894 \times 10^{-1} & 9.99903390 \times 10^{-7} \\ -1.42108573 \times 10^{1} & 9.99804417 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 3.33309299 \times 10^{-13} & 1.66658695 \times 10^{-13} \\ 4.99935396 \times 10^{-7} & 4.99967993 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \quad (13)$$

そこで、

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

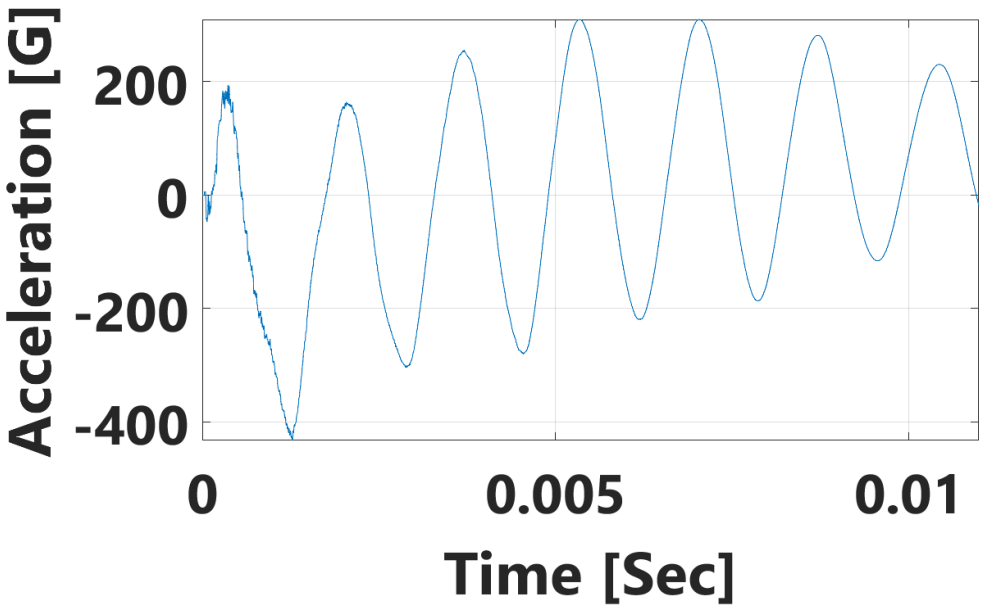
として、

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_{n+1} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}^n_{n+1} \, , \quad \boldsymbol{\alpha}^n_{n+1} = -\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\ddot{x}_{n+1} = -2\zeta\omega_o\dot{u}_{n+1} - {\omega_o}^2 u_{n+1} \quad (16)$$

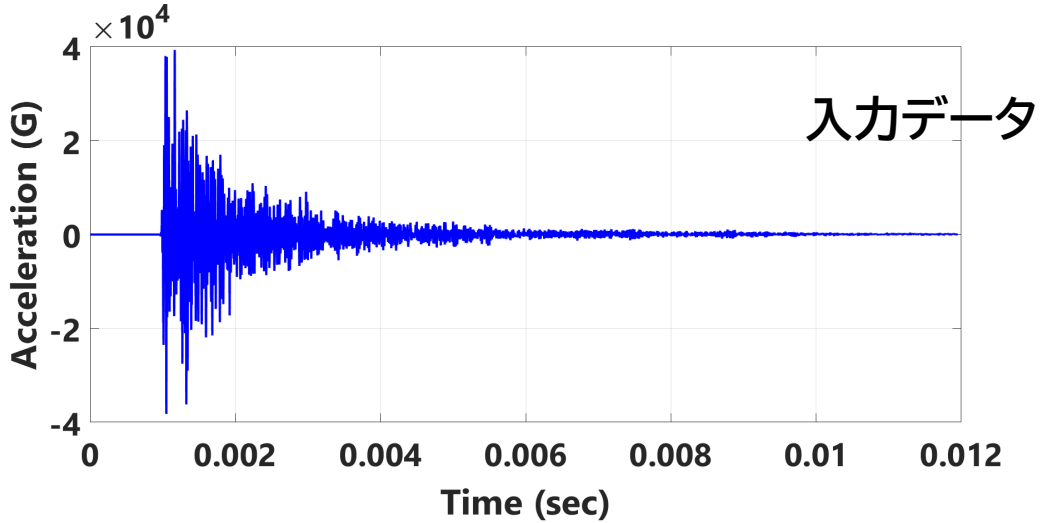
を計算すると、時間t_nと加速度$\ddot{x}_n$との関係は右図のようになった。したがって、最大加速度は

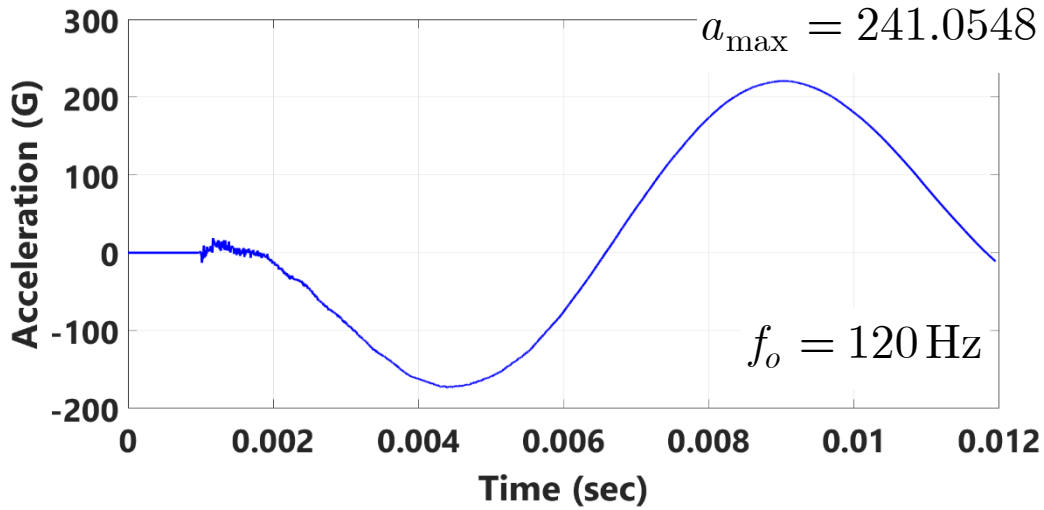
$$a_{\max} = 432.6153\,\mathrm{G} \quad (17)$$

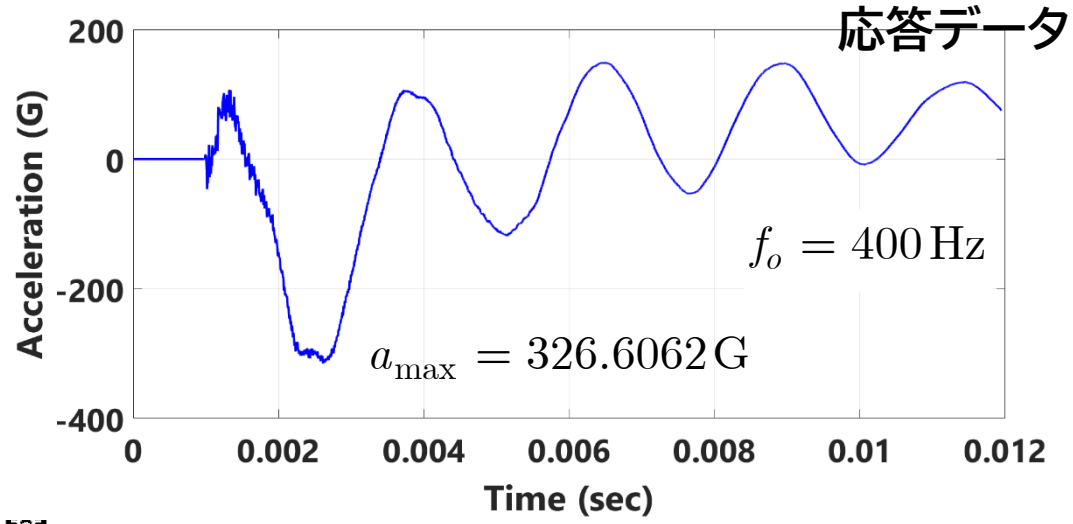


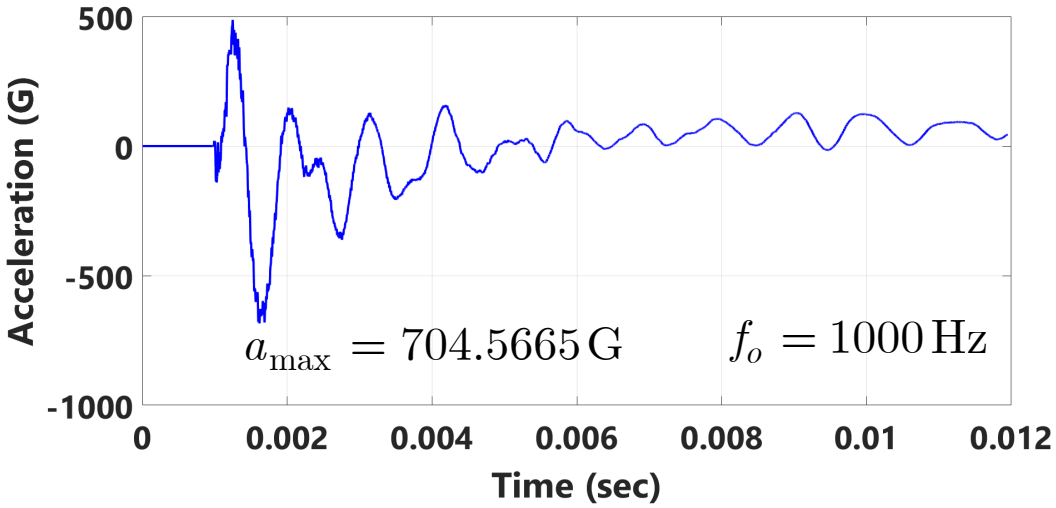
SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★衝撃入力データと応答データの例



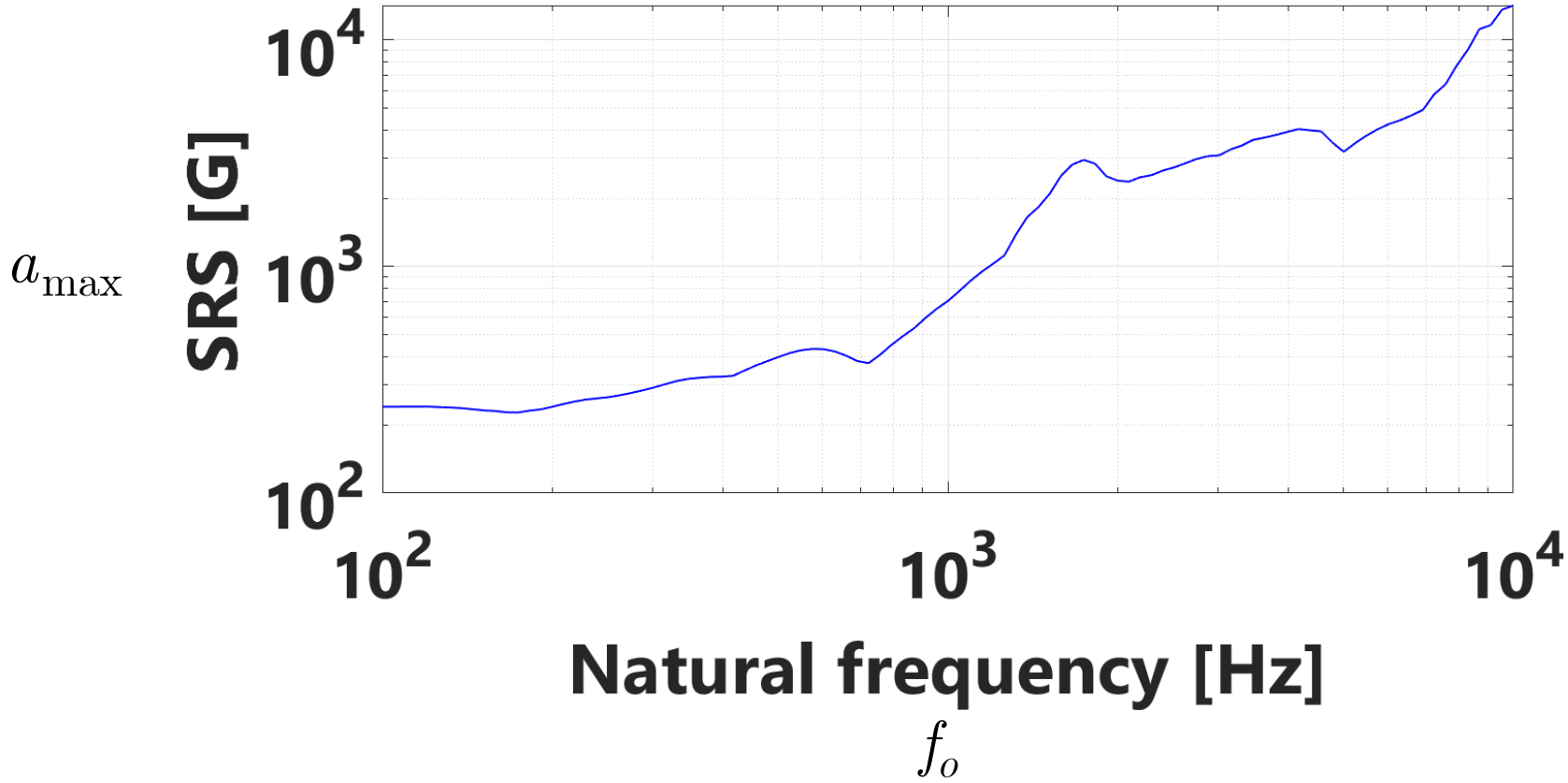






SRS（Shock Response Spectrum）とは？

★SRSの例



第2章のまとめ

- SRSとは、土台に衝撃を与えたときに、 土台に載っている物体に生じる最大加速度のことである。この最大加速度は物体の固有振動数の関数となる。
- 最大加速度がわかれば、衝撃が加わった時に物体に生じる応力の評価が可能となる。
- SRSは、 第3回第4章で学んだ状態遷移関係を用いて計算することができる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

2025年7月21日(月)2限

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

第3章　CubeSatの衝撃試験とSRS

第3章の学修目標

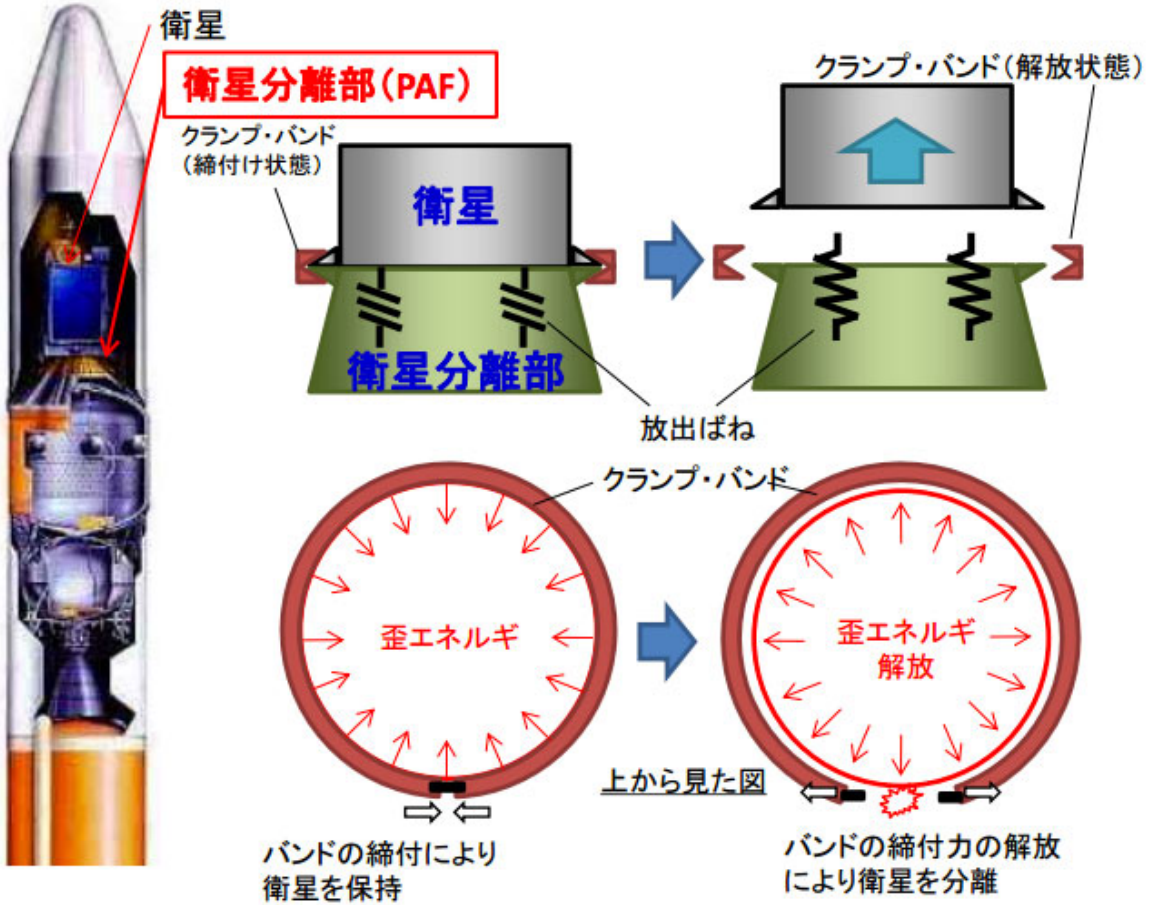
★ 衝撃試験について説明できる。

★ 衝撃試験の難しさについて説明できる。

CubeSatの衝撃試験

★フェアリング開頭時や衛星分離時の衝撃への耐性確認

第4回第2章で学んだ通り、PAFを通じて宇宙機に衝撃が入力する。

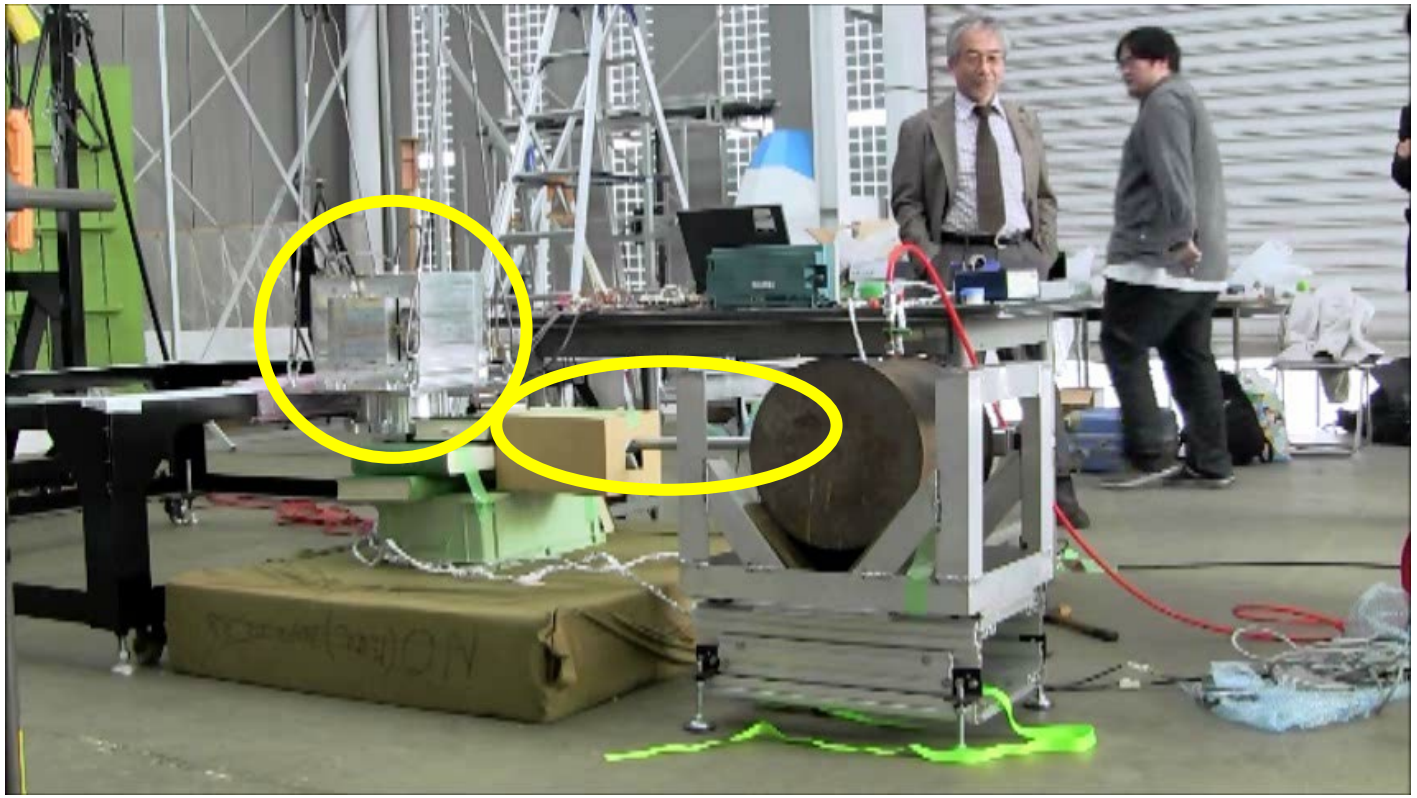


https://fanfun.jaxa.jp/countdown/astro_h/f30.html

http://jda.jaxa.jp/result.php?lang=j&id=7f29bdca95cc035b5701fd9d69224641#

CubeSatの衝撃試験

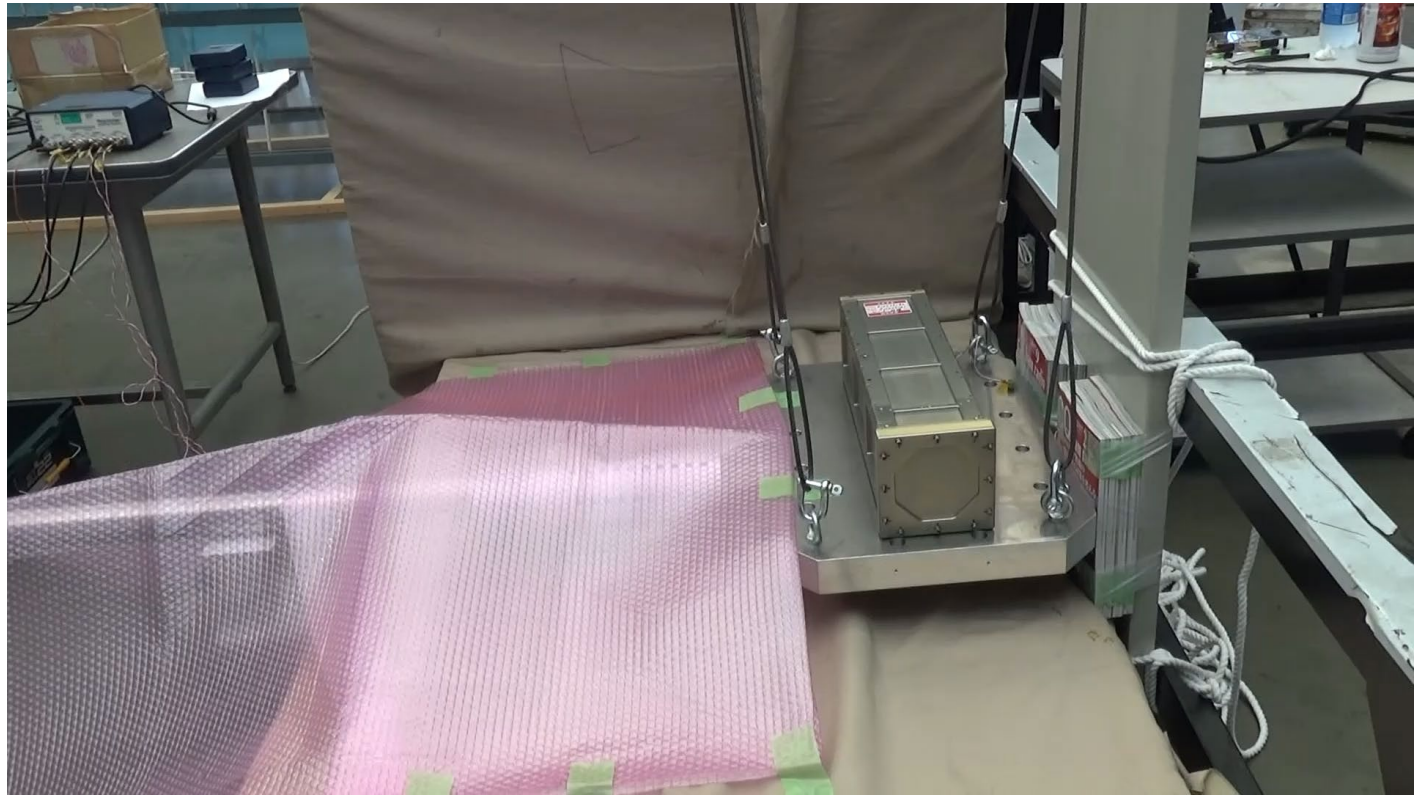
★フェアリング開頭時や衛星分離時の衝撃への耐性確認



【N-PODに収納されたSPROUTの衝撃試験】

CubeSatの衝撃試験

★フェアリング開頭時や衛星分離時の衝撃への耐性確認



【ESSODに収納されたNEXUSの衝撃試験】

衝撃試験とは

★打ち上げ時に想定される衝撃に対して宇宙機が耐えられるか？

想定される衝撃と同等の衝撃を宇宙機に与えた後、

① 宇宙機の基本的な機能確認試験（特に，スイッチ類が動作してしまったり、 はずれてしまったりしていないかどうか）

② 宇宙機の変形（塑性変形や取り付け部のずれ）の有無の確認（許容値以内に収まっているか否か）

を行い、問題がなければ、衝撃試験に合格。

【課題】

そもそも，想定される衝撃と同等の衝撃を宇宙機に与えることができているのか？（想定値よりも小さな衝撃しか与えられていなかったとしたら、 試験としては“ズル”をして合格したことになるし、 実際に打ち上げたら壊れるかもしれない）

↓

実は、想定される衝撃を与えること自体が難しい。

↓

衝撃が大きすぎる分には試験としては問題ないが、 宇宙機が壊れてしまうかもしれない。

一方で、小さすぎると、「試験としては不十分」であるとして、衝撃試験をやり直さなければならなくなる。これも、宇宙機に何度も衝撃を与えることになり、宇宙機が壊れかねない（試験の際には壊れなくても、実際の打上げの際に壊れてしまうかもしれない）。

※ 要するに、“模擬試験”は難しすぎても優しすぎても、本番の入試の役には立たない，という感じ。

※ ロケット側や打上げ全体を管理する側の気持ちと、宇宙機を開発した側の両方の“気持ち”がわかりますか？

「想定される衝撃」とは？

★それを規定するのがSRS（Shock Response Spectrum）

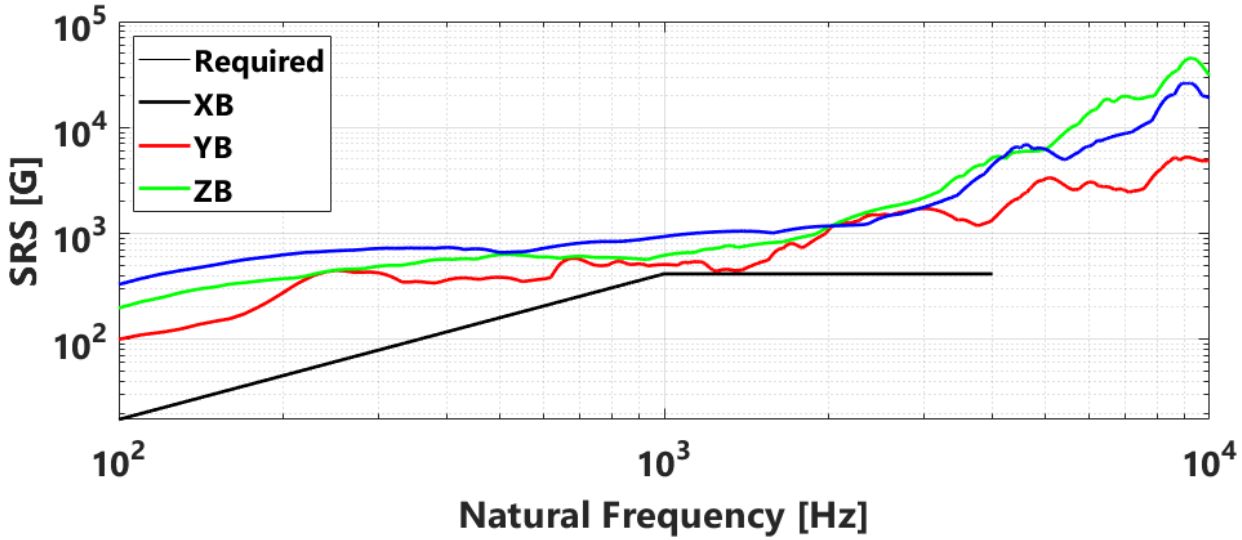
「衝撃に対する耐性」を左右するのは、 宇宙機に生じる加速度。つまり、「想定される衝撃」とは、「宇宙機に与える加速度」のこと。

ロケット／宇宙機のインターフェース（I/F）から入力する衝撃により宇宙機に生じる加速度は、 宇宙機の固有振動数と減衰に依存する。

そこで・・・

宇宙機の固有振動数に応じて、I/Fに入力する加速度の最低値を規定（以下、要求値と呼ぶことにする）。その最低値以上の加速度をI/Fに負荷する試験を行う。

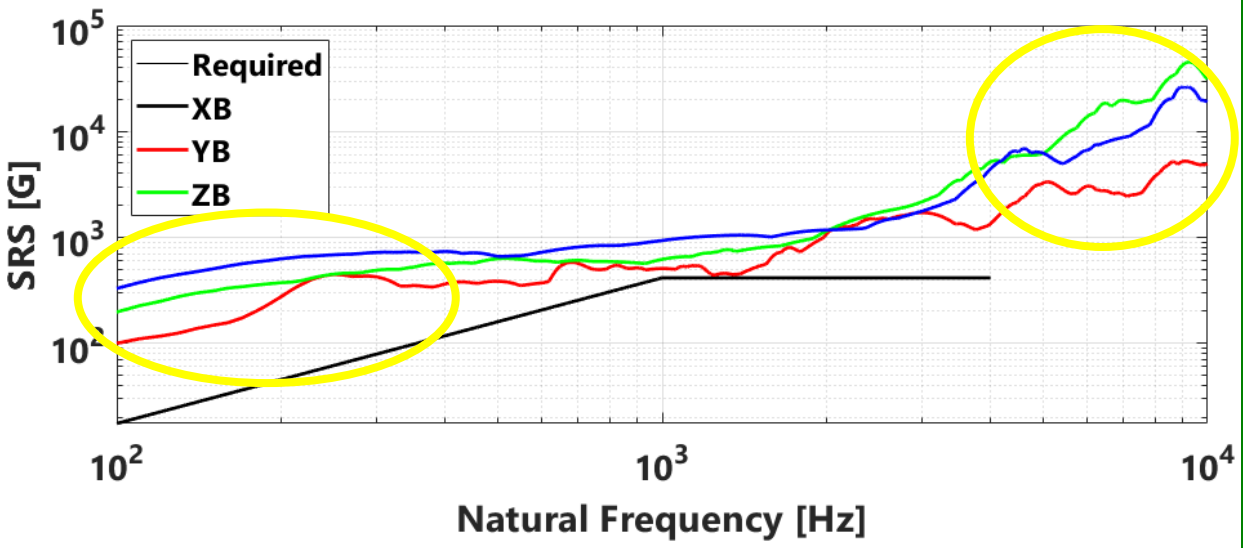
その値、つまり、「宇宙機の固有振動数 vs I/Fからの入力加速度」＝SRSの下限（必要条件）を規定する。



試験で得られたSRSが、 ロケット側から規定されているSRSよりも大きければ、「試験自体は妥当」ということになる。 もちろん、試験が妥当だとしても、宇宙機が試験後に壊れていたら、元も子もないが。

衝撃試験の課題は？（再確認）

★“やり過ぎ”に注意



上記の例では、 低次と高次で要求値よりも実測値の方がかなり大きい。

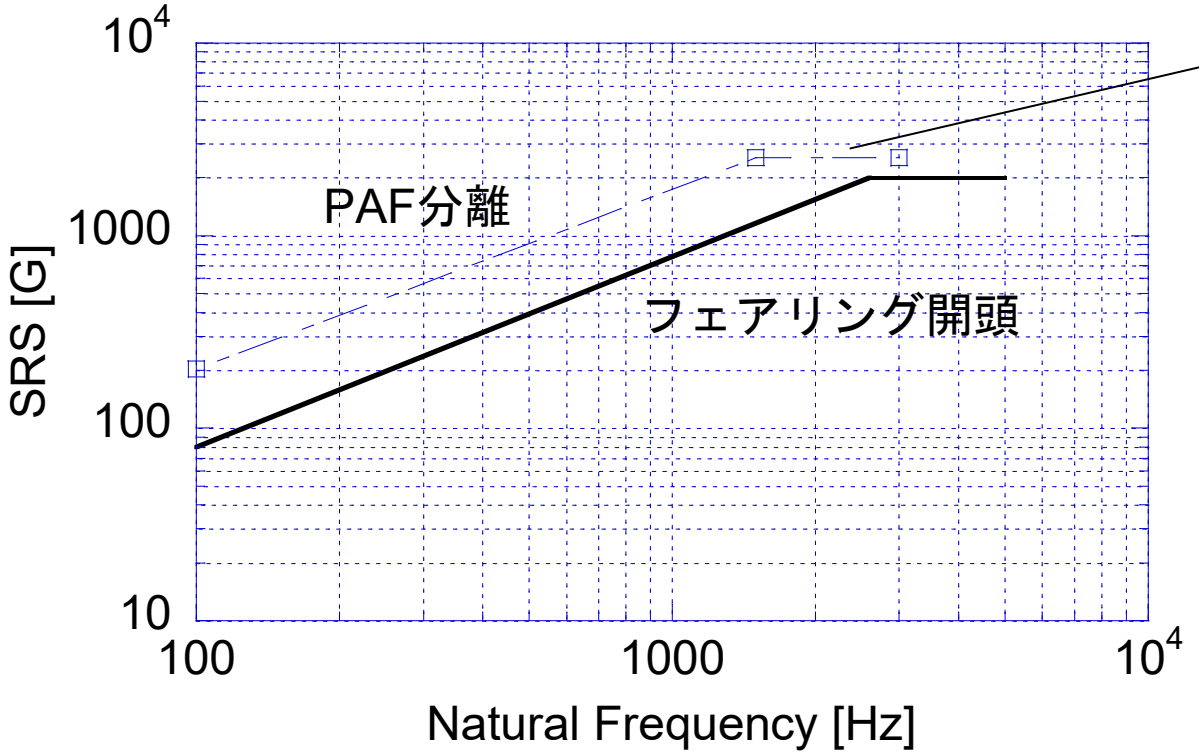
つまり、過大な加速度を宇宙機に与えてしまっている。

もしかしたら、「打上げ本番では大丈夫」なはずなのに、「衝撃試験で壊れてしまう」 という、本末転倒なことにことになりかねない（実際, 衝撃試験で過度の加速度を加えてしまったために、試験後のチェックで不具合が見つかった例はある）。

また、衝撃試験にはなんとか耐えたが、本番の打上げで壊れる、という可能性もある。

衝撃試験の評価方法

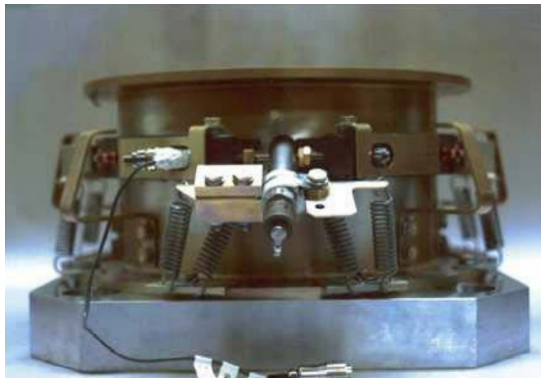
★規定されたSRS以上のSRSで試験をし、試験後に問題が無ければ合格

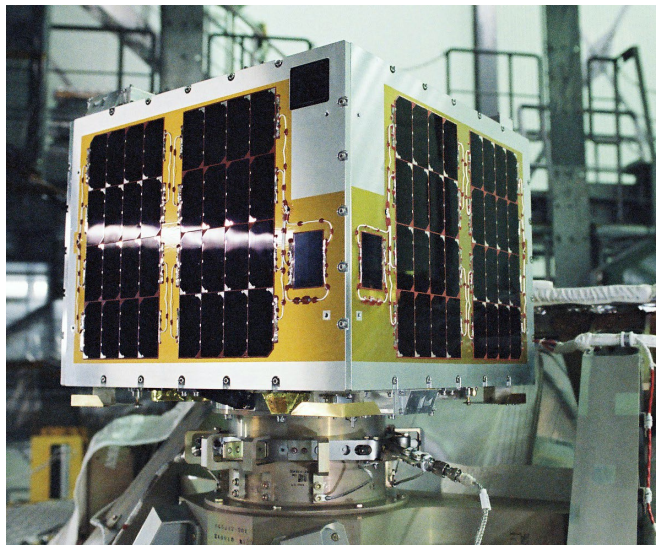


※ PAF：Payload Attachment Fitting

搭載物に負荷する加速度がこの線よりも上ならば。衝撃試験として認められる。

その上で、衝撃負荷後、搭載物に問題がなければ、衝撃試験に合格したことになる。

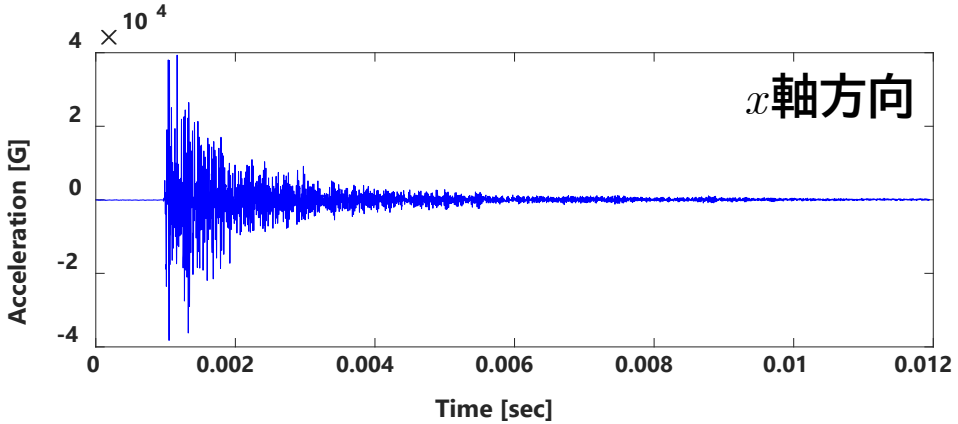


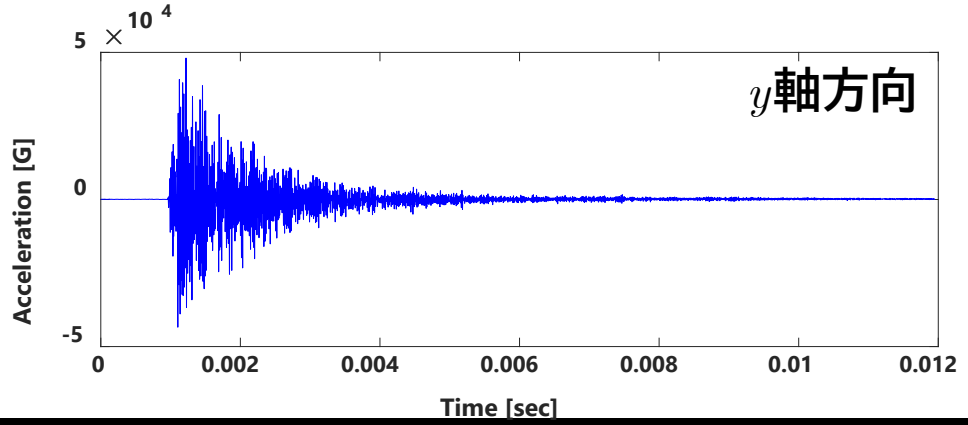


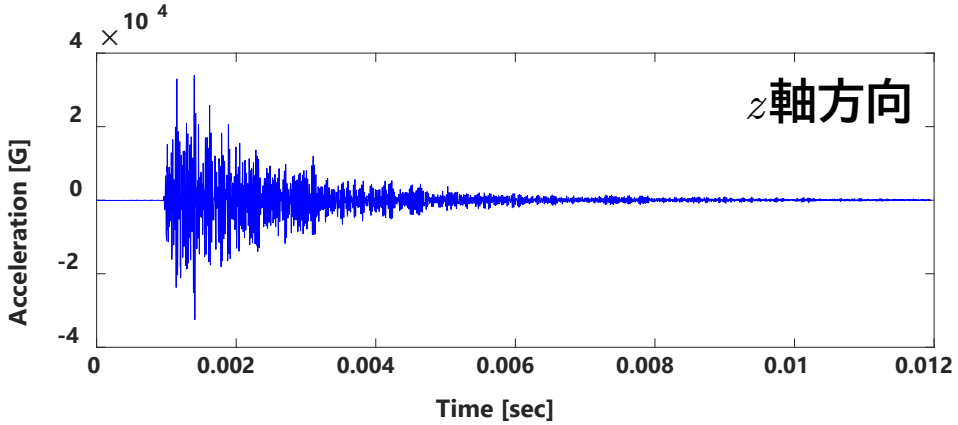
衝撃試験の手順

★まずは試験を行って，時々刻々の加速度を計測し，・・・

① ロケット・宇宙機のI/F部の適切な箇所に加速度計をとりつけておいて、I/F部に衝撃を加えて、そのときの3軸方向の加速度を計測する。







② 宇宙機を1自由度のバネ・マス・ダッシュポット系とみなし、その“土台”が①の加速度に相当する振動をしたとみなしたときの宇宙機の応答加速度を計算。その際、応答はバネ・マス・ダッシュポット系の固有振動数とQ値に依存するので、 Q値は自分で設定（例えば，Q値を10に設定）。固有振動数を要求SRSの範囲で変化させ、それぞれの固有振動数のときの応答加速度を計算する。

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_n \tag{15.2.8}$$

$$\ddot{x}_{n+1} = -2\zeta\omega_o\dot{u}_{n+1} - {\omega_o}^2 u_{n+1} \tag{15.2.9}$$

衝撃試験の手順

★まずは試験を行って，時々刻々の加速度を計測し，・・・

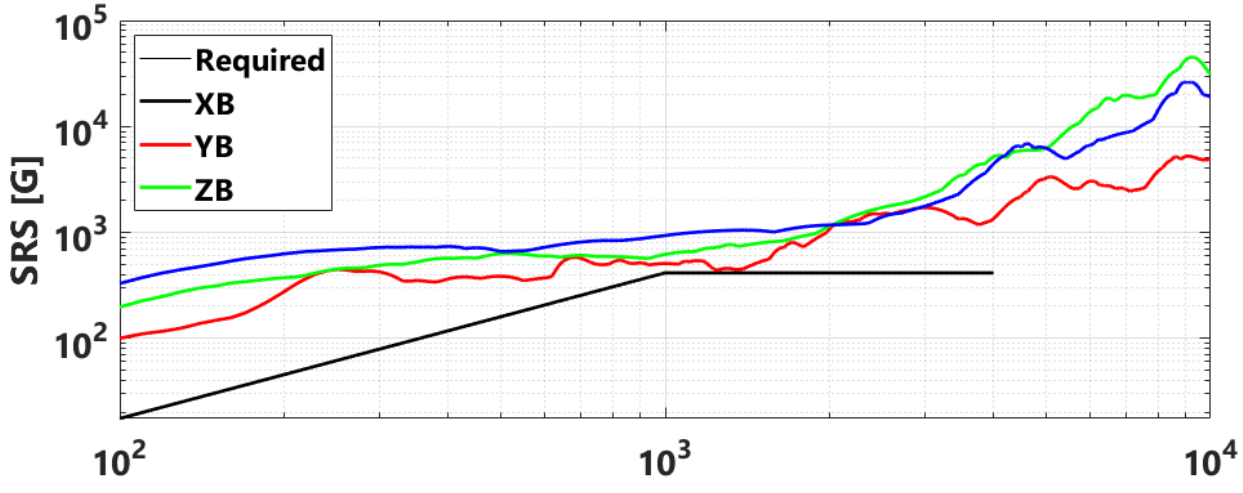
③ そして、**応答加速度の絶対値の最大値** $a_{\max}$ **を求める。**

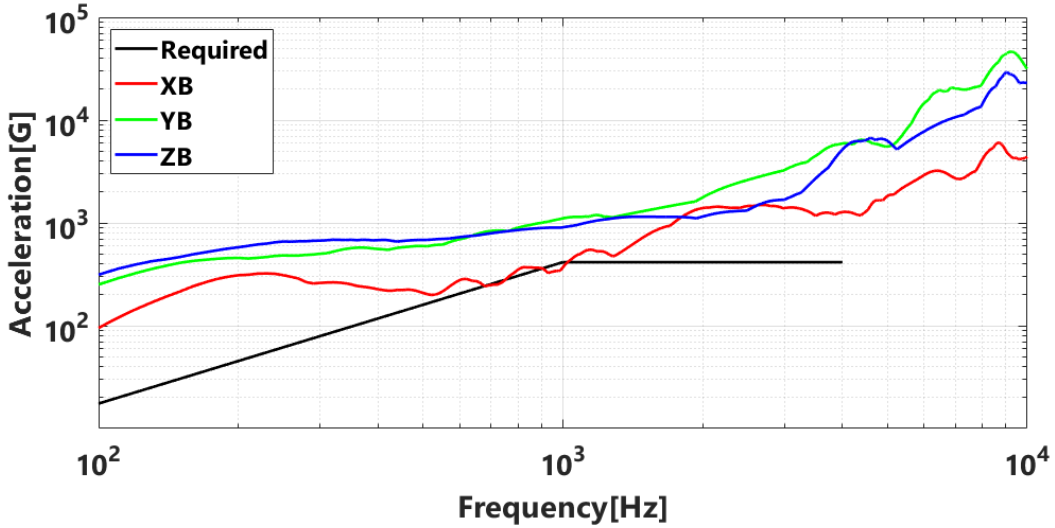
$$a_{\max} = a_{\max}(f_o) = \max\left(\left|\ddot{x}_n\right|\right) \qquad (15.2.12)$$

④ **要求SRSの範囲を** $f_{\min} \le f_o \le f_{\max}$ **として、** f_o **を** $f_{\min}$ **から** $f_{\max}$ **まで変えていって、それぞれの** f_o **での** $a_{\max}$ **を求める。**

⑤ **横軸** f_o **、縦軸** $a_{\max}(f_o)$ **のグラフを描く。**

加速度データは x **成分、** y **成分、** z **成分の3軸分があるはずなので、それぞれの成分について①～⑤を行う。つまり。グラフは3本、引かれることになる。**





第3章のまとめ(1/2)

- 宇宙機の開発では、フェアリングの開頭や宇宙機の分離に伴ってロケットと宇宙機のI/Fに入力する加速度を想定(規定)し、その加速度以上の加速度を宇宙機に与え、宇宙機がその加速度に耐えられるかを確認する試験を行う. これを衝撃試験と呼ぶ。
- 衝撃により宇宙機に生じる加速度は 宇宙機の固有振動数の関数になる。そこで、衝撃試験では、I/Fに入力する想定加速度を宇宙機の固有振動数の関数として与える。これがまさにSRS。

第3章のまとめ(2/2)

- 衝撃試験において、I/F部の加速度を計測し、第3回第3章および第4章で学んだ式

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}_n \tag{15.2.8}$$

を用いて、仮定した固有振動数 f_o における土台と宇宙機の状態量の差$\boldsymbol{u}_n$を求め、

$$\ddot{x}_{n+1} = -2\zeta\omega_o\dot{u}_{n+1} - {\omega_o}^2 u_{n+1} \tag{15.2.9}$$

により応答加速度を求めれば、その絶対値の最大値 $a_{\max} = a_{\max}(f_o)$を求めることができる。そして、f_o を変えていき、f_o を横軸に、 $a_{\max}(f_o)$を縦軸にとったグラフを描けば、それがSRS曲線となる。

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

2025年7月21日(月)2限

これまでの振り返り

本講義の構成

第1回　序論
- 第1章　自己紹介
- 第2章　振動工学とは（本講義で扱う振動問題）
- 第3章　本講義の狙いと構成
- 第3章　本講義の狙いと構成

第2回　1自由度線形振動
- 第1章　1自由度線形振動の固有振動数
- 第2章　粘性減衰比が一定の場合の減衰振動
- 第3章　1自由度線形振動の重要性
- 第4章　自由減衰振動における状態遷移関係

第3回　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移
- 第1章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の積分形式の解析解
- 第2章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系のフーリエ級数展開を用いた解析解
- 第3章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の近似解
- 第4章　任意の外力が作用する1自由度線形振動系の状態遷移関係

第4回　宇宙機の設計・開発における振動解析
- 第1章　ロケットの振動源
- 第2章　人工衛星の振動源
- 第3章　人工衛星の打ち上げ時の機械環境

第5回　1自由度線形振動系の強制振動と共振
- 第1章　過渡応答と定常振動状態
- 第2章　応答倍率と位相差
- 第3章　共振
- 第4章　ボード線図とその特徴
- 第5章　Q値

第6回　減衰のない2自由度線形振動系の自由振動
- 第1章　2自由度バネ・マス系の運動方程式とその解
- 第2章　固有振動モード
- 第3章　モードの直交性・完全性
- 第4章　モードの正規化
- 第5章　剛体モード

第7回　2自由度線形振動系の強制振動
- 第1章　複素剛性と構造減衰係数
- 第2章　複素剛性を用いた1自由度系の強制振動解の導出
- 第3章　複素剛性を用いた2自由度系の強制振動解の導出
- 第4章　2自由度線形振動系の共振
- 第5章　加振振動数と応答倍率との関係
- 付録　人工衛星の振動に関するトピックス

本講義の構成

第8回　振動絶縁と動吸振器

第1章　振動のパッシブな抑制とアクティブな抑制
第2章　振動絶縁の基本的な考え方と課題
第3章　振動絶縁の2自由度モデル（構造減衰係数が一定の場合）
第4章　振動絶縁の2自由度モデル（粘性減衰比が一定の場合）
第5章　動吸振器

第9回　モード法の基礎

第1章　モード法
第2章　モード法における減衰の取り扱い
第3章　モード法による過渡応答の計算
付録　インパルス応答とステップ応答

第10回 刺激係数と有効質量

第1章　有効質量の概念
第2章　刺激係数と有効質量
第3章　刺激係数と有効質量の計算例
第3章　有効質量の利用例
付録　刺激係数の利用例

第11回 パワースペクトル密度

第1章　フーリエ級数展開
第2章　振動データのパワースペクトル密度
第3章　振動データの実効値とパワースペクトル密度との関係
第4章　強制振動とパワースペクトル密度
第5章　パワースペクトル密度と共振
付録　音響負荷のパワースペクトル密度

第12回 ランダム振動

第1章　ランダム振動データの生成
第2章　ランダム加振による過渡応答
第3章　土台をランダム加振される1自由度バネ・マス・ダンパー系の応答
付録　音響負荷による宇宙機の応答の予測

第13回 ランダム加振される物体に作用する荷重

第1章　ランダム加振される物体の固有振動数とパワースペクトル密度
第2章　RRS（Random Response Spectrum）とその物理的意味
第3章　Milesの式とその物理的意味
付録A　JAXAの技術標準・設計標準
付録B　多自由度系のRRSおよびMilesの式

本講義の構成

第14回 振動に対する耐性の評価法
- 第1章　CubeSatの振動試験
- 第2章　正弦波振動試験
- 第3章　ランダム振動試験
- 第4章　サインバースト試験

第15回 衝撃に対する耐性の評価法
- 第1章　衝撃を受ける物体の過渡応答
- 第2章　SRS（Shock ResponseSpectrum）とその計算法
- 第3章　CubeSatの衝撃試験とSRS

振動工学 ― 線形振動の基礎 ―

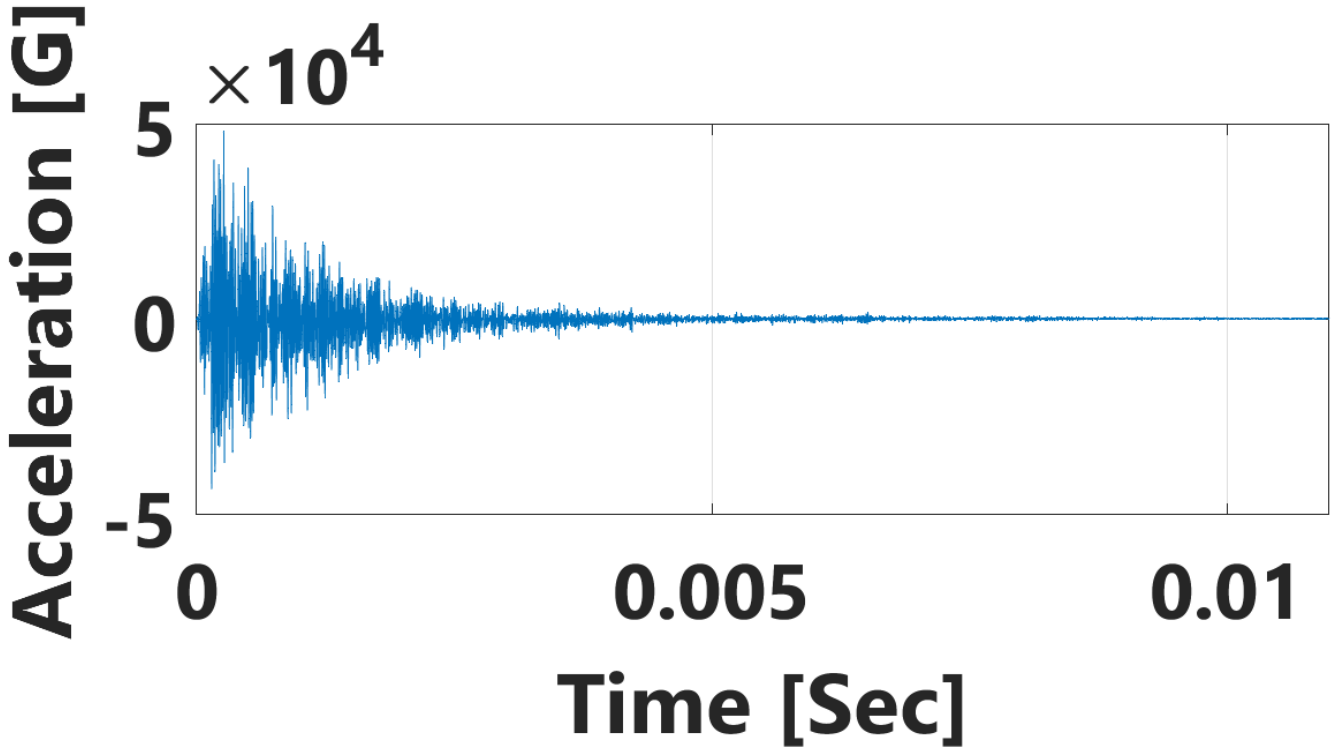
第15回　衝撃に対する耐性の評価法

2025年7月21日(月)2限

課題

2025年7月27日(日)18時00分締切

[1] 衝撃試験において、土台の加速度を計測したところ、「ex15.txt」の通りとなった。ただし、1列目が時間で2列目が加速度であり、時間の単位はsec、加速度の単位はGである。 供試体の固有振動数が$1200\mathrm{Hz}$である場合の供試体の時間と加速度との関係のグラフを描きなさい。そして、最大加速度を求めなさい。　ただし、減衰比を0.025としなさい。(5点)



振 動 工 学

― 線形振動の基礎 ―

第15回　衝撃に対する耐性の評価法

おわり

宮崎　康行
miyazaki.yasuyuki@nihon-u.ac.jp