

Strength of Materials I

材 料 力 学 I
— 棒・トラス・梁の基礎力学 —

2019

宮 崎 康 行

Yasuyuki Miyazaki

日本大学理工学部航空宇宙工学科

はじめに

この講義は、今後、航空機や宇宙機等の設計に必要となる、応力、作用面、強度、歪、軸力、せん断力、曲げモーメントの概念を理解し、強度設計の基礎を学ぶことを目的とする。具体的には、以下の内容を学ぶ。

授業計画		
1	9月23日(月)	はじめに ① 材料力学Ⅰ～Ⅲの全体の流れの確認 本学科で学ぶ材料力学Ⅰ～Ⅲの全体の流れについて確認する。 ② 講義の概要 材料力学Ⅰにおいて学ぶ内容と位置付けについて確認する。 ③ 弾性変形と塑性変形 弾性変形と塑性変形の概念について学ぶ。 ④ 応力と強度の概念 設計に欠かせない「応力」とその「作用面」というものについて、定義、必要性、ならびに、種類について学ぶ。また、「強度」という概念について学ぶ。
2	9月30日(月) 演習①	棒に作用する軸力と応力 「フリーボディーダイアグラム」という考え方について学び、作用・反作用の法則を考慮しながら、棒の任意の「作用面」に作用する「軸力」と「応力」を求める方法について学ぶ。
3	10月7日(月)	棒の伸びと歪と応力(1) 「歪」の概念と定義について学び、棒に引張力を作用させた場合の棒の変形、ならびに、棒に生じる「応力」と「歪」との関係について学ぶ。そして、材料力学Ⅰで学ぶ理論の適用範囲について確認する。
4	10月14日(月) 演習②	棒の伸びと歪と応力(2) 棒に様々な力が作用した場合の棒の「変位」の算出法を学ぶ。
5	10月21日(月)	棒の伸びと歪と応力(3) 「静定」と「不静定」について学び、不静定問題における棒の「変位」の算出法を学ぶ。
6	10月28日(月) 演習③	トラスの変形(1) 複数の棒をピンで結合した「トラス構造」について学び、「静定トラス」に外力を作用させた場合に棒に生じる「応力」や、結合点の「変位」の算出法を学ぶ。
7	11月11日(月)	トラスの変形(2) 前回の発展として、「不静定トラス」に外力を作用させた場合に棒に生じる「応力」や、結合点の「変位」の算出法を学ぶ。また、「静定トラス」も含め、より複雑な「トラス構造」の「変位」の算出法を学ぶ。
8	11月18日(月) 演習④(中間試験)	復習 これまでの復習を行う。
9	11月25日(月)	熱応力 変位を拘束された棒に生じる「熱応力」について学ぶ。
10	12月2日(月) 演習⑤	梁に生じる応力とその合応力 「梁」について学び、「棒」と「梁」の違いを理解する。また、その際に生じる「曲げ応力」と「せん断応力」について学ぶ。そして、「合応力」という概念を学び、その具体例としての「軸力」、「せん断力」ならびに「曲げモーメント」の概念について学ぶ。
11	12月9日(月)	梁に生じるせん断力と曲げモーメント 「梁」に外力を作用させた場合に「梁」に生じる「せん断力」と「曲げモーメント」の算出法を学ぶ。
12	12月16日(月) 演習⑥	SFDとBMD(1) 「せん断力図(SFD)」と「曲げモーメント図(BMD)」の考え方、ならびに描画法を学ぶ。
13	12月23日(月)	SFDとBMD(2) 前回に引き続き、SFDとBMDの描画法について学ぶ。
14	1月20日(月) 演習⑦	曲げ応力の設計への応用 「曲げ応力」について再確認し、曲げを受ける梁の設計法の基礎について学ぶ。
15	1月27日(月)	断面二次モーメント 「断面二次モーメント」の定義およびその計算法を例題を通じてマスターする。特に平行軸の定理による断面二次モーメントの算出法について学ぶ。
16		期末試験(「材料力学Ⅰ」と「材料力学演習Ⅰ」の両方をやります)

なお、参考書として、

を推奨する。航空機の設計・解析に携わっている OB から、この参考書は仕事を進める上で役立っているとの評判を聞いているので、そういった方面に就職したい者は是非、読んでほしい。

なお、中間試験および期末試験の評価基準は以下の通りである。この表では、各項目ともレベル 1 の内容が最も基本的で、レベル 4 が最もレベルが高い内容となっている。それぞれの項目の評価においては、例えば、レベル 1 の内容が理解できていないと判断した場合、たとえ、レベル 2～レベル 4 に相当する問題を解けたとしても、レベル 2～4 については 0 点とする。同様に、レベル 1 の内容は理解できているがレベル 2 の内容が理解できていないと判断した場合、レベル 3 や 4 に相当する問題が解けたとしても、レベル 3 や 4 については 0 点とする。これは、基礎ができていない場合、レベルの高い問題が解けたとしても、単に解き方を知っているだけで、本質が理解できていないと判断されるからである（ただし、項目別に評価するので、例えば、「1. 応力」のレベル 1 が理解できていなかったからといって、「2. 歪」のレベル 2 を 0 点にすることはない）。したがって、勉強する際には、各項目とも、レベル 1 から 2, 3, 4 と、順を追って、しっかりと理解のレベルを高めてほしい。

中間試験評価項目 (38 点)				
	レベル 1 (12 点)	レベル 2 (11 点)	レベル 3 (8 点)	レベル 4 (7 点)
1. 応力 (7 点)	応力の種類を答えられる (2 点)	それぞれの応力の定義を正確に答えられる (2 点)	応力の工学的意義を答えられる (3 点)	
2. 歪 (4 点)	弾性歪の種類を答えられる (2 点)	それぞれの弾性歪の定義を正確に答えられる (2 点)		
3. 軸力分布 (4 点)	一本の棒に複数の軸方向荷重が作用する場合において、各部の軸力を求められる (2 点)	軸力分布図を描くことができる (2 点)		
4. 棒の伸び (6 点)		一本の棒の先端に軸方向荷重が作用する場合において、棒の伸びを求めることができる (1 点)	一本の棒に複数の軸方向荷重が作用する場合において、荷重点の変位を求めることができる (2 点)	不静定棒に軸方向荷重が作用する場合において、荷重点の変位を求めることができる (4 点)
5. トラスの変形 (11 点)	静定トラスにおける力の釣り合い式を立てることができる (1 点)	静定トラスの軸力を求めることができる (2 点)	静定トラスにおける頂点の変位を求めることができる (3 点)	不静定トラスにおける頂点の変位を求めることができる (4 点)
6. 記述方法 (4 点)	式の羅列ではなく、文章で説明している (2 点)	図を用いながら説明している (2 点)		
7. その他 (2 点)	丁寧に読みやすく、濃い字で書かれている (2 点)			

「材料力学演習 I」 期末試験評価項目 (24 点)				
	レベル 1 (6 点)	レベル 2 (5 点)	レベル 3 (7 点)	レベル 4 (6 点)
1. せん断力と曲げモーメント (4 点)			✓ 複雑な荷重分布の問題において、せん断力を求めることができること (2 点) ✓ 複雑な荷重分布の問題において、曲げモーメントを求めることができること (2 点)	
2. SFD, BMD (8 点)	SFD と BMD を描くことができること (2 点)			複雑な荷重分布の問題において、SFD と BMD を描くことができること (6 点)
3. 曲げ応力 (6 点)		梁の任意の断面に生じる曲げ応力を求めることができること (3 点)	曲げ応力を基準とした梁の寸法の設計ができること (3 点)	
4. 記述方法 (4 点)	式の羅列ではなく、文章で説明している (2 点)	図を用いながら説明している (2 点)		
5. その他 (2 点)	丁寧に読みやすく、濃い字で書かれている (2 点)			

「材料力学 I」 期末試験評価項目 (38 点)				
	レベル 1 (13 点)	レベル 2 (20 点)	レベル 3 (2 点)	レベル 4 (3 点)
6. 熱応力 (9 点)	熱応力の発生条件について説明できる (2 点)	✓ 棒に熱が作用する場合の変位を求めることができる (2 点) ✓ 棒に熱が作用する場合の熱応力を求めることができる (2 点)		より複雑な熱応力問題において, 変位や熱応力を求めることができる (3 点)
7. 断面二次モーメント (3 点)	断面二次モーメントを計算できる (3 点)			
8. 曲げ応力と曲げモーメント (6 点)	梁を曲げた際に生じる歪を, 式と図を用いて説明できる (特に, 断面内での歪の分布を図示できる) (2 点)	合応力について説明できること (2 点)	曲げモーメントについて説明ができる (特に, 曲げ応力の合応力としての曲げモーメントの定義を, 式を用いて説明できる) (2 点)	
9. 反力と反モーメント (8 点)	固定支持と単純支持の違いが理解できていること (2 点)	✓ 力の釣り合い式から, 支持点に作用する反力を求めることができること (3 点) ✓ モーメントの釣り合い式から, 支持点に作用する反モーメントを求めることができること (3 点)		
10. せん断力と曲げモーメント (6 点)		✓ 力の釣り合い式から, 梁の各部に生じるせん断力を求めることができること (3 点) ✓ モーメントの釣り合い式から, 梁の各部に生じる曲げモーメントを求めることができること (3 点)		
11. 記述方法 (4 点)	式の羅列ではなく, 文章で説明している (2 点)	図を用いながら説明している (2 点)		
12. その他 (2 点)	丁寧で読みやすく, 濃い字で書かれている (2 点)			

試験・レポート・演習の配分については授業の際に説明する.

なお, このテキストの pdf ファイルを以下の URL にて公開している.

http://forth.aero.cst.nihon-u.ac.jp/lecture/strength_of_materials_I_2019.pdf

目次

第1章	はじめに	1-1
1.1.	材料力学とは	1-1
1.2.	材料力学Ⅰ～Ⅲの内容	1-1
1.3.	講義の概要	1-2
1.4.	「応力」という概念	1-2
1.5.	応力のより厳密な定義	1-3
1.6.	垂直応力とせん断応力	1-3
1.7.	「強度」という概念	1-3
1.8.	弾性変形と塑性変形	1-4
1.9.	変形を想像する感覚	1-4
1.10.	まとめ	1-4
1.11.	次回までの宿題	1-4
第2章	棒に作用する軸力と応力	2-1
2.1.	反力	2-1
2.2.	棒に生じる軸力とその符合	2-1
2.3.	棒の各箇所に生じる軸力	2-1
2.4.	分布力による軸力	2-2
2.5.	棒の各断面に生じる垂直応力	2-3
2.6.	断面積が連続的に変化する棒の応力	2-3
2.7.	まとめ	2-4
2.8.	宿題	2-4
第3章	棒の伸びと歪と応力(1)	3-1
3.1.	引張を受ける棒の伸び方	3-1
3.2.	歪	3-1
3.3.	応力-歪関係（構成則）	3-1
3.4.	先端荷重を受ける棒の伸び	3-2
3.5.	途中で荷重を受ける棒の伸び	3-3
3.6.	分布荷重を受ける棒の伸び	3-3
3.7.	棒の伸びの算出手順	3-3
3.8.	剛体と弾性体との違い	3-4
3.9.	まとめ	3-4
3.10.	宿題	3-4
第4章	棒の伸びと歪と応力(2)	4-1
4.1.	複数の力が作用する棒の伸び	4-1
4.2.	断面が変化する棒の伸び	4-2
4.3.	まとめ	4-2
4.4.	宿題	4-2
第5章	棒の伸びと歪と応力(3)	5-1
5.1.	不静定棒	5-1
5.2.	不静定棒の解き方	5-1
5.3.	効率的な釣り合い式の立て方	5-2
5.4.	まとめ	5-2
5.5.	宿題	5-2
第6章	トラスの変形(1)	6-1
6.1.	トラス構造とラーメン構造	6-1
6.2.	静定トラスの軸力の算出法	6-1

6.3. トラスの変位	6-4
6.4. まとめ	6-6
6.5. 宿題	6-6
第 7 章 トラスの変形(2)	7-1
7.1. 不静定トラス	7-1
7.2. 複数 bay のトラスの変形	7-2
7.3. まとめ	7-2
7.4. 宿題	7-2
第 8 章 熱応力	8-1
8.1. 線膨張係数と熱歪	8-1
8.2. 熱応力	8-1
8.3. まとめ	8-3
8.4. 宿題	8-3
第 9 章 梁による荷重の支持	9-1
9.1. せん断荷重	9-1
9.2. 曲げ変形とせん断変形	9-1
9.3. 梁の断面の実際の変形	9-1
9.4. 曲げによる曲率と歪	9-2
9.5. 曲げ応力	9-3
9.6. せん断応力	9-3
9.7. 合応力	9-3
9.8. 二重積分	9-4
9.9. まとめ	9-5
9.10. 宿題	9-5
第 10 章 梁に生じるせん断力と曲げモーメント	10-1
10.1. 力の釣り合いとモーメントの釣り合い	10-1
10.2. 反力と反モーメント（固定モーメント）	10-1
10.3. 例題	10-2
10.4. なぜ“せん断力”と“曲げモーメント”なのか？	10-5
10.5. まとめ	10-5
10.6. 宿題	10-5
第 11 章 SFD と BMD(1)	11-1
11.1. SFD と BMD	11-1
11.2. せん断力と曲げモーメントとの関係	11-2
11.3. まとめ	11-2
11.4. 宿題	11-2
第 12 章 SFD と BMD(2)	12-1
12.1. 例題	12-1
12.2. まとめ	12-2
12.3. 宿題	12-2
第 13 章 曲げ応力の設計への応用	13-1
13.1. 座標系	13-1
13.2. 曲げモーメントと曲げ応力との関係	13-1
13.3. 許容応力と安全率	13-1
13.4. 曲げ設計	13-2
13.5. 例題	13-3
13.6. まとめ	13-4

13.7. 宿題	13-4
第 14 章 断面二次モーメントの算出法	14-1
14.1. 断面二次モーメントの定義	14-1
14.2. 例題(1)	14-1
14.3. 平行軸の定理	14-1
14.4. 例題(2)	14-1
14.5. まとめ	14-2
14.6. 宿題	14-2

図目次

図 1.1.1 変形の例	1-1
図 1.1.2 棒の座屈 (buckling) の例	1-1
図 1.4.1 引張荷重を受ける棒	1-2
図 1.5.1 応力の定義	1-3
図 1.5.2 分布荷重	1-3
図 1.6.1 せん断応力	1-3
図 2.1.1 力の釣り合い	2-1
図 2.1.2 棒における力の釣り合い	2-1
図 2.1.3 壁からの反力	2-1
図 2.1.4 壁に作用する力	2-1
図 2.3.1 軸力の算出【例題 2.1】	2-1
図 2.3.2 棒のフリーボディーダイアグラム【例題 2.1】	2-2
図 2.3.3 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 1)	2-2
図 2.3.4 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 2)	2-2
図 2.3.5 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 3)	2-2
図 2.3.6 軸力の分布図【例題 2.1】	2-2
図 2.3.7 軸力の算出【例題 2.2】	2-2
図 2.3.8 軸力の分布図【例題 2.2】	2-2
図 2.4.1 重力を受ける棒	2-3
図 2.4.2 重力を受ける棒の軸力分布	2-3
図 2.4.3 重力を受ける棒の軸力	2-3
図 2.5.1 断面積が一樣でない棒	2-3
図 2.5.2 断面積が一樣でない棒の応力分布図	2-3
図 2.6.1 重力を受ける棒の応力分布	2-3
図 2.6.2 重力を受ける棒の力の釣り合い	2-4
図 2.6.3 重力を受ける棒の応力分布	2-4
図 2.8.1 応力が一樣な棒	2-4
図 3.1.1 引張を受ける棒の変形	3-1
図 3.2.1 棒の歪	3-1
図 3.3.1 典型的な (真の) 応力-歪線図	3-2
図 3.3.2 歪の分布	3-2
図 3.4.1 先端に引張荷重を受ける棒	3-2
図 3.4.2 先端に圧縮荷重を受ける棒	3-3
図 3.5.1 途中に引張荷重を受ける棒	3-3
図 3.6.1 重力を受ける棒の伸び	3-3
図 3.6.2 伸びの算出【例題 3.1】	3-3
図 3.7.1 棒の伸びの算出手順 (その 1)	3-4
図 3.7.2 棒の伸びの算出手順 (その 2)	3-4
図 4.1.1 伸びの算出【例題 4.1】	4-1
図 4.1.2 伸びの算出【例題 4.1】	4-1
図 4.1.3 伸びの算出【例題 4.3】	4-1
図 4.1.4 力の釣り合い【例題 4.3】	4-2
図 4.2.1 断面が変化する棒の伸び【例題 4.4】	4-2
図 4.2.2 重力を受ける棒の伸び【例題 4.6】	4-2
図 5.1.1 不静定棒	5-1
図 5.1.2 不静定棒におけるフリーボディーダイアグラム	5-1
図 5.1.3 不静定棒における力の釣り合い	5-1
図 5.3.1 切断とジョイントでの力の釣り合い	5-2

図 5.3.2	力の釣り合い (【例題 5.1】1))	5-2
図 5.5.1	上下を固定された棒	5-3
図 6.1.1	トラス構造の例	6-1
図 6.1.2	ラーメン構造とトラス構造	6-1
図 6.1.3	トラス構造では成り立たない例	6-1
図 6.2.1	静定トラスの軸力【例題 6.1】	6-1
図 6.2.2	トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.1】	6-2
図 6.2.3	静定トラスの軸力【例題 6.2】	6-2
図 6.2.4	トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.2】	6-2
図 6.2.5	静定トラスの軸力【例題 6.3】	6-2
図 6.2.6	トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.3】	6-2
図 6.2.7	静定トラスの軸力【例題 6.4】	6-3
図 6.2.8	静定トラスの軸力【例題 6.5】	6-3
図 6.2.9	トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.5】	6-3
図 6.2.10	静定トラスの軸力【例題 6.6】	6-3
図 6.2.11	静定トラスの軸力分布【例題 6.6】	6-4
図 6.2.12	静定トラスの軸力【例題 6.7】	6-4
図 6.2.13	静定トラスの軸力【例題 6.8】	6-4
図 6.3.1	トラスの変位【例題 6.9】	6-4
図 6.3.2	棒の伸びの算出法	6-5
図 6.3.3	静定トラスの軸力【例題 6.2】	6-5
図 6.3.4	静定トラスの変位【例題 6.11】	6-6
図 6.3.5	変形後の頂点の位置【例題 6.11】	6-6
図 6.3.6	静定トラスの変位【例題 6.12】	6-6
図 7.1.1	不静定トラスの変位【例題 7.1】	7-1
図 7.1.2	不静定トラスの変位【例題 7.2】	7-1
図 7.2.1	棒の伸びの算出	7-2
図 7.2.2	不静定トラスの変位【例題 7.3】	7-2
図 8.1.1	加熱と荷重による棒の伸び	8-1
図 8.2.1	熱応力【例題 8.1】	8-1
図 8.2.2	熱応力【例題 8.2】	8-2
図 8.2.3	熱応力【例題 8.3】	8-2
図 8.2.4	熱変形【例題 8.4】	8-2
図 8.2.5	熱変形【例題 8.5】	8-2
図 9.1.1	せん断荷重を受ける梁	9-1
図 9.1.2	せん断荷重を受ける梁の曲げ変形	9-1
図 9.1.3	せん断荷重を受ける矩形物体のせん断変形	9-1
図 9.2.1	曲げ変形	9-1
図 9.2.2	せん断変形	9-1
図 9.3.1	梁の断面の変形	9-2
図 9.4.1	曲率半径	9-2
図 9.4.2	梁の微小部分の変形	9-2
図 9.4.3	梁の断面に沿った座標	9-2
図 9.5.1	曲げ応力分布	9-3
図 9.6.1	せん断歪	9-3
図 9.6.2	せん断応力	9-3
図 9.6.3	梁のせん断応力	9-3
図 9.7.1	垂直応力分布	9-3
図 9.8.1	二重積分【例題 9.1】	9-4
図 9.8.2	微小部分の体積	9-4
図 9.8.3	矩形断面の断面二次モーメント	9-4
図 9.8.4	円断面の断面二次モーメント	9-5
図 10.1.1	梁の釣り合い	10-1
図 10.2.1	反力と反モーメント	10-1
図 10.2.2	反力を考慮した梁の釣り合い	10-2
図 10.3.1	せん断力と曲げモーメント【例題 10.1】	10-2
図 10.3.2	梁の釣り合い【例題 10.1】 (その 1)	10-2
図 10.3.3	梁の釣り合い【例題 10.1】 (その 2)	10-2
図 10.3.4	せん断力と曲げモーメント【例題 10.2】	10-2
図 10.3.5	反力【例題 10.2】	10-2
図 10.3.6	梁の釣り合い【例題 10.2】 (その 1)	10-2
図 10.3.7	梁の釣り合い【例題 10.2】 (その 2)	10-3
図 10.3.8	せん断力と曲げモーメント【例題 10.3】	10-3

図 10.3.9	せん断力と曲げモーメント【例題 10.4】	10-3
図 10.3.10	梁の釣り合い【例題 10.4】	10-3
図 10.3.11	分布荷重を受ける梁の釣り合い	10-4
図 10.3.12	分布荷重を受ける梁の等価問題	10-4
図 10.3.13	図心の計算	10-4
図 10.3.14	せん断力と曲げモーメント【例題 10.5】	10-4
図 10.3.15	梁の釣り合い【例題 10.5】	10-4
図 10.3.16	せん断力と曲げモーメント【例題 10.6】	10-4
図 10.3.17	梁の釣り合い【例題 10.6】	10-4
図 10.3.18	せん断力と曲げモーメント【例題 10.7】	10-5
図 11.1.1	梁の SFD と BMD の算出例	11-1
図 11.1.2	SFD と BMD【例題 11.1】	11-1
図 11.1.3	SFD と BMD の解【例題 11.1】	11-1
図 11.1.4	SFD と BMD【例題 11.2】	11-1
図 11.1.5	SFD と BMD の解【例題 11.2】	11-1
図 11.1.6	SFD と BMD【例題 11.3】	11-1
図 11.1.7	SFD と BMD【例題 11.4】	11-1
図 11.1.8	SFD と BMD の解【例題 11.4】	11-2
図 11.1.9	SFD と BMD【例題 11.5】	11-2
図 11.1.10	SFD と BMD【例題 11.6】	11-2
図 11.1.11	SFD と BMD【例題 11.7】	11-2
図 11.2.1	梁の微小部分でのつり合い	11-2
図 12.1.1	SFD と BMD【例題 12.1】	12-1
図 12.1.2	SFD と BMD【例題 12.2】	12-1
図 12.1.3	SFD と BMD【例題 12.3】	12-1
図 12.1.4	SFD と BMD【例題 12.4】	12-1
図 12.1.5	SFD と BMD【例題 12.5】	12-1
図 12.1.6	SFD と BMD【例題 12.6】	12-1
図 12.1.7	SFD と BMD【例題 12.7】	12-1
図 12.1.8	SFD と BMD【例題 12.8】	12-1
図 12.1.9	SFD と BMD【例題 12.9】	12-1
図 12.1.10	SFD と BMD【例題 12.10】	12-1
図 13.1.1	座標系の例	13-1
図 13.1.2	軸力の例	13-1
図 13.1.3	せん断力の例	13-1
図 13.1.4	曲げモーメントの例	13-1
図 13.1.5	座標系の例	13-1
図 13.4.1	曲げ設計【例題 13.2】	13-2
図 13.5.1	曲げ設計【例題 13.2】	13-3
図 13.5.2	曲げ設計【例題 13.3】	13-3
図 13.5.3	曲げ設計【例題 13.4】	13-3
図 13.5.4	曲げ設計【例題 13.5】	13-3
図 13.5.5	曲げ設計【例題 13.6】	13-3
図 13.5.6	曲げ設計【例題 13.7】	13-3
図 13.5.7	曲げ設計【例題 13.8】	13-3
図 13.5.8	曲げ設計【例題 13.9】	13-4
図 13.5.9	曲げ設計【例題 13.10】	13-4
図 14.2.1	断面二次モーメント【例題 14.2】	14-1
図 14.2.2	断面二次モーメント【例題 14.2】	14-1
図 14.3.1	平衡軸の定理	14-1
図 14.4.1	断面二次モーメント【例題 14.2】	14-1
図 14.4.2	断面二次モーメント【例題 14.2】	14-2

表目次

表 1.2.1	講義の概要	1-1
表 3.3.1	材料のヤング率	3-2
表 8.1.1	材料の線膨張係数	8-1

例題目次

【例題 2.1】軸力の算出(1)	2-1
【例題 2.2】軸力の算出(2)	2-2
【例題 2.3】軸力の算出(3)	2-2
【例題 2.4】軸力の算出(4)	2-3
【例題 2.5】応力の算出	2-3
【例題 3.1】伸びの算出(1)	3-3
【例題 4.1】伸びの算出(2)	4-1
【例題 4.2】伸びの算出(3)	4-1
【例題 4.3】伸びの算出(4)	4-1
【例題 4.4】伸びの算出(5)	4-2
【例題 4.5】伸びの算出(6)	4-2
【例題 4.6】伸びの算出(7)	4-2
【例題 5.1】伸びの算出(8)	5-2
【例題 6.1】静定トラスの軸力(1).....	6-1
【例題 6.2】静定トラスの軸力(2).....	6-2
【例題 6.3】静定トラスの軸力(3).....	6-2
【例題 6.4】静定トラスの軸力(4).....	6-2
【例題 6.5】静定トラスの軸力(5).....	6-3
【例題 6.6】静定トラスの軸力(6).....	6-3
【例題 6.7】静定トラスの軸力(7).....	6-4
【例題 6.8】静定トラスの軸力(8).....	6-4
【例題 6.9】静定トラスの変位(1).....	6-4
【例題 6.10】静定トラスの変位(2).....	6-5
【例題 6.11】静定トラスの変位(3).....	6-5
【例題 6.12】静定トラスの変位(4).....	6-6
【例題 7.1】不静定トラスの変位(1)	7-1
【例題 7.2】不静定トラスの変位(2)	7-1
【例題 7.3】不静定トラスの変位(3)	7-2
【例題 8.1】熱応力による変形(1).....	8-1
【例題 8.2】熱応力による変形(2).....	8-1
【例題 8.3】熱応力による変形(3).....	8-2
【例題 8.4】熱変形(1)	8-2
【例題 8.5】熱変形(2)	8-2
【例題 9.1】二重積分(1).....	9-4
【例題 9.2】二重積分(2).....	9-4
【例題 9.3】断面二次モーメントの例題.....	9-4
【例題 10.1】せん断力と曲げモーメント(1).....	10-2
【例題 10.2】せん断力と曲げモーメント(2).....	10-2
【例題 10.3】せん断力と曲げモーメント(3).....	10-3
【例題 10.4】せん断力と曲げモーメント(4).....	10-3
【例題 10.5】せん断力と曲げモーメント(5).....	10-4
【例題 10.6】せん断力と曲げモーメント(6).....	10-4
【例題 10.7】せん断力と曲げモーメント(7).....	10-4
【例題 11.1】SFD と BMD(1).....	11-1
【例題 11.2】SFD と BMD(2).....	11-1
【例題 11.3】SFD と BMD(3).....	11-1
【例題 11.4】SFD と BMD(4).....	11-1
【例題 11.5】SFD と BMD(5).....	11-2
【例題 11.6】SFD と BMD(6).....	11-2
【例題 11.7】SFD と BMD(7).....	11-2
【例題 12.1】SFD と BMD(8).....	12-1
【例題 12.2】SFD と BMD(9).....	12-1
【例題 12.3】SFD と BMD(10).....	12-1
【例題 12.4】SFD と BMD(11).....	12-1
【例題 12.5】SFD と BMD(12).....	12-1
【例題 12.6】SFD と BMD(13).....	12-1
【例題 12.7】SFD と BMD(14).....	12-1
【例題 12.8】SFD と BMD(15).....	12-1
【例題 12.9】SFD と BMD(16).....	12-1
【例題 12.10】SFD と BMD(17)	12-1
【例題 13.1】曲げ設計(1)	13-2

【例題 13.2】 曲げ設計(2)	13-3
【例題 13.3】 曲げ設計(3)	13-3
【例題 13.4】 曲げ設計(4)	13-3
【例題 13.5】 曲げ設計(5)	13-3
【例題 13.6】 曲げ設計(6)	13-3
【例題 13.7】 曲げ設計(7)	13-3
【例題 13.8】 曲げ設計(8)	13-3
【例題 13.9】 曲げ設計(9)	13-3
【例題 13.10】 曲げ設計(10)	13-4
【例題 14.1】 断面二次モーメント(1).....	14-1
【例題 14.2】 断面二次モーメント(2).....	14-1
【例題 14.3】 断面二次モーメント(3).....	14-1
【例題 14.4】 断面二次モーメント(4).....	14-1
【例題 14.5】 断面二次モーメント(5).....	14-1

第1章 はじめに

材料力学という分野をはじめて学ぶにあたり、本学科に設置している材料力学関連の科目、すなわち、「材料力学Ⅰ」、「材料力学Ⅱ」、「材料力学Ⅲ」の流れについて確認する。また、「材料力学Ⅰ」で学ぶ内容について確認する。そして、最初に理解しておくべきものとして、「応力」という概念とその定義、「強度」という概念について学ぶ。

1.1. 材料力学とは

一般に、物体は外力（external force. 材料力学や構造力学の世界では、荷重（load）と呼ばれることが多い）を受けると変形する。変形の種類としては、例えば次のようなものがある。

- (a) 伸び（引張、ひっぱり、extension）
- (b) 縮み（圧縮、compression）
- (c) 曲げ（bending, flexure）
- (d) ねじり（torsion,）
- (e) せん断（“ひしゃげる”ような変形、shear）

棒（bar）の変形を例にこれらを図示したのが図 1.1.1 である。

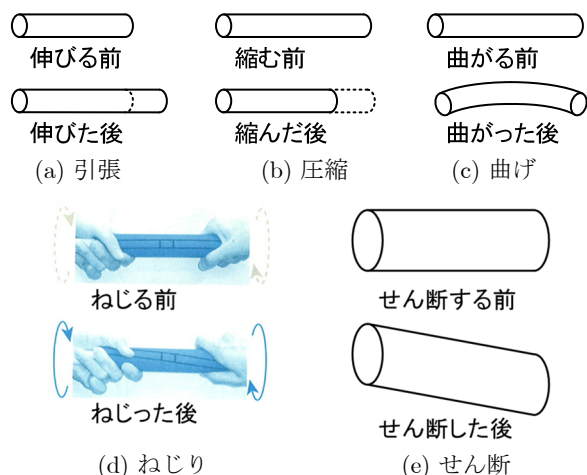


図 1.1.1 変形の例

(JSME テキストシリーズ「材料力学」, p.47)

このように、荷重をかけることで物体は変形するが、荷重が小さければ、その荷重を加えることをやめれば、物体の形は元に戻るであろう。しかし、荷重が大きすぎると、荷重をかけるのをやめても、変形が元に戻らなくなったり、荷重が大きすぎると破壊に至ったりする。このような、物体にとってクリティカルな状況になるまでに大きな荷重をかけなければならないような場合、その物体の**強度**（strength）が大きいと表現する。逆に、小さな力でもこのような状況になる場合、その物体の強度は小さいと表現する。具体的に、強度をどのような数式で表すかについては後述する。

また、そのようなクリティカルな状況に至る前において、同じ力を作用させてもほとんど変形しないような物体もあれば、大きく変形する物体もあるであろう。例えば、鉄は引っ張ってもなかなか伸びないが、ゴムはよく伸びる。このように、同じ力でも変形が小さい物体は「**剛性**（stiffness）が大きい」と表現し、変形が大きい物体は「剛性が小さい」と表現する。

この他、例えば、図 1.1.2 のように、棒を立てて、先端におもりを載せると、おもりが軽い場合には、棒は立ったままであるが、おもりが大きいと、棒は横に倒れるであろう。実際、「材料力学Ⅱ」で学ぶ通り、おもりのある値を超える

と、突然、棒は横に倒れる。このような現象は座屈（buckling）と呼ばれ、航空機の設計の際などに重要な問題となる。このような問題では、倒れる前（座屈する前）は、棒は**安定**（stable）であると表現し、倒れる（座屈する）瞬間、棒は**不安定**（unstable）になると表現する（「安定」と「不安定」の数学的な定義については 3 年次のいくつかの科目の講義で学ぶことになる）。

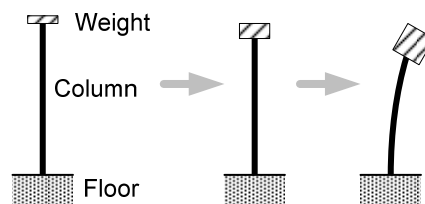


図 1.1.2 棒の座屈（buckling）の例

材料力学は、このように、物体に荷重をかけた場合の物体の強度や剛性、安定性（stability）について理論的および実験的に考える学問である。

※ 実は、見る角度を変えると、曲げやねじり、せん断は、全て、互いに直交する方向の引張（あるいは圧縮）の組み合わせで表現できる。これについては「材料力学Ⅲ」で学ぶことになるだろう。

1.2. 材料力学Ⅰ～Ⅲの内容

本学科では、「材料力学Ⅰ」～「材料力学Ⅲ」の 3 科目を通じて材料力学を学ぶ。具体的には、この 3 科目で以下のような内容を学ぶ。

表 1.2.1 講義の概要

材料力学Ⅰ
1) 棒（bar）の変形理論の理解を通じて、強度や剛性、応力（stress）、歪（strain）といった、材料力学の基礎となる概念を理解する。
2) 梁（はり、beam）に作用するせん断力（shear force）と曲げモーメント（bending moment）や、梁に生じる曲げ応力（bending stress）の算出法を学ぶ。
材料力学Ⅱ
1) 梁の曲げ変形理論の理解を通じて、物体の変形についてさらに理解を深める。
2) 柱（column）の座屈理論の理解を通じて、物体の安定性について理解する。
材料力学Ⅲ
1) 立体に作用する三次元の応力成分と、立体内の微小部分の力の釣り合い方程式について学ぶ。
2) 任意の方向の応力成分の求め方を学ぶ。
3) 歪エネルギーの概念を学び、エネルギー法を用いた変形量の算出法を学ぶ。
4) 有限要素法と呼ばれる構造解析手法について学ぶ。

ここで、「棒」や「梁」、「柱」、「応力」や「歪」、「せ

「せん断力」や「曲げモーメント」といった専門用語が出てきたが、これについては追々、学んでゆくことになる。ここでは、「棒」と「梁」についてのみ簡単に解説しよう。

「棒」も「梁」も細長い物体である。ただし、「棒」は、軸に沿った方向にしか力が作用していない物体であり、「梁」は、軸に垂直な方向にせん断力（物体を「ひしゃげさせる」力）や曲げモーメント（物体を曲げようとする、力のモーメント）が作用する物体である。つまり、作用する力の方向が違う。それにより、これらを何かの支持部材に使う場合、支え方が異なることになる（このことを図でイメージできますか？）。

さて、この講義では、毎回、宿題として、手書きのレポートを A4 で提出することになる。これらの宿題は全て提出すること。

1.3. 講義の概要

表 1.2.1 にも示した通り、この講義では以下の内容について学ぶ。

- 1) 一本の棒に荷重をかけた場合に棒の各部に生じる「軸力」（axial force）、「変位」（displacement）、「応力」，「歪」の算出法
- 2) 複数のピン支持された棒からなる骨組構造，すなわち，トラス（truss）構造に荷重をかけた場合の，それぞれの棒（部材）に生じる軸力，応力，歪，そして，骨組みの結合点（頂点）の変位の算出法
- 3) 梁に荷重をかけた場合に梁の各部に生じるせん断力と曲げモーメント，ならびに曲げ応力の算出法
- 4) 断面二次モーメントの算出法

これら，様々な量の算出法を学びながら，それらの量の概念そのものを理解してゆく。これらは材料力学の基礎となる部分であり，「材料力学Ⅱ」や「材料力学Ⅲ」でも必須の知識となるので，必ずマスターしてほしい。

1.4. 「応力」という概念

長さが同じ太い棒と細い棒をそれぞれ同じ力で引っ張った場合，伸び（変位）は同じであろうか？

細い棒の方が変位が大きくなることは，おそらく誰もが想像できるであろう。

では，断面積が A_1 である棒 A に引張荷重 P をかけたときの伸びと，断面積が A_2 である棒 B に引張荷重 Q をかけたときの伸びが同じになるようにするには， Q をいくつにすればよいだろうか？

詳細は第 2 章で述べるが，次の関係が成り立つとき，二つの棒の伸び方は同じになる。つまり，「単位面積当たりの力」が同じであれば，伸び方が同じになる。

$$\frac{P}{A_1} = \frac{Q}{A_2} \quad (1.3.1)$$

そこで，これを「**応力**」（stress）と呼ぶ。単位は，上式からわかる通り，圧力と同じ，Pa（ $=\text{N}/\text{m}^2$ ）である。

しかし，「応力」という概念は，単に「単位面積当たりの力」というものにとどまらない（でなければ，圧力と何ら変わらない）。

物体に外力を作用させると，その外力の影響は物体内の隅々にまで及び，物体内部の任意の点に**力が伝わる**ことになる（外力の影響が物体内に「浸透する」というイメージ）。応力とは，この伝わった力に関して，「単位面積当たりの力」を算出したものである。つまり，応力とは，「**物体に荷重をかけた場合に，物体内部に生じる単位面積当たりの力**」であ

る。この表現からわかる通り，**応力は，物体内の場所によって異なる**（たまたま同じ値の場合もあるが）。そして，これが最も重要なことなのであるが，**同じ点であっても，それが定義される面の向きによって応力は異なる**。

これはどういう意味か，棒を例に考えてみよう。いま，図 1.4.1(a) のように先端 A に引張荷重 P を受ける，断面積 A の棒があったとしよう。ここで，この荷重の P の「浸透」の状況を考えるには，図 1.4.1(b) のように，**棒を途中の点 B で仮想的に切断**してみるのがよい（この発想が重要！）。すると，図 1.4.1(c) の仮想断面 B1 には荷重 P と同じ値の力が作用しているであろう。したがって，仮想断面 B1 に生じている応力を σ （シグマ）と書くと，

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.3.2)$$

となる。しかし，同じ点 B でも，図 1.4.1(d) のように仮想断面 B2，B3 に作用する力はなく，この面の応力は 0 となる。このように，面の向きによって応力は値が変わる（そもそも，「点 B」という表現自体が本来はおかしく，「断面 B」表現するのがよいし，ある点を指定するのであれば，「断面 B1 の中の中央の点」とか「上面の奥側の頂点」とかいった，具体的な指定をすべきであろう。これについては，次節で解説する）。

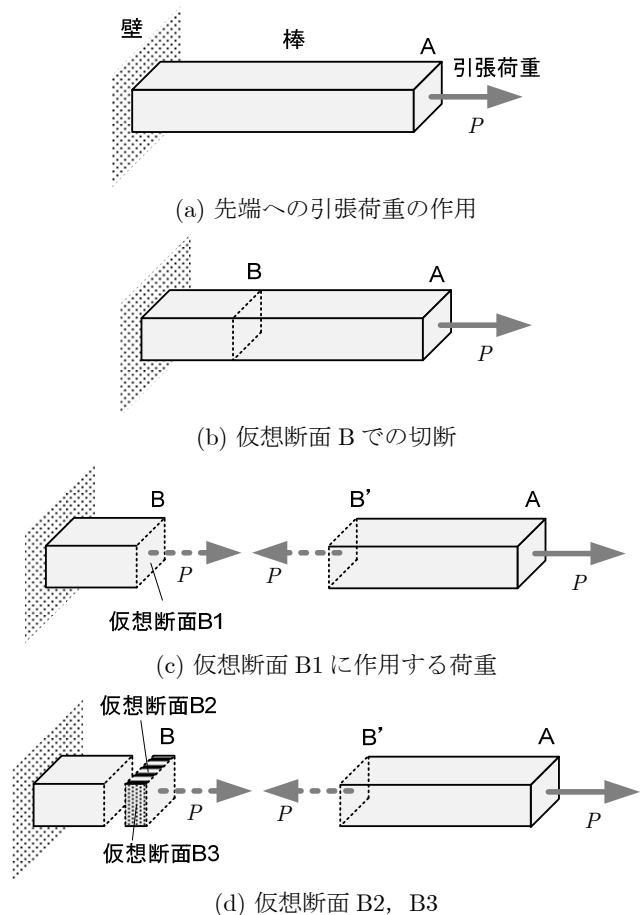


図 1.4.1 引張荷重を受ける棒

※ 上述のように，棒をある断面で**仮想的に切る**，という発想はとても重要であり，第 2 章以降でも多用するので，慣れていってほしい。

※ なお，この例題では，どこで切断しても，仮想断面に作用する力は P である。しかし，外力のかけ方によっては，場所によって断面に作用する力が異なる場合がある。それについては第 2 章以降に学ぶ。

1.5. 応力のより厳密な定義

図 1.4.1 を見て、少し違和感を感じるかもしれない。まず、「点 B」という表現である。図 1.4.1 では、「点 B」といいつつ、棒を断面で切って、そこを「点 B」と称している。実際には、「点」というのは、文字通り、一点、すなわち、限りなく小さい場所を表現するものであるはずである。実際、この違和感は正しく、本来、応力を定義する場合、図 1.5.1 のように、ある一点 C 付近の限りなく小さい直方体を考え、その直方体の各面に作用する力を考えるのが正しい。つまり、図 1.4.1 のような切り方では、仮想断面 B1 の中での場所によって応力は異なる可能性があり、応力を厳密に定義しようとすれば、仮想断面 B1 の中のどここの場所（点）であるかを明確にする必要がある。

実は、棒を引っ張る場合、初歩の材料力学では仮想断面 B1 の中のどの箇所も応力は同じであろう、という仮定（近似）を用いている。それゆえ、仮想断面 B1 という広い面で応力を定義している。

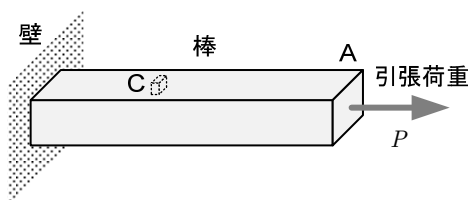


図 1.5.1 応力の定義

ここで、もう一つ、違和感を感じるだろう。「そもそも、仮想断面 B1 内のどの場所でも応力は同じなのであろうか?」、「先端 A の断面の真ん中に P をかけた場合、真ん中付近は大きな応力になるだろうが、端の方は小さいのではないだろうか?」、と感ずるのではないだろうか?

この違和感をもっともで、実際、先端 A の断面の真ん中に集中荷重を作用させた場合、応力は断面内で一様にはならない（これが流体と固体の違うところ）。そこで、「材料力学 I」で「先端に外力 P を作用させる」というような表現が出てきたら、これは、図 1.5.2 のように、単位面積当たりの力が p の分布荷重が断面全体に一様に作用していて、断面積を A とすれば、 $P = pA$ となっている、と思えばよいだろう。



図 1.5.2 分布荷重

※ 一般に、「物体のある一点に集中荷重 P を加える」という表現は力学ではよく使う。しかし、「点」は面積を持たないので、力を加えようがないし、実際には、「点」ではなく、「面積が微小な領域」に力を加えることになる。しかも、それは、「力」ではなく、「分布力」、すなわち、圧力のようなものであるはずである。そして、この「分布力」の単位面積あたりの大きさを p 、それを作用させる微小領域の面積を A とすれば、「力」 P の値は、 $P = pA$ となっているはずである。つまり、 $p = P / A$ である。また、この式から、ある力を加えるときに、それを受ける面積 A が小さいと、分布力 p は非常に大きな値になることがわかる。しかも、 p はその微小部分での応力そのものであるので、 p が大きいということは、応力が大きいということで、1.7 節で述べる通り、その微小部分は壊れることになる。例えば、針で簡単に穴が空くのは、このよう

な理由による。なお、集中荷重はデルタ関数で表現される。

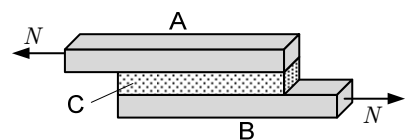
1.6. 垂直応力とせん断応力

図 1.6.1(a)のように、棒 C が棒 A と棒 B に挟まれて結合しているとしよう。この系において、棒 A と棒 B に図 1.6.1(a)のように引張荷重 P を作用させると、棒 C には棒 A との結合部分に棒 A の荷重 P が伝わることになる（図 1.6.1(b)のハッチングの部分。この部分の面積を A とする）。棒 B からの荷重も同様に、棒 C の仮面側に伝わることになる。その結果、棒 C は図 1.6.1(c)のようにせん断変形を起こすことになる。このとき、棒 C の応力状態は、明らかに、図 1.5.1 のように引張荷重を受ける場合とは異なる。図 1.6.1(c)のように、せん断荷重を受ける場合、その作用面積 A でせん断荷重 N を割ったもの（ τ と書くことにする）をせん断応力（shear stress）と呼ぶ。

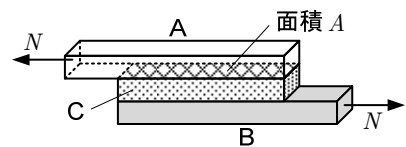
$$\tau = \frac{N}{A} \quad (1.5.1)$$

せん断応力は、荷重が作用面に平行に作用する場合の応力を表している。

これに対し、図 1.5.1 のように、作用面（断面）に垂直な方向に荷重がかかる場合の応力は垂直応力（normal stress）と呼ばれる。



(a) せん断荷重



(b) せん断荷重の伝達



(c) 棒 C のせん断変形 (真横から見た図)

図 1.6.1 せん断応力

※ この例のように、荷重がどの部材のどの面で伝わるか、という、「荷重伝達」という発想は、構造設計において最も重要となるので、機械や構造物を見るときには、それに加わる力（重力も含めて）がどう伝わっていくかをいつも考えていると、優れた設計者になれるだろう。

1.7. 「強度」という概念

さて、なぜ応力という概念を導入するかといえば、応力は機械や構造物の設計に必須となる量であるからである。

なぜ必須となるか、理由をひと言でいえば、「物体のある部分に作用する応力がある値を超えると、その部分は壊れる」ということを昔の賢人が発見したからである。力がどんなに大きくても、応力が小さければ壊れないし、逆に、力が小さくても、応力が大きければ物体は壊れる。いわゆる応力集中がそのいい例である（だから、設計をする時、例えば、内側の角にも R を付けるなどの処置を施す）。

その意味では、物体をみたら常に「これには応力がどうかかっているだろうか?」と瞬間的に考える感覚が構造解析の担当者には必要となる。

さて、皆さんは「強度」あるいは「強度設計」という言葉を耳にしたことがあるだろう。「強度」とは、簡単に言えば、「その物体の強さ」、すなわち、「どれくらいの荷重に耐えられるか」を意味している。上述の通り、物体は、応力がある値を超えると壊れる（荷重に耐えられなくなる）ので、強度を数値で表すとすると、

「強度」＝「物体が荷重に耐えられなくなるときの応力」

と考えればよい。ただし、「耐えられなくなる」という状況は、その物体の使い方によって異なる。つまり、「耐えられなくなる」＝「壊れる」という場合もあれば、「耐えられなくなる」＝「変形が元に戻らなくなる」という場合もあるであろう。したがって、ひとくちに「強度計算」、「強度設計」と言っても、「どのような状態にならないための計算や設計か」ということをきちんと頭の中に入れた上で計算や設計を行う必要がある。

1.8. 弾性変形と塑性変形

物体に荷重をかけて変形させた後、その荷重をはずすと、物体の状態が元に戻る、つまり、変形がなくなる場合と、変形が完全には元に戻らず、変形が残ったままになってしまう場合がある。例えば、プラスチックの定規を曲げても、手を離せば元に戻るだろう。しかし、針金を折り曲げると、手を放しても、完全には元に戻らず、少し折り曲がりが残るだろう。

荷重をはずした際に元に戻るような変形は**弾性変形**（elastic deformation）と呼ばれ、荷重をはずした後に残った変形は**塑性変形**（plastic deformation）と呼ばれる。

通常、“柔らかい”物体（柔軟（flexible）な物体）に小さな荷重をかけると弾性変形のみを起こすが、そうでない場合（柔軟でない物体、あるいは、荷重が大きい場合）は、荷重をかけると弾性変形と塑性変形の両方が生じ、荷重をはずすと、弾性変形はなくなるが、塑性変形が残る。

一般に、塑性変形は、物体に生じる応力がある値を超えると起こる（そこで、この応力の値を「強度」の尺度にする場合もある）。その応力の値は物体を構成する素材（材料、material）によって異なる。

「材料力学Ⅰ」では、基本的には弾性変形のみを取り扱う。つまり、応力が上記の値を超えないような状況における議論をする。

※ 上述の弾性変形や塑性変形の定義は、実は少しあいまいな定義であり、厳密には「弾性歪」、「塑性歪」といった、「歪」と呼ばれるもので定義される。これについては第2章で学ぶ。

1.9. 変形を想像する感覚

航空宇宙工学における材料力学が対象とするものは、航空機やロケット、人工衛星・探査機の変形であり、変形するといっても、「変形しているかしていないか見た目にはわからない程度」と思うかもしれない（もちろん、例えば、自身のときにビルが揺れるような映像を見たことがある人は、“頑丈なものでも結構変形する”という感覚をもっているかもしれない）。

しかし、見た目にはわからないような、わずかな変形が物体にとっては重要であり、「壊れる／壊れない」といった議論をする際は、そのわずかな変形がキーとなる。

とはいっても、なかなかピンとこないかもしれないので、変形を考える際は、たとえ対象が航空機やロケットであったとしても、例えば、ゴムのような柔らかいものでできていると思っていると、変形を想像しやすいであろう。

設計者にとって、この「想像」が非常に重要となることは言うまでもない。

1.10. まとめ

今回は材料力学はどんな学問であるかについて学び、「材料力学Ⅰ」で学ぶ内容について確認した。また、「応力」の概念、「強度」の概念について学んだ。キーワードは次の通りである。

- 伸び・縮み
- 曲げ
- ねじり
- せん断
- 強度
- 剛性
- 軸力
- 応力
- 荷重
- 引張（ひっぱり）
- 垂直応力
- せん断応力
- 弾性変形
- 塑性変形

1.11. 次回までの宿題

- 1) 正方形の板を押すか引っ張るかすることで純粋にひしゃげさせる（せん断変形だけをさせる）には、どの方向に押したり引っ張ったりすればよいと思うか（押しったり引っ張ったりする箇所は何か所でもいい）。
- 2) 一端を壁に固定された丸棒を引っ張ると、棒はどんな形になると思うか？図で示しなさい。

第2章 棒に作用する軸力と応力

第1章では応力について学んだ。今回の講義では、「反力」，「フリーボディーダイアグラム」について学びながら，棒の各部に作用する軸力や応力の算出法を理解する。

2.1. 反力

例えば，図 2.1.1 のように，物体に外力 $P_1 \sim P_4$ が作用し，この物体が静止していたとすると，これら 4 つの外力は釣り合っていないといけない。では，図 2.1.2 のように棒が壁に固定されて静止している場合，力の釣り合いはどうなっているのだろうか？

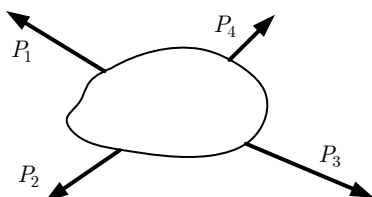


図 2.1.1 力の釣り合い



図 2.1.2 棒における力の釣り合い

壁に固定されているようにされていないが，棒が静止しているということは，棒に作用する力は釣り合っているはずである。しかし，図 2.1.2 には，棒に作用する力として P しか示されておらず，これだけでは決して釣り合うことはない。つまり，この図には何かが足りないのである。それは何かといえば，「壁が棒に加える力」である。棒が先端で引っ張られる時，壁は，棒が引っ張られて動かないよう，引き留めてくれているわけで，引き留めるために壁は棒に力を与えているはずである。それを図示したのが図 2.1.3 であり，この図において， R が，壁が棒に加える力である。

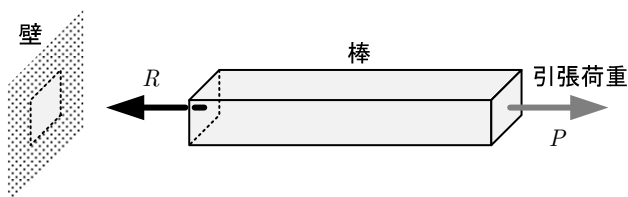


図 2.1.3 壁からの反力

この図から，棒に作用する力の釣り合いは

$$P - R = 0 \quad (2.1.1)$$

と書いて，

$$R = P \quad (2.1.2)$$

を得る。この式からもわかる通り，この力 R は，棒が引張荷重 P を受けていなければ 0 となり（当然といえば当然），荷重を受けることに応じて発生する力である。その意味で，この力は**反力**（reaction force）と呼ばれる。

※ 作用・反作用の法則からわかる通り，壁は棒から R だけの引張力を受ける（図 2.1.4）。

※ この授業では取り扱わないが，この反力が大きいと，壁

の強度がもたなくて，棒が壁から抜けてしまい，壁がごっそり持っていられる，といった現象が起こる（想像できますか？）。その意味で，反力は設計上，重要となる。

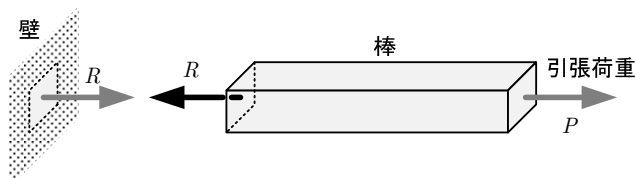


図 2.1.4 壁に作用する力

2.2. 棒に生じる軸力とその符号

図 1.4.1 のように棒の軸に沿った方向に生じる力は軸力と呼ばれ，その符号は，引張力の場合にはプラス，圧縮力の場合にはマイナスとするのが通例である。つまり，ある断面で切った際，物体内部から外に向かう方向の法線ベクトルと同じ方向の軸力はプラス，逆方向はマイナスとなる。つまり，「軸力が 3.2N」という表現があったら，棒に引張力が作用していて，その大きさが 3.2N ということであり，「軸力が -2.6N」という表現があったら，棒に圧縮力が作用していて，その大きさが 2.6N ということである。

2.3. 棒の各箇所に生じる軸力

図 1.4.1 でみた通り，棒の先端に軸方向荷重 P が作用した場合，棒のどの箇所の断面に生じる軸力も P となる。その際，断面 B1 の反対側（B' の側）の断面には，反対向きに軸力 P が作用しているはずである（作用・反作用の法則）。

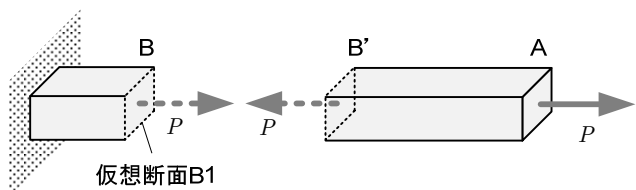


図 1.4.1 引張荷重を受ける棒（再掲）

では，棒の複数箇所に軸方向荷重が作用する場合にはどうなるだろうか？

【例題 2.1】軸力の算出(1)

図 2.3.1 のように，長さ ℓ の棒の三か所に荷重が作用している。軸力分布図を描きなさい。

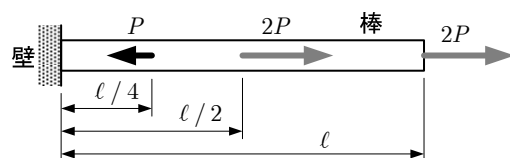


図 2.3.1 軸力の算出【例題 2.1】

【略解】

まず，壁からの反力を R として，棒を壁から切り離して宙に浮かせた図を描いてみると，図 2.3.2 のようになる。こ

の図のように、反力を図示して、壁など固定点から物体を切り離して荷重を全て書き並べた図は**フリーボディーダイアグラム** (Free Body Diagram, FBD) と呼ばれる。

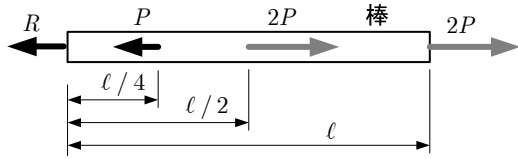


図 2.3.2 棒のフリーボディーダイアグラム【例題 2.1】
まずは、図 2.3.2 で力の釣り合いを考えて、反力 R を求めてみよう。釣り合い式は

$$-R - P + 2P + 2P = 0 \quad (2.3.1)$$

したがって、

$$R = 3P \quad (2.3.2)$$

次に、棒の各部での軸力を求めよう。棒の左端から右端に向かって座標軸 (x 軸) を設定すると、軸力は区間 $0 \leq x < l/4$, $l/4 \leq x < l/2$, $l/2 \leq x < l$ の三区間で異なる。実際、軸力を T と書くと、 $0 \leq x < l/4$ では

$$-R + T = 0 \quad (2.3.3)$$

よって、

$$T = R = 3P \quad (2.3.4)$$

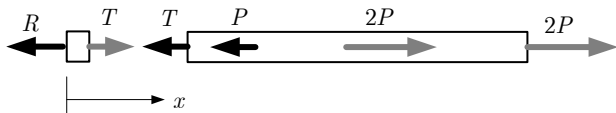


図 2.3.3 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 1)
 $l/4 \leq x < l/2$ (図 2.3.4) では、

$$-R - P + T = 0 \quad (2.3.5)$$

よって、

$$T = R + P = 4P \quad (2.3.6)$$

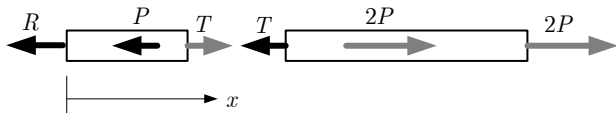


図 2.3.4 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 2)
 $l/2 \leq x < l$ (図 2.3.5) では、

$$-R - P + 2P + T = 0 \quad (2.3.7)$$

よって、

$$T = R + P - 2P = 2P \quad (2.3.8)$$

したがって、軸力の分布図は図 2.3.6 のようになる。

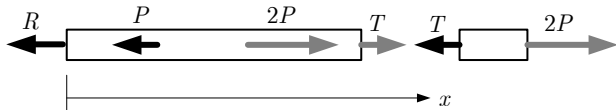


図 2.3.5 棒の力の釣り合い【例題 2.1】 (その 3)

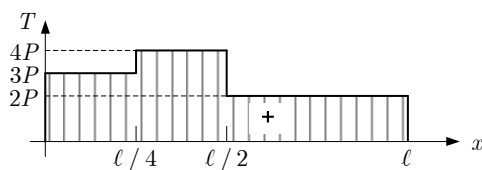


図 2.3.6 軸力の分布図【例題 2.1】

【別解】

例えば、 $0 \leq x < l/4$ のとき、図 2.3.3 において、切断面の右側で釣り合い式をたてると、

$$-T - P + 2P + 2P = 0 \quad (2.3.9)$$

したがって、

$$T = 3P \quad (2.3.10)$$

となって、式(2.3.4)と同じ結果を得る。 $l/4 \leq x < l/2$ の場合や $l/2 \leq x < l$ の場合も同様である。この方法の利点は、反力 R を求めなくても解を得ることができる点にある。

※ このように、軸力は外力が作用するたびに変化し、外力が作用していない区間では軸力は一定である。

※ あらゆるものを見た時には、それが壁などに固定されていたり、床に置いてあったとしても、「実は壁や床との間には隙間があって、宙に浮いている」と思って、FBD をイメージするトレーニングをしてほしい。

【例題 2.2】 軸力の算出(2)

図 2.3.7 のように、長さ 1.0m の棒の四か所に荷重が作用している。軸力分布図を描きなさい。

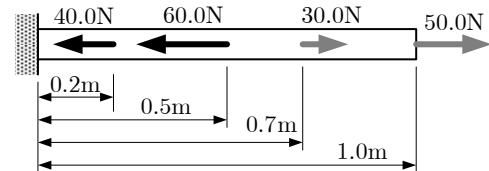


図 2.3.7 軸力の算出【例題 2.2】

【略解 (結果のみ)】

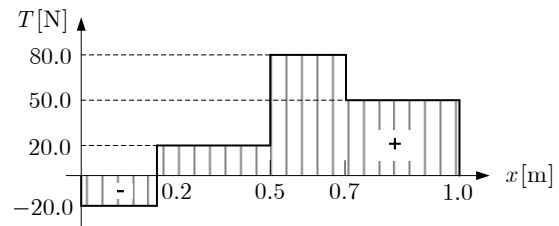


図 2.3.8 軸力の分布図【例題 2.2】

【例題 2.3】 軸力の算出(3)

以下の場合について、軸力分布図を描きなさい。

- 1) $\ell = 1.0$, $(x, P) = (0.1, -30), (0.4, 10), (0.6, 20), (1.0, 10)$
- 2) $\ell = 1.0$, $(x, P) = (0.1, -30), (0.4, 10), (0.6, -20), (0.8, 20)$
- 3) $\ell = 1.2$, $(x, P) = (0.2, -10), (0.5, -30), (0.8, 20), (1.0, 20)$
- 4) $\ell = 1.2$, $(x, P) = (0.5, 10), (0.6, 20), (0.7, -20), (1.2, -40)$

2.4. 分布力による軸力

図 2.4.1 のように、密度 ρ 、断面積 A 、長さ ℓ の棒が天井から吊り下げられている。重力加速度を g として、棒の軸力分布図を描いてみよう。この場合、切断面から下の部分の力の釣り合いは、

$$-T + \rho Ag(\ell - x) = 0 \quad (2.4.1)$$

よって、

$$T = \rho Ag(\ell - x) \quad (2.4.2)$$

となり、軸力分布図は図 2.4.2 のようになる。

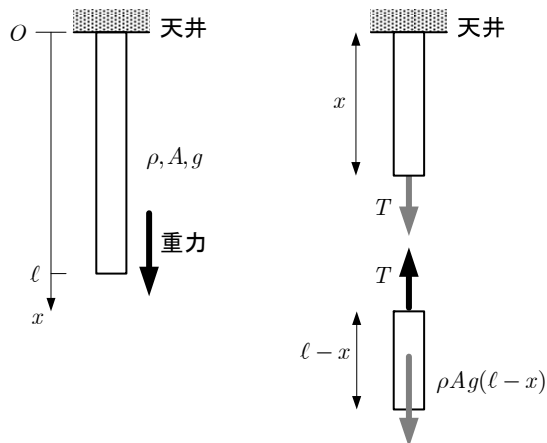


図 2.4.1 重力を受ける棒

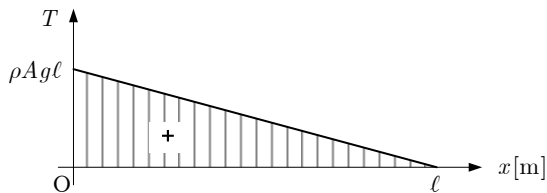


図 2.4.2 重力を受ける棒の軸力分布

【例題 2.4】軸力の算出(4)

密度 ρ 、断面積 A 、長さ ℓ の棒が天井から吊り下げられている。棒の先端には質量 m のおもりが取り付けられている。重力加速度を g として、軸力分布図を描きなさい。

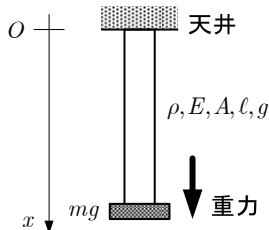


図 2.4.3 重力を受ける棒の軸力

2.5. 棒の各断面に生じる垂直応力

前節までの方法で棒の各断面における軸力が求まったら、それを断面積で割ることで、その断面に生じる垂直応力を求めることができる。したがって、断面積が一樣な棒であれば、応力分布図の形は軸力分布図の形と同じで（縦軸の値が変わるだけ）。しかし、例えば、図 2.5.1 のように、棒の断面積が棒の $1/3$ より壁側が A 、先端側は $A/2$ であったとするとどうなるであろうか？

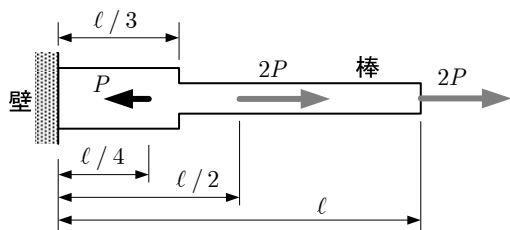


図 2.5.1 断面積が一樣でない棒

この場合、 $0 \leq x < \ell/4$ のときには、式(2.3.4)より、

$$\sigma = \frac{3P}{A} \quad (2.5.1)$$

$\ell/4 \leq x < \ell/3$ のときには、式(2.3.6)より、

$$\sigma = \frac{4P}{A} \quad (2.5.2)$$

$\ell/3 \leq x < \ell/2$ のときには、

$$\sigma = \frac{4P}{(A/2)} = \frac{8P}{A} \quad (2.5.3)$$

そして、 $\ell/2 \leq x \leq \ell$ のときには、式(2.3.8)より、

$$\sigma = \frac{2P}{(A/2)} = \frac{4P}{A} \quad (2.5.4)$$

となる。したがって、応力分布図は図 2.5.2 のようになる。

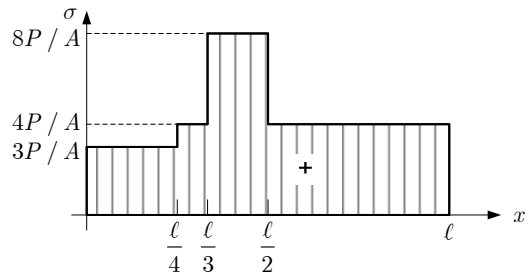


図 2.5.2 断面積が一樣でない棒の応力分布図

※ この解をみて、「 $x = \ell/3$ のところで断面が不連続だが、ここでの応力はどうなるのか？」と疑問に思うだろう。この疑問はもっともで、実際には、 $x = \ell/3$ のところでは、断面の場所によって応力は異なり、その分布は複雑なものとなる。が、ここではそれは無視することとする。※ なお、この例の場合、断面が不連続に変化するので、結合部の角のところに「応力集中」が起こるだろう。一般に、断面形状が不連続に変化する領域では応力集中が起こりやすい。したがって、R をとるなりして、少しでも断面がゆるやかに変化するようにした方がよい。

2.6. 断面積が連続的に変化する棒の応力

2.5 節では断面積が部分的に一樣で、不連続に変化する場合について考えた。この場合には、断面積が与えられているので比較的簡単に応力分布図を描くことができる。しかし、例えば、半径が連続的に変化する（ x の連続関数になる）場合には、少し計算が必要となる。

【例題 2.5】応力の算出

【例題 2.4】において、棒の断面が円で、図 2.6.1 のように、断面の半径が根元では $2r_0$ 、先端では r_0 、その途中は線形に変化していく場合、棒の半径 r を x の式で表しなさい。また、棒の体積を求めなさい。そして、応力分布図を描きなさい。ただし、棒とおもりの質量は同じとする。

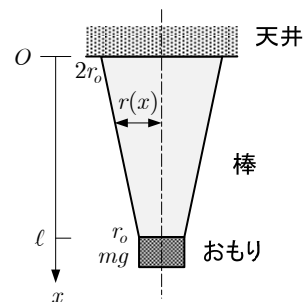


図 2.6.1 重力を受ける棒の応力分布

【略解】

この問題は、「材料力学 I」の問題というよりは、数学の

計算問題のような問題であるが、解いてみよう。

まず、半径は

$$r = \frac{(\ell - x) \cdot 2r_o + x r_o}{\ell} = -\frac{r_o}{\ell}x + 2r_o \quad (2.6.1)$$

である。力の釣り合いを考えるためには、 x 断面より下の部分の体積 V を求める必要がある。実際、 V がわかれば、棒の密度をとって、力の釣り合いは

$$-T + \rho V g + m g = 0 \quad (2.6.2)$$

となって、軸力は次式で求められる。

$$T = \rho V g + m g = (\rho V + m) g \quad (2.6.3)$$

ただし、棒の密度 ρ も求めないといけない。

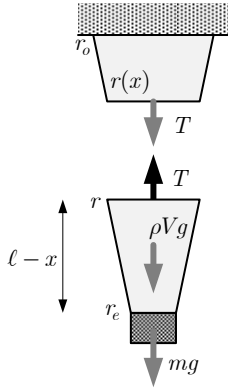


図 2.6.2 重力を受ける棒の力の釣り合い
では、まず、 V はどうなるかといえば、式(2.6.1)より、

$$\begin{aligned} V &= \int_x^\ell \pi r^2 dx = \int_x^\ell \pi \left(-\frac{r_o}{\ell}x + 2r_o \right)^2 dx \\ &= -\frac{\ell}{r_o} \pi \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{r_o}{\ell}x + 2r_o \right)^3 \right]_x^\ell \\ &= -\frac{\pi \ell}{3r_o} \left[r_o^3 - \left(-\frac{r_o}{\ell}x + 2r_o \right)^3 \right] = -\frac{\pi r_o^2}{3\ell^2} [(x-2\ell)^3 + \ell^3] \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

この式より、棒全体の体積 V_o は

$$V_o = V(0) = -\frac{\pi r_o^2}{3\ell^2} [(0-2\ell)^3 + \ell^3] = \frac{7\pi r_o^2 \ell}{3} \quad (2.6.5)$$

棒の質量とおもりの質量が等しいことから、

$$\rho \frac{7\pi r_o^2 \ell}{3} = m \quad (2.6.6)$$

よって、棒の密度は

$$\rho = \frac{3m}{7\pi r_o^2 \ell} \quad (2.6.7)$$

したがって、軸力は

$$\begin{aligned} T &= \left\{ -\frac{3m}{7\pi r_o^2 \ell} \frac{\pi r_o^2}{3\ell^2} [(x-2\ell)^3 + \ell^3] + m \right\} g \\ &= \left\{ -\frac{m}{7\ell^3} [(x-2\ell)^3 + \ell^3] + m \right\} g \\ &= mg \left[-\frac{1}{7\ell^3} (x-2\ell)^3 + \frac{6}{7} \right] \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

断面積は

$$A = \pi r^2 = \pi \left(-\frac{r_o}{\ell}x + 2r_o \right)^2 = \frac{\pi r_o^2}{\ell^2} (x-2\ell)^2 \quad (2.6.9)$$

となるので、応力 σ は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{T}{A} = \frac{mg \left[-\frac{1}{7\ell^3} (x-2\ell)^3 + \frac{6}{7} \right]}{\frac{\pi r_o^2}{\ell^2} (x-2\ell)^2} \\ &= \frac{mg}{7\pi r_o^2} \left[-\frac{1}{\ell} (x-2\ell) + \frac{6\ell^2}{(x-2\ell)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

したがって、グラフを描くと図 2.6.3 のようになる。

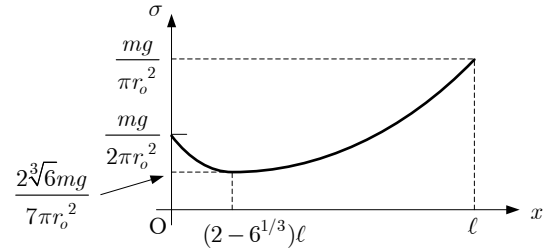


図 2.6.3 重力を受ける棒の応力分布

2.7. まとめ

荷重を受ける棒の軸力分布および応力分布の求め方を学んだ。その過程で、フリーボディーダイアグラムについても学んだ。これら、特に、フリーボディーダイアグラムは材料力学に限らず、工業力学や流体力学、それらに関連した工学の設計・解析に必須となる概念であるので、必ずマスターして欲しい。

2.8. 宿題

- 【例題 2.3】の 2)~4) を解きなさい (答えだけでなく、図や説明、式もきちんと丁寧に書いて、美しいレポートにしてください)。

もし余裕があれば、次の問題も解いてみてください。

- 質量 m のおもりを密度 ρ 、長さ ℓ の円断面棒で吊るすことを考える。棒に生じる応力 σ が棒のどの断面でも同じ値になるように、棒の半径を場所によって変化させる。図 2.8.1 のように、根元から先端に向かって x 軸を設定する。先端 (おもりと結合しているところ、すなわち、 $x = \ell$) の半径が r_e であるとき、応力 σ の値を求めなさい。また、根元 ($x = 0$) の半径 r_o を求めなさい。そして、棒の半径 r を x の式で表しなさい。【ヒント：答えは以下の通り】

$$\begin{cases} \sigma = \frac{mg}{\pi r_e^2}, & r_o = r_e \exp\left(\frac{\pi \rho r_e^2 \ell}{2m}\right) \\ r = r_e \exp\left[\frac{\pi \rho r_e^2}{2m}(\ell - x)\right] = r_o \exp\left[-\frac{\pi \rho r_e^2}{2m}x\right] \end{cases} \quad (2.7.1)$$

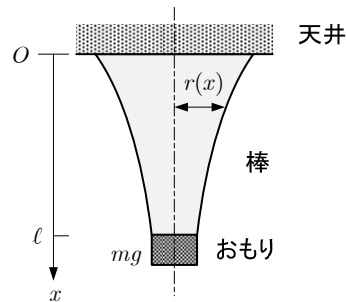


図 2.8.1 応力が一様な棒

第3章 棒の伸びと歪と応力(1)

今回は、棒に軸方向荷重を作用させたときに棒がどれくらい伸び縮みするかについて考える。その過程で、「歪」の概念について学ぶ。「歪」は構造設計を行う上で、「応力」と並んで極めて重要な物理量であるので、必ず理解してほしい。

3.1. 引張を受ける棒の伸び方

2年次の実験科目「航空宇宙工学実験Ⅰ」で実験することになるが、一般に、材料の強度特性を調べる試験方法の一つに「引張試験」というものがある。引張試験では、図 3.1.1(a) のような形の棒（鉄アレイのような形をしていて、鉄アレイの重りの部分が少し太目の円筒に置き換わったような形）の「つかみ部」を機械（引張試験装置）でつかんで引っ張る。このとき、棒は、最初は図 3.1.1(b) のように一様に伸びてゆく。しかし、途中で図 3.1.1(c) のように中央部がくびれはじめる。最終的には図 3.1.1(d) のように、くびれた部分が破断する。くびれはじめる時の荷重や破断するときの荷重は棒の太さによって異なるが、太さが同じでも、材料によって異なる。くびれ方も材料によって異なる（すごくくびれる材料もあれば、ほとんどくびれずに破断する材料もある）。

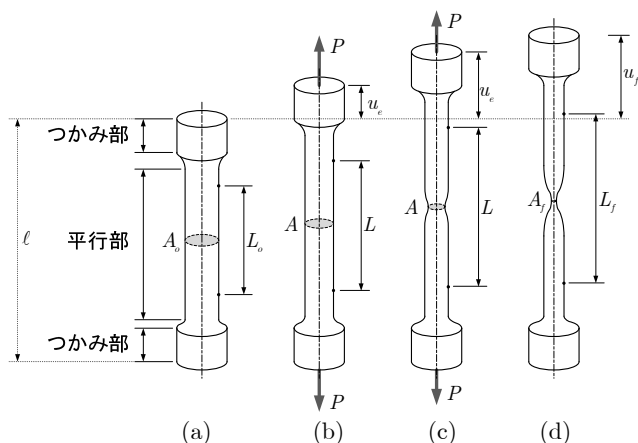


図 3.1.1 引張を受ける棒の変形

引っ張る過程では、図 3.1.1 の(a)から(b)までは、“伸び方”は棒の「平行部」のどの箇所でも同じである。しかし、(c)の状態では場所によって異なる。実際、つかみ部に近いあたりはそれほど伸びず、くびれた部分はかなり伸びている（ゴムやガムなどの伸び方を想像すればよい）。

では、“伸び方”とは、具体的にはどういった式で表現できるのでしょうか？

3.2. 歪

“伸び方”を定量的に定義したのが「歪」である。いま、図 3.2.1(a)のように、長さ L_0 の棒が引張荷重により伸びて、長さが L になったとしよう。このとき、棒全体としての“伸び方”は、“伸びた割合”で表現できるだろう。すなわち、次式で定義される η （イータ、「伸び率」と呼ばれる）で“伸び方”を表現できそうである。

$$\eta \equiv \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (3.2.1)$$

しかし、この式は“棒全体の伸び方”を表しており、棒が一様に伸びている間はこの式でも“伸び方”を表現できるであろうが、図 3.1.1(c)のように、場所によって“伸び方”が異なる場合には、この式では不十分である。つまり、“伸び

方”は棒全体で定義するのではなく、棒の場所によって異なる、すなわち、場所の関数（ x の関数）として定義されるべきものであろう。

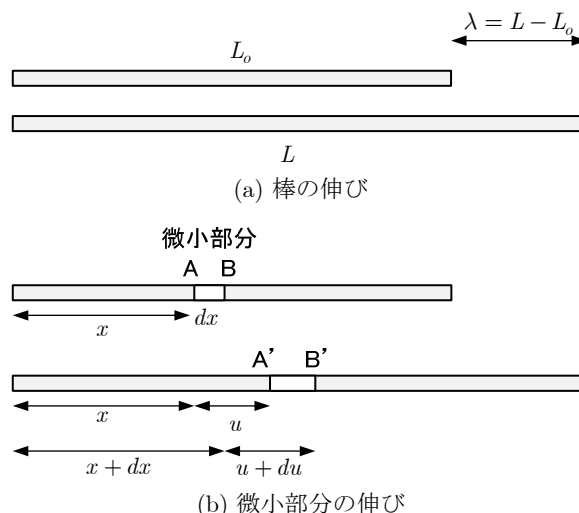


図 3.2.1 棒の歪

そこで、図 3.2.1(b)のように、棒の根元から長さ x の点 A と、そこからさらに微小な距離 dx だけ離れた点 B を考える。いま、棒全体が伸びることにより、点 A は u だけ伸びて点 A' に移動したとする。また、点 B は $u + du$ だけ伸びて点 B' に移動したとする。このとき、微小部分 AB の「伸び率」はどうなるであろうか？

図 3.2.1(b)からわかる通り、線分 A'B' の長さは

$$\overline{A'B'} = (x + dx + u + du) - (x + u) = dx + du \quad (3.2.2)$$

となる。したがって、微小部分 AB の「伸び率」は、

$$\epsilon = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (3.2.3)$$

となる（これを、**変位-歪関係式**と呼ぶ）。したがって、もし、棒の伸び u が x の関数として与えられたら、微小部分の伸び率 ϵ も式(3.2.3)により x の関数として求めることができる（微分するだけ）。これがまさに、点 A における“伸び方”を表しており、 ϵ は「歪」（strain）と呼ばれる。

では、「伸び u をどうやって求めればよいのか？」と思うかもしれない。しかし、次節で述べる通り、実は、 u よりも先に ϵ が求まり、それを積分することで u が求まるのである。

3.3. 応力-歪関係（構成則）

そこで、実際に、歪 ϵ の求め方を紹介しよう。それには、応力と歪との関係を知る必要がある。図 3.3.1 は、図 3.1.1 のような棒の中央（くびれて破断する点）での応力と歪との関係の例を示したものである。実は、**材料が同じであれば、棒のサイズ（太さや長さ）に関わらず、応力と歪との関係は同じになる！**ことが知られている。

この図を見ると、歪が小さいと、歪と応力はほぼ線形関係にあり、図の点 A を超えた点 B あたりで少し曲がり始める。

そして、点 C に至ると、今度は伸ばしている（歪が増えている）のに応力が下がり、それから点 D に至るまで、応力は少し上下しつつもほぼ横ばいに変化する。そして、ある点 D まで歪が大きくなると、それ以降は再び応力が増え始める。そして、途中、棒はくびれ始め、それでもなお、応力は増え続ける。そして、最終的に、応力がある値になったところで棒は破断する。

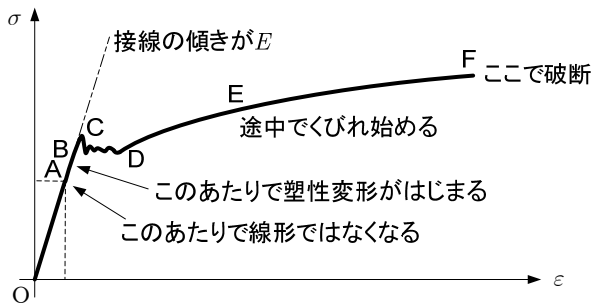


図 3.3.1 典型的な（真の）応力-歪線図

このような、棒における歪と応力との関係については、2 年次の「航空宇宙工学実験 I」の「材料試験」という実験テーマで深く勉強することになるが、引っ張り始めてから点 A、あるいは、点 A より少し伸びた点 B あたりまでは弾性変形である。すなわち、引っ張ることをやめると棒は元に戻る。しかし、それを超えて C や D 以降に至ると、引張をやめてももとには戻らず、歪が残る。この残った歪を「塑性歪」（plastic strain）といい、引っ張るのをやめることで元に戻る歪を「弾性歪」（elastic strain）と呼ぶ。つまり、図 3.3.1 の横軸の歪 ε は、弾性歪と塑性歪の和になっている。

ただし、上述の通り、点 A 付近までは弾性歪だけである。「材料力学 I」では、この範囲、すなわち、図 3.3.1 の原点から点 A あたりの範囲で棒が弾性変形をし、かつ、応力が歪に（ほぼ）比例する場合のみを対象とする。

さて、この範囲内であれば、歪と応力とは（ほぼ）比例関係にあるので、

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.3.1)$$

と書ける。ここで、 E は比例定数（図 3.3.1 の直線部分の傾き）を表しており、その値は材料によって異なる。 E は「縦弾性係数」、あるいは、「ヤング率」（Young's modulus）と呼ばれる。ヤング率は材料の種類は処理法によって異なるが、おおよそ、表 3.3.1 に示すような値となる。

表 3.3.1 材料のヤング率

材料	ヤング率 (GPa)	材料	ヤング率 (GPa)
アルミニウム	69	SS400	206
マグネシウム	45	S45C	205
チタン	106	SUS304	197
銅	130	ねずみ鉄	200

式(3.3.1)は**応力-歪関係式**、あるいは、**構成則** (constitutive relation) と呼ばれる。つまり、材料がわかれば、式(3.3.1)を用いることで、応力から歪を求めることができるのである！そして、それを積分すれば、伸び u を求めることができる！そこで、次節では実際に伸び u を求めてみよう。

※図 3.3.1 のキャプションに「（真の）応力-歪線図」とあるが、ここで「真の」と書かれているということは、真でない応力-歪線図もある、ということだというのは察しが付くだろう。実際にそうで、「みかけの応力-歪線図」というものが存在する。これは、図 3.1.1 のような引張試験を行った際に得られるデータで、「航空宇宙工学実験 I」の

引張試験では、「みかけの応力-歪線図」を修正することで「真の応力-歪線図」を求めることになる。

※なお、図 3.1.1 のように棒がくびれている場合、場所によって歪の値は異なる。そこで、図 3.1.1 において、棒の平行部の（変形前の） x 座標を横軸に、縦軸に変形後の歪 ε をとってグラフを描くと、図 3.3.2 のようなもの山型になるはずである。そして、ハッチングした部分の面積は棒の先端の伸び、すなわち、 $u(L_0)$ と一致するはずである。

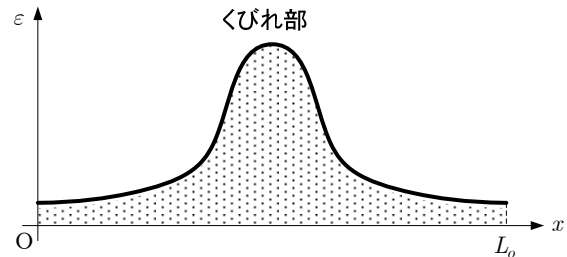


図 3.3.2 歪の分布

3.4. 先端荷重を受ける棒の伸び

図 3.4.1 のように、長さ l 、ヤング率 E 、断面積 A の棒が、一端は固定され、他端は荷重 P で引っ張られているとする。このときの先端の伸びを求めてみよう。

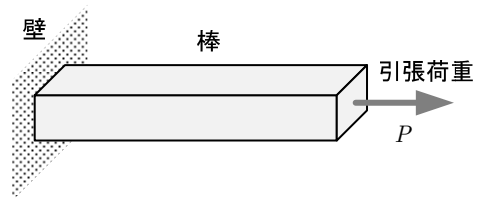


図 3.4.1 先端に引張荷重を受ける棒

まず、棒の軸力はどの場所でも同じで、 P であることは明らかであろう。したがって、応力も一定で、

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.4.1)$$

となる。したがって、歪は次のようになり、これもまた一定である。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA} \quad (3.4.2)$$

そして、変位-歪関係式(3.2.3)より、

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{EA} \quad (3.4.3)$$

を得る。したがって、積分すると、

$$u = \frac{Px}{EA} + C \quad (3.4.4)$$

を得る。ただし、 C は積分定数である。境界条件は、「根元での伸びが 0」（根元は固定されていて動かないから）というものであり、式で表現すると、

$$x = 0: u = 0 \quad (3.4.5)$$

よって、式(3.4.4)より、

$$u = \frac{Px}{EA} \quad (3.4.6)$$

を得る。したがって、先端の伸びを λ とすれば、 $\lambda = u(l)$ 、つまり、

$$\lambda = \frac{P\ell}{EA} \quad (3.4.7)$$

を得る。この式は、かなり頻繁に使うことになるので、覚えておくといいたい。ついでに、この式を変形した

$$P = \frac{EA}{\ell} \lambda \quad (3.4.8)$$

も覚えておくといいたい。ただし、これらの式が使えるのは、棒に作用する荷重が先端のみの場合である。棒の途中で荷重が作用したり、重力のように棒のいたるところに荷重が作用している場合には使えないので注意すること。

では、図 3.4.2 のように、棒が圧縮荷重を受ける場合はどうなるであろうか？

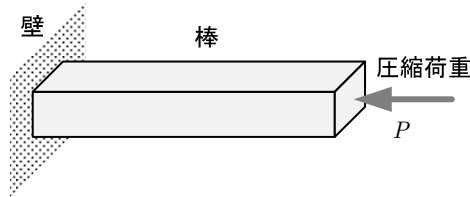


図 3.4.2 先端に圧縮荷重を受ける棒

この場合には、式(3.4.7)において、軸力を $-P$ に置き換えるだけでよい。したがって、

$$\lambda = -\frac{P\ell}{EA} \quad (3.4.9)$$

つまり、伸びはマイナスとなる。伸びがマイナスであるとは、棒が縮んでいることを意味する。

※ 棒の伸びのように、変形前と変形後との差を表す量は「変位」(displacement)と呼ばれる。

※ 式(3.4.8)は、実はとても大事な意味を持っている。この式は、棒を荷重 P で引っ張ったら λ だけ伸びたときの P と λ との関係を表しており、この式から、棒は力学的にはバネと同じようにとらえることができ、バネ定数は EA/ℓ であることがわかる。棒とバネが力学的には同じもの、という感覚はピンとくるだろうか？是非、この感覚に慣れていってほしい。

3.5. 途中で荷重を受ける棒の伸び

図 3.5.1 のように、長さ ℓ 、ヤング率 E 、断面積 A の棒が、一端は固定され、他端は自由で、固定端から長さ 0.4ℓ のところで荷重 P で引っ張られているとする。このときの先端の変位はどうなるであろうか？ また、固定端から長さ 0.3ℓ のところでの変位はどうなるであろうか？

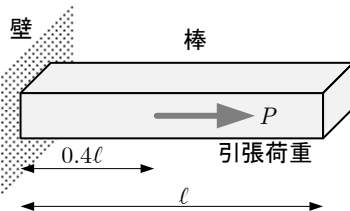


図 3.5.1 途中で引張荷重を受ける棒

この問題は、「荷重点の変位ならば式(3.4.7)で求められるが、他の点の場合はどうなるか？」ということを問うものである。

まず、先端については、軸力分布を求めればわかる通り、荷重点から先端までは荷重が作用していないことから、棒が伸びることはなく、先端の変位は荷重点の変位と同じとなる。すなわち、

$$\lambda = \frac{P \times (0.4\ell)}{EA} = \frac{2P\ell}{5EA} \quad (3.5.1)$$

となる。また、 $x = 0.3\ell$ の点の変位は、式(3.4.6)からわかる通り、

$$\lambda = \frac{P \times (0.3\ell)}{EA} = \frac{3P\ell}{10EA} \quad (3.5.2)$$

3.6. 分布荷重を受ける棒の伸び

図 3.6.1 のように天井から吊り下げられた棒の先端の伸びを考えてみよう。

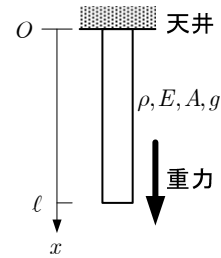


図 3.6.1 重力を受ける棒の伸び
この場合には、軸力は、式(2.4.2)で求めた通り、

$$P = \rho A g (\ell - x) \quad (3.6.1)$$

したがって、応力は

$$\sigma = \frac{P}{A} = \rho g (\ell - x) \quad (3.6.2)$$

よって、歪は

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho g}{E} (\ell - x) \quad (3.6.3)$$

したがって、変位 u は、

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho g}{E} (\ell - x) \quad (3.6.4)$$

および、境界条件 ($u(0) = 0$) より求められ、

$$u = \frac{\rho g}{E} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) \quad (3.6.5)$$

したがって、先端の伸び λ は

$$\lambda = \frac{\rho g}{E} \left(\ell \cdot \ell - \frac{1}{2} \ell^2 \right) = \frac{\rho g \ell^2}{2E} \quad (3.6.6)$$

【例題 3.1】伸びの算出(1)

図 3.6.2 のように、密度 ρ 、断面積 A 、長さ ℓ の棒の中央に細い軸を通して角速度 ω で回転させた。棒の先端の伸びを求めなさい。

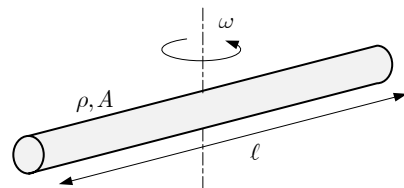


図 3.6.2 伸びの算出【例題 3.1】

3.7. 棒の伸びの算出手順

3.4 節、3.6 節の例から察しが付いたかと思うが、棒の伸びの算出手順は以下の通りである。

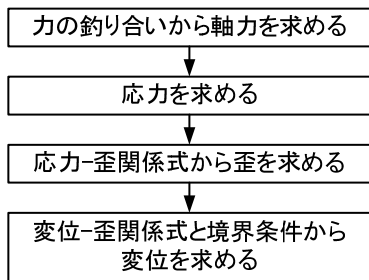


図 3.7.1 棒の伸びの算出手順（その 1）

しかし、実は、この逆もあり得る。つまり、図 3.7.2 のような手順である。実際に 3.6 節の重力を受ける棒の例でこの手順を試してみよう。

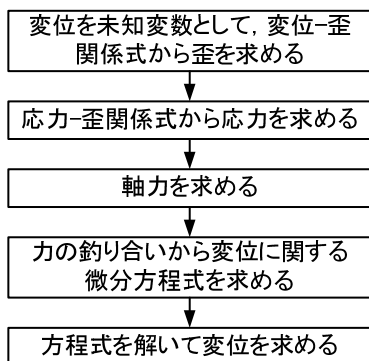


図 3.7.2 棒の伸びの算出手順（その 2）

まず、変位-歪関係式より、歪は

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (3.7.1)$$

応力-歪関係式より、応力は、

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (3.7.2)$$

したがって、軸力は

$$T = \sigma A = EA \frac{du}{dx} \quad (3.7.3)$$

釣り合い式は

$$-T + \rho A g(\ell - x) = 0 \quad (3.7.4)$$

つまり、

$$-EA \frac{du}{dx} + \rho A g(\ell - x) = 0 \quad (3.7.5)$$

これが、「変位で書かれた釣り合い式」である。あとは、この微分方程式を解くことで、

$$u = \frac{\rho g}{E} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) \quad (3.7.6)$$

を得ることができる。

ただし、ここまで読んで、おそらく、前者の手順が楽だなと感じる者が多いだろう。これはその通りで、釣り合い式から軸力を求めることができるのであれば、前者の方が楽である。しかし、第 5 章で学ぶ通り、釣り合い式だけでは軸力を求めることができない場合もある。この場合には、後者の手順でしか解を得ることはできない。逆に言えば、後者の手順は万能で、あらゆる問題に適用できる。実際、市販の構造解析ソフトウェアはこの手順で計算している。

ではどうすればよいかというと、少なくとも「材料力学 I」の範囲では、前者で解ける問題は前者で解き、解けない問題についてのみ、後方で解く、というのが現実的かと思われる。実際、第 5 章で学ぶ通り、材料力学で扱う程度の問題であ

ば、どういう場合に前者では解けないかを見分ける方法があるので、国家公務員試験や就職試験など、短時間に解きたい場合には、算出手順をうまく使い分けるのがよいだろう。

3.8. 剛体と弾性体との違い

これまで、棒な伸びるという前提で物事を考えてきている。このように弾性変形する物体は「弾性体」(elastic body)と呼ばれる。しかし、力学関連の講義では、「剛体」(rigid body)について学んできたことであろう。では、両者の違いの本質はどこにあるであろうか？

厳密に言う、世の中に「剛体」と呼べるものは存在しない。どんなに硬いものであろうと、力を加えれば、ほんのわずかながら変形する。にも関わらず、「剛体」として考えることがあるのは、変形がほとんど無視できるほど小さい場合が多いからである。つまり、物体に何か特徴があるのではなく、実際に荷重が作用した際の変形量によって、「剛体」と近似しているのである。

実際、一辺が固定された棒の伸びは式(3.4.7)であらわされ、ヤング率 E が極めて大きい棒であれば、伸び λ は 0 と近似しても問題ないであろう。別の言い方をすれば、剛体とは、ヤング率 E を無限大にした極限状態にした弾性体であると考えればよい。

「熱力学と流体力学の基礎」でも、「圧縮性流体」と「非圧縮性流体」について学んだことと思うが、「非圧縮性流体」も、膨張率を 0 にした極限状態の「圧縮性流体」と考えればよく、両者の関係は「弾性体」と「剛体」との関係によく似ている（「だから何？」と言われると困るのだが）。

3.9. まとめ

「歪」の概念および定義について学んだ。そして、棒の伸びの算出法について学んだ。「歪」は「応力」と同様、材料力学や構造力学の要となる概念であるので、しっかり理解してほしい。

3.10. 宿題

- 1) 【例題 3.1】を解きなさい。
- 2) 直径 20mm の鋼材を 10kN で引っ張った時の歪はどれくらいになるか。また、同じサイズのアルミの場合では歪はどれくらいになるか。ただし、鋼材のヤング率を 200GPa、アルミのヤング率を 70GPa とする。
- 3) 直径 1mm で長さ 1m のアルミの棒の先端に 1kg のおもりを吊り下げた。棒はどれくらい伸びるか。ただし、棒の自重は考慮しなくてもよい。また、アルミのヤング率を 70GPa とする。
- 4) セン断歪について調べて、簡単にまとめなさい。

第4章 棒の伸びと歪と応力(2)

前回は棒の伸びの算出法の基本を学んだ。今回は、その方法を応用し、様々な力が作用した場合の棒の伸び（変位）を求めてみる。

4.1. 複数の力が作用する棒の伸び

例題を解いてゆこう。

【例題 4.1】 伸びの算出(2)

図 4.1.1 のように荷重を受ける棒の先端 C の伸びを求めなさい。

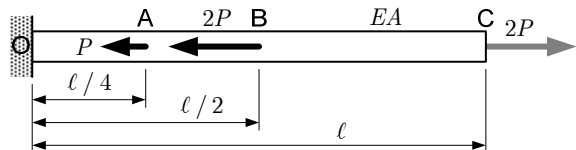


図 4.1.1 伸びの算出【例題 4.1】

【略解】

棒の OA 部分の軸力は

$$T_{OA} = -P \quad (4.1.1)$$

となるので、OA 部分の伸びは

$$\lambda_{OA} = \frac{-P(\ell/4)}{EA} = -\frac{P\ell}{4EA} \quad (4.1.2)$$

AB 部分の軸力は

$$T_{AB} = 0 \quad (4.1.3)$$

よって、AB 部分の伸びは

$$\lambda_{AB} = 0 \quad (4.1.4)$$

BC 部分の軸力は

$$T_{BC} = 2P \quad (4.1.5)$$

よって、BC 部分の伸びは

$$\lambda_{BC} = \frac{2P(\ell/2)}{EA} = \frac{P\ell}{EA} \quad (4.1.6)$$

したがって、棒全体の伸びは

$$\lambda = \lambda_{OA} + \lambda_{AB} + \lambda_{BC} = -\frac{P\ell}{4EA} + 0 + \frac{P\ell}{EA} = \frac{3P\ell}{4EA} \quad (4.1.7)$$

【例題 4.2】 伸びの算出(3)

図 4.1.1 のように荷重を受ける棒の先端 B の伸びを求めなさい。

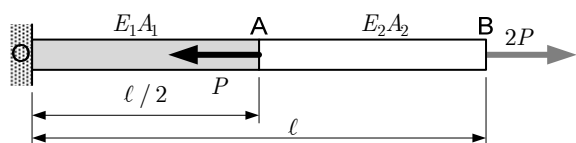


図 4.1.2 伸びの算出【例題 4.1】

【略解】

異種材料を接合した場合はどうなるか、という問題である。この場合、棒の OA 部分の軸力は

$$T_{OA} = P \quad (4.1.8)$$

となるので、OA 部分の伸びは

$$\lambda_{OA} = \frac{P(\ell/2)}{E_1A_1} = \frac{P\ell}{2E_1A_1} \quad (4.1.9)$$

AB 部分の軸力は

$$T_{AB} = 2P \quad (4.1.10)$$

よって、AB 部分の伸びは

$$\lambda_{AB} = \frac{2P(\ell/2)}{E_2A_2} = \frac{P\ell}{E_2A_2} \quad (4.1.11)$$

したがって、棒全体の伸びは

$$\lambda = \lambda_{OA} + \lambda_{AB} = \frac{P\ell}{2E_1A_1} + \frac{P\ell}{E_2A_2} \quad (4.1.12)$$

【例題 4.3】 伸びの算出(4)

図 4.1.3 のように先端におもりを取り付けられて吊り下げられた棒の先端の伸びを求めなさい。

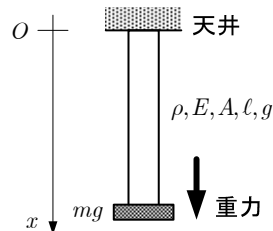


図 4.1.3 伸びの算出【例題 4.3】

【略解】

軸力を $T = T(x)$ とおくと、棒に作用する力は図 4.1.4 のようになり、釣り合い式は

$$-T + \rho A g(\ell - x) + mg = 0 \quad (4.1.13)$$

よって、軸力は

$$T = \rho A g(\ell - x) + mg \quad (4.1.14)$$

応力 σ は

$$\sigma = \frac{T}{A} = \rho g(\ell - x) + \frac{mg}{A} \quad (4.1.15)$$

歪 ε は

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho g}{E}(\ell - x) + \frac{mg}{EA} \quad (4.1.16)$$

したがって、変位-歪関係式より、変位 u に関する方程式は

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho g}{E}(\ell - x) + \frac{mg}{EA} \quad (4.1.17)$$

境界条件 $(x, u) = (0, 0)$ のもとでこれを解くと、

$$u = \frac{\rho g}{E} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{mg}{EA} x \quad (4.1.18)$$

よって、先端の伸び λ は

$$\lambda = u(\ell) = \frac{\rho g \ell^2}{2E} + \frac{mg\ell}{EA} \quad (4.1.19)$$

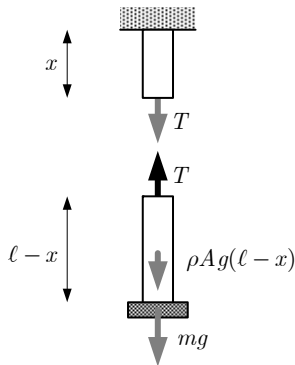


図 4.1.4 力の釣り合い【例題 4.3】

※ この例題を解く過程で気づいたかもしれないが、この問題の解は、先端を mg の力で引っ張られた場合の解と自重で引っ張られる場合の解の和になっている。材料力学は、線形の構成則を仮定しており、歪も変位に対して線形であるので、変位は荷重に対して線形となる。すなわち、複数の荷重が作用する場合の解は、一つ一つの荷重が作用する場合の解の和（重ね合わせ、superposition）となっている。これは非常に重要な性質であるので、覚えておいてほしい。

※ 実際、例えば、設計コンテスト等で、線形解析をしているにも関わらず、「5G の加速度荷重が作用した場合の応力を構造解析ソフトで解析したところ、こういう結果になった」と結果を図や表で出した後、「15G の場合に解析したところ・・・」と再び図や表を出されると、ちょっと残念な気持ちになります。

※ なお、実際には、応力が大きくなると応力と歪との線形性が崩れ、変形によっては変位と歪との線形性も崩れ、荷重と変位は線形関係にはならなくなる。

4.2. 断面が変化する棒の伸び

例題を解いてみよう。

【例題 4.4】伸びの算出(5)

図 4.2.1 において、棒の先端の伸びを求めなさい。材質はアルミニウムとする。

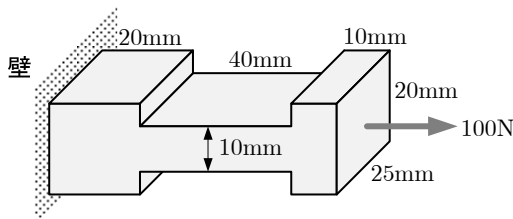


図 4.2.1 断面が変化する棒の伸び【例題 4.4】

【例題 4.5】伸びの算出(6)

奥行きが 20mm、長さが 500mm の矩形断面棒で、左端 ($x = 0$) を壁に固定され、以下のように厚さ h が階段状に変化し、変化するところに荷重を受ける棒がある。棒の先端の伸びを求めなさい。ただし、ヤング率を 70GPa とする。

1)

x	0	...	100	...	300	...	500
P, h		20mm	-10N	15mm	20N	20mm	20N

2)

x	0	...	50	...	100	...	500
P, h		10mm	-10N	20mm	20N	10mm	20N

3)

x	0	...	200	...	300	...	500
P, h		20mm	-20N	10mm	10N	15mm	10N

【例題 4.6】伸びの算出(7)

【例題 2.5】において、棒の先端の伸びを求めなさい。

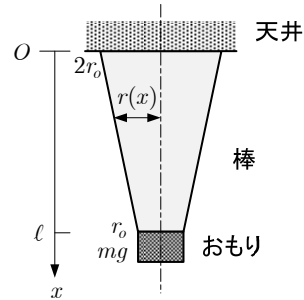


図 4.2.2 重力を受ける棒の伸び【例題 4.6】

【略解】

【例題 2.5】で求めた通り、応力 σ は

$$\sigma = \frac{mg}{7\pi r_o^2} \left[-\frac{1}{\ell}(x-2\ell) + \frac{6\ell^2}{(x-2\ell)^2} \right] \quad (4.2.1)$$

となるので、歪 ε は

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{mg}{7\pi r_o^2 E} \left[-\frac{1}{\ell}(x-2\ell) + \frac{6\ell^2}{(x-2\ell)^2} \right] \quad (4.2.2)$$

したがって、変位-歪関係式より、

$$\frac{du}{dx} = \frac{mg}{7\pi E r_o^2} \left[-\frac{1}{\ell}(x-2\ell) + \frac{6\ell^2}{(x-2\ell)^2} \right] \quad (4.2.3)$$

これを、境界条件 $(x, u) = (0, 0)$ の元で解くと、

$$u = \frac{mg}{7\pi E r_o^2} \left[-\frac{1}{\ell}(x-2\ell)^2 - \frac{6\ell^2}{x-2\ell} + \ell \right] \quad (4.2.4)$$

よって、先端の伸び λ は

$$\lambda = u(\ell) = \frac{6mg\ell}{7\pi E r_o^2} \quad (4.2.5)$$

4.3. まとめ

複数荷重が作用する場合や、断面積が一様でない場合の棒の伸びを算出する例題を解いた。解き方に特別な技が必要なのではなく、地道に解いていけば、必ず解を求めることができる。

4.4. 宿題

【例題 4.5】の 2), 3) を解きなさい（式や計算結果だけでなく、図や説明もきちんと書くこと）。

第5章 棒の伸びと歪と応力(3)

今回は「静定構造」と「不静定構造」の概念について学び、不静定な棒の軸力や変位の求め方を理解する。

5.1. 不静定棒

これまででは、一端が固定支持され、他端は支持されていない棒について考えてきた。では、図 5.1.1 のように両端を固定された棒の場合、軸力はどうか求めればよいだろうか？

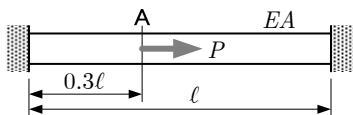


図 5.1.1 不静定棒

この問題の場合、左端の反力を R_1 、右端の反力を R_2 とすると、力の釣り合い式は次式のようになる。

$$-R_1 + P + R_2 = 0 \quad (5.1.1)$$

ここで、未知数は R_1 と R_2 の 2 つであるのに対し、方程式はこの 1 つしかない。つまり、釣り合い式の数よりも反力の数の方が多い。このような問題は**不静定問題** (statically indeterminate problem) と呼ばれる。これに対し、これまでのような、反力が 1 つで釣り合い式も 1 つという、反力の数と釣り合い式の数が等しい問題は**静定問題** (statically determinate problem) と呼ばれる。



図 5.1.2 不静定棒におけるフリーボディーダイアグラム
では、このような不静定問題の場合、どうやって解けばよいであろうか？

そこで、まずは軸力について考えてみよう。図 5.1.3 は $0 \leq x < 0.3\ell$ での軸力を T_1 、 $0.3\ell \leq x < \ell$ での軸力を T_2 として、力の釣り合いを図示したものである (そもそも、 $0 \leq x < 0.3\ell$ と $0.3\ell \leq x < \ell$ とで軸力が異なることをわかっていないと、この問題は解けないので要注意!)。それぞれの場合の力の釣り合いは次のようになる。

$$-R_1 + T_1 = 0, \quad -T_1 + P + R_2 = 0 \quad (5.1.2)$$

$$-R_1 + P + T_2 = 0, \quad -T_2 + R_2 = 0 \quad (5.1.3)$$

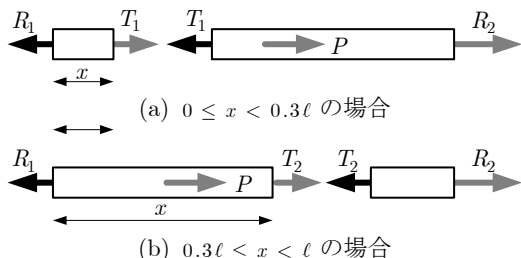


図 5.1.3 不静定棒における力の釣り合い

以上より、式は(5.1.1)、(5.1.2)、(5.1.3)で合計 5 個もあり、未知数は R_1 、 R_2 、 T_1 、 T_2 の 4 つしかなく、式の数が多いので、一見、解けそうに見える。しかし、実際には解けない。これはどういうことかという点、式(5.1.2)のうち、第一式と式(5.1.1)を用いると第二式を導くことができる。つまり、これら 3 つの式は独立ではない。もっと一般的に言うと、式(5.1.2)の 2 つの式と式(5.1.1)の合計 3 つの式のうち、2 つを

選ぶと、残りの 1 つを導くことができる。

同様に、式(5.1.3)のうち、第二式と(5.1.1)を用いると、第一式を導くことができる。よて、やはり、これら 3 つの式は独立ではない。つまり、式は 5 個あるが、そのうち、2 つは独立ではなく、差し引き、独立な式は 3 つしかないのである。すなわち、

$$-R_1 + P + R_2 = 0 \quad (5.1.4)$$

$$-R_1 + T_1 = 0 \quad (5.1.5)$$

$$-T_2 + R_2 = 0 \quad (5.1.6)$$

それに対し、未知数は 4 つあるので、解は得られない。では、結局のところ、どうやって解けばよいのだろうか？

ここで、3.7 節での議論を思い出してほしい。棒の変形を解く手順には、力の釣り合いから出発するものの他に、変位を未知数として出発し、歪、応力、軸力と求めていき、最終的に釣り合い式を解いて変位を求める方法があると述べた。不静定問題は、後者の方法で解けるのである！

※ 式(5.1.5)では、式(5.1.2)のうちの第一式を、式(5.1.6)では式(5.1.3)のうちの第二式を選んだ。これは、単に、計算が楽になるよう、式がよりシンプルなものを選んだだけで、式(5.1.2)の第二式や式(5.1.3)の第二式を選んでも答えは同じになる。逆に言えば、公務員試験等、短時間に解くにはこういった、ちょっとしたテクニック的なものが必要となることが多い。しかし、大学 1、2 年のうちは、あまりテクニック的なことは考えず、自分にとってやりやすいやり方で解けばよいと思う。

5.2. 不静定棒の解き方

そこで、実際に解いてみよう。「変位を未知数として出発」する方法にもいくつかあるが、ここでは最もシンプルな方法を紹介しよう。

いま、荷重点での変位を λ とすると、区間 $0 \leq x < 0.3\ell$ での棒の伸びは λ であり、区間 $0.3\ell \leq x < \ell$ での棒の伸びは $-\lambda$ となる。したがって、軸力はそれぞれ、

$$T_1 = \frac{EA}{0.3\ell} \lambda = \frac{10EA}{3\ell} \lambda, \quad T_2 = -\frac{EA}{0.7\ell} \lambda = -\frac{10EA}{7\ell} \lambda \quad (5.2.1)$$

(式(3.4.8)を参照)。釣り合い式(5.1.4)～(5.1.6)より、

$$-T_1 + P + T_2 = 0 \quad (5.2.2)$$

が導かれるので、これに式(5.2.1)を代入すると、

$$-\frac{10EA}{3\ell} \lambda + P - \frac{10EA}{7\ell} \lambda = 0 \quad (5.2.3)$$

したがって、

$$\lambda = \frac{21P\ell}{100EA} \quad (5.2.4)$$

これを式(5.2.1)を代入すると、軸力は次のようになる。

$$T_1 = \frac{7}{10} P, \quad T_2 = -\frac{3}{10} P \quad (5.2.5)$$

5.3. 効率的な釣り合い式の立て方

式(5.2.2)を見て、何かを感じなかっただろうか？この式は、ある点に $-T_1$ と P と T_2 が作用して釣り合っていることを意味するような式となっている。これは“たまたま”なのか、それとも、何か意味があることなのだろうか。

もちろん、これには意味がある。図 5.3.1(a)のように、荷重点 A で切断してみよう。このとき、荷重 P は切断した左側に含めるべきなのか、右側に含めるべきなのか、迷うかもしれない。しかし、正解はそのどちらでもなく、図 5.3.1(b)のように、接点(ジョイント)を設定する。そして、左側の点 A⁻とジョイント A との作用・反作用関係から、ジョイント A には左向きに T_1 が作用することになる。同様に、右側の点 A⁺とジョイント A との作用・反作用関係から、ジョイント A には右向きに T_2 が作用することになる。そして、もともと、点 A には集中荷重 P が作用している。

このとき、点 A の力の釣り合いより、

$$-T_1 + P + T_2 = 0 \quad (5.3.1)$$

が得られるのである。このように、集中荷重点を切断し、「ジョイント」という概念を導入すると、集中荷重が作用する場合の力の釣り合いを容易に導けるようになる。

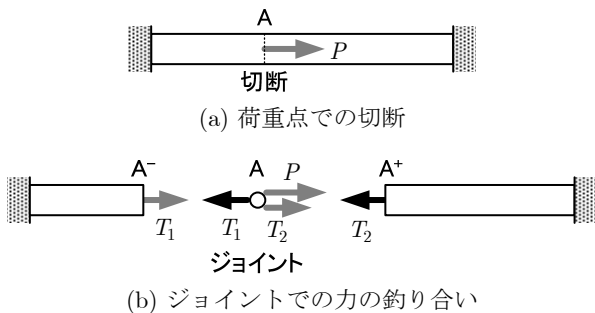


図 5.3.1 切断とジョイントでの力の釣り合い

【例題 5.1】伸びの算出(8)

奥行が 2mm、長さが 500mm の矩形断面棒で、両端を壁に固定され、以下のように厚さ h が階段状に変化し、変化するところに荷重を受ける棒がある。荷重点の変位を求めなさい。ただし、ヤング率を 70GPa とする。

1)

x	0	...	100	...	300	...	500
P, h		2mm	-10N	1.5mm	20N	2mm	

2)

x	0	...	50	...	100	...	500
P, h		1mm	-10N	2mm	20N	2mm	

3)

x	0	...	200	...	300	...	500
P, h		2mm	-20N	1mm	10N	1.5mm	

【略解 1】

- 1) 図を描くと図 5.3.2(a)のようになる。そこで、荷重点(図の点 A, B)で棒を切断し、区間 $0 \leq x < 100$ を棒 1、区間 $100 \leq x < 300$ を棒 2、区間 $300 \leq x < 500$ を棒 3 とし、それぞれの軸力 T_1, T_2, T_3 とすると、ジョイント A, B に作用する力は図 5.3.2(b)のようになる。したがって、それぞれのジョイントでの力の釣り合いは、

$$-T_1 - 10 + T_2 = 0 \quad (5.3.2)$$

$$-T_2 + 20 + T_3 = 0 \quad (5.3.3)$$

ここで、点 A の変位を u_1 、点 B の変位を u_2 とすれば、棒 1 の伸びは u_1 、棒 2 の伸びは $u_2 - u_1$ 、棒 3 の伸びは $-u_2$ となるので、軸力は、

$$\begin{cases} T_1 = \frac{(70 \times 10^9) \times (2 \times 10^{-3}) \times (2 \times 10^{-3})}{100 \times 10^{-3}} u_1 \\ = 2.8 \times 10^6 u_1 \\ T_2 = \frac{(70 \times 10^9) \times (1.5 \times 10^{-3}) \times (2 \times 10^{-3})}{200 \times 10^{-3}} (u_2 - u_1) \\ = 1.05 \times 10^6 (u_2 - u_1) \\ T_3 = -\frac{(70 \times 10^9) \times (2 \times 10^{-3}) \times (2 \times 10^{-3})}{200 \times 10^{-3}} u_2 \\ = -1.4 \times 10^6 u_2 \end{cases} \quad (5.3.4)$$

これらを式(5.3.2)、(5.3.3)に代入すると、

$$\begin{cases} -2.8 \times 10^6 u_1 - 10 + 1.05 \times 10^6 (u_2 - u_1) = 0 \\ -1.05 \times 10^6 (u_2 - u_1) + 20 - 1.4 \times 10^6 u_2 = 0 \end{cases} \quad (5.3.5)$$

これを解くと、

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{50}{119} \times 10^{-6} \approx -0.420 [\mu\text{m}] \\ u_2 = \frac{950}{119} \times 10^{-6} \approx 7.98 [\mu\text{m}] \end{cases} \quad (5.3.6)$$

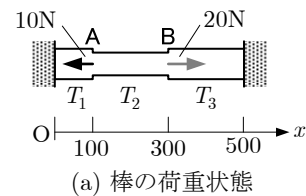


図 5.3.2 力の釣り合い (【例題 5.1】1)

(問題 2) と 3)については省略

【略解 2】

この問題と、これまでやってきた静定の棒の問題との違いは、棒の右端に作用する外力が未知であることである。そのため、略解 1 のような手順を踏むこととなった。逆に言えば、右端に作用する外力がわかればよい。そこで、これを P とでもおいて、各荷重点での変位、および、右端での変位を求める(当然ながら、 P を含む式になるはず)。そして、右端での変位が 0 となるように P を決定する。 P がわかれば、各荷重点での変位の式に代入することで、変位の値が求まる。

5.4. まとめ

静定問題と不静定問題の違いについて学び、不静定棒の変位の求め方について学んだ。変位を未知数として解く方法は、静定、不静定に関わらず、必ず解を得ることができる方法であり、市販の構造解析ソフトはこの方法(変位法と呼ばれる)で解くよう、プログラムが書かれている。

5.5. 宿題

- 1) 【例題 5.1】の 2), 3)を解きなさい。

次の問題は、時間に余裕があったら解いてみてください。

- 2) 図5.5.1のように、上下を固定された長さ ℓ の棒がある。
棒の中央点の変位を求めなさい。

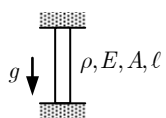


図 5.5.1 上下を固定された棒

第6章 トラスの変形(1)

これまで是一本の棒の変形について考えてきたが、今回と次回は、複数の棒をピンで結合された静定の「トラス構造」の変形の計算法について学ぶ。

6.1. トラス構造とラーメン構造

理屈を説明する前に、まずはトラス構造 (truss structure) の例 (図 6.1.1) をみてみよう。

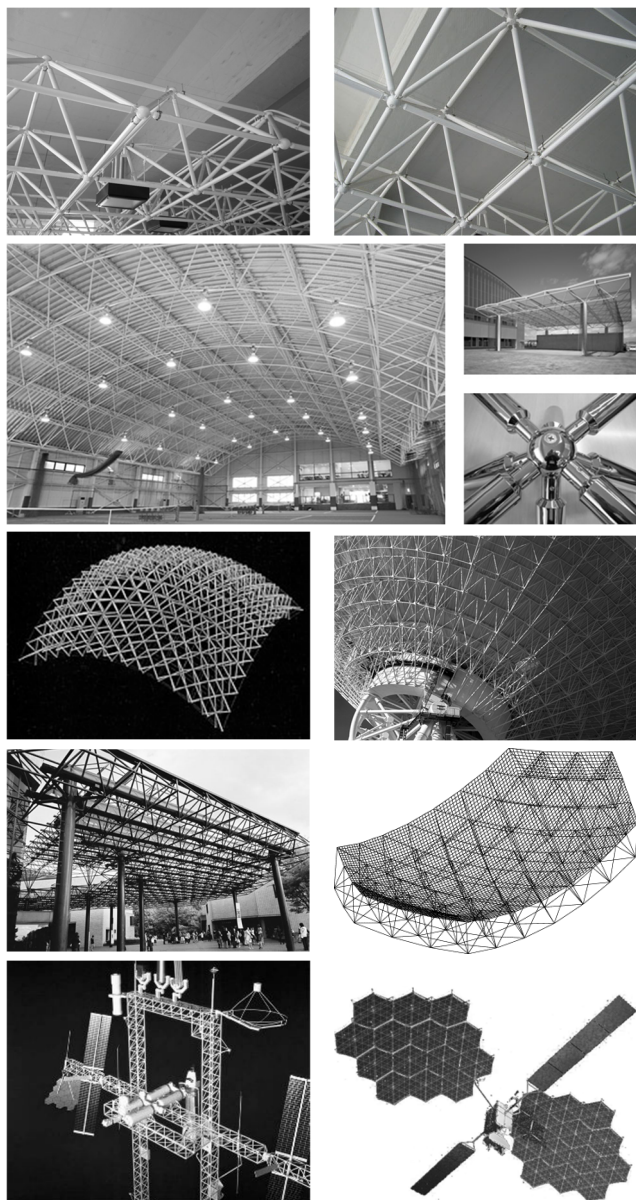


図 6.1.1 トラス構造の例

トラス構造とは、骨組み構造 (frame structure) の一種で、簡単に言うと、「軸力のみで荷重を支える骨組構造」である。これに対し、ラーメン構造 (rigid-frame structure. ちなみに、Rahmen はドイツ語) というものがある。これは、荷重を軸力だけでなく、部材の曲げで支える (曲げモーメントとせん断力で支える) 構造である。別の言い方をすると、理想的なトラス構造では、骨組みの頂点 (ジョイント) では曲げモーメントは伝わらず (支えられず)、軸力のみで荷重を伝達する。実際、ジョイントがベアリング等で回転自由な状態になっていれば、この条件は満たされる。ただし、ジョイントが回転自由になっていることは極めてまれで、実際には曲げモーメントも伝わるが、骨組みを上手に組むと、ほとん

ど軸力で荷重を支え、曲げモーメントやせん断力はわずしかかからない構造にすることができる。

これに対し、理想的なラーメン構造では、ジョイントは剛結され、部材同士の角度は変形後も変わらない。

例えば、図 6.1.2(a) のように棒 AB, BC, CD を剛結合したのがラーメン構造であり、この構造の場合、荷重がかかると、軸力だけでは支えられず、曲げモーメントやせん断力が必要となる。これに対し、(b) のように頂点はピン結合で、ただし、斜め部材 AC を加えると、軸力だけでも支えることができる。そして、(c) のように頂点を剛結合した場合も、斜め部材があることで、外部からの荷重に対し、各棒には主に軸力しかかからない。

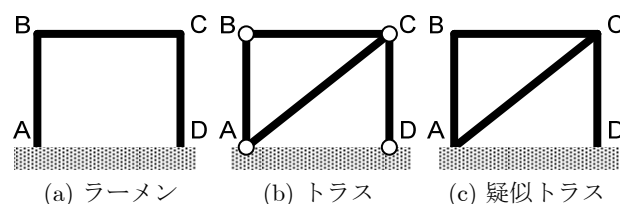


図 6.1.2 ラーメン構造とトラス構造

これに対し、図 6.1.3(a) のように斜め部材がないピン結合であると、例えば点 B に横荷重が作用すると、全体が(b)のように倒れてしまい、構造として成り立たないので、このような構造にはしてはならない。

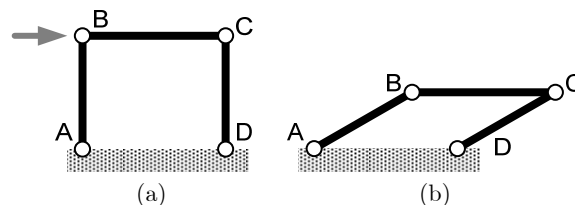


図 6.1.3 トラス構造では成り立たない例

6.2. 静定トラスの軸力の算出法

ここでは、重力のような分布力は作用せず、トラスの頂点 (結合点) にのみ集中荷重が作用する問題のみを考える。また、立体ではなく、平面トラスのみを考えることとする。

【例題 6.1】静定トラスの軸力(1)

図 6.2.1 のようなトラスの頂点 B に下向きの荷重 P が作用している。棒 AB, BC の軸力をそれぞれ求めなさい。

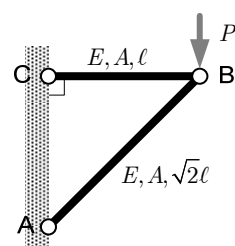


図 6.2.1 静定トラスの軸力【例題 6.1】

【略解】

トラスの問題では、頂点で棒を切断して、頂点で力の釣り

合いを考えるのが鉄則である。

棒 AB の軸力を T_1 、棒 BC の軸力を T_2 とすると、図 6.2.2 のようになり、点 B の左右方向の力の釣り合いは

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - T_2 = 0 \quad (6.2.1)$$

上下方向の力の釣り合いは

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - P = 0 \quad (6.2.2)$$

これらを連立して解くと、

$$T_1 = -\sqrt{2}P, \quad T_2 = P \quad (6.2.3)$$

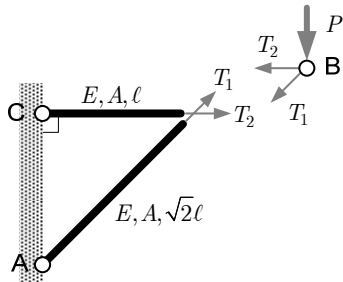


図 6.2.2 トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.1】

【例題 6.2】静定トラスの軸力(2)

図 6.2.3 のようなトラスの頂点 B に下向きの荷重 P が作用している。棒 AB, BC の軸力をそれぞれ求めなさい。

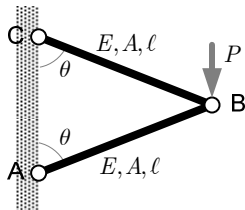


図 6.2.3 静定トラスの軸力【例題 6.2】

【略解】

棒 AB の軸力を T_1 、棒 BC の軸力を T_2 とすると、図 6.2.4 のようになり、点 B の左右方向および上下方向の力の釣り合いはそれぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} -T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta = 0 \\ -T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta - P = 0 \end{cases} \quad (6.2.4)$$

これらを連立して解くと、

$$T_1 = -\frac{P}{2 \cos \theta}, \quad T_2 = \frac{P}{2 \cos \theta} \quad (6.2.5)$$

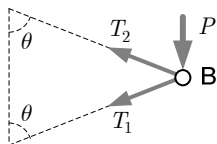


図 6.2.4 トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.2】

※ 本来は、図 6.2.2 のように棒と頂点は分離した図で考えるべきなのだろうが、図 6.2.4 のように棒のところにそのまま軸力の矢印を描いた方が、図を描く手間が省けて便利だろう。ただし、この図は、あくまでも点 B だけを分離した図であることを忘れないように。

【例題 6.3】静定トラスの軸力(3)

図 6.2.5 のようなトラスの棒 AB, BC, CA の軸力をそ

れぞれ求めなさい。また、点 A, 点 B における反力を求めなさい。

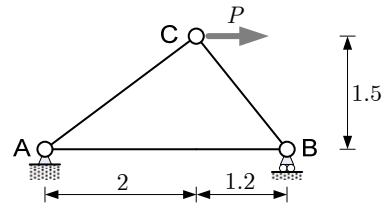


図 6.2.5 静定トラスの軸力【例題 6.3】

【略解】

トラスの頂点に作用する力は図 6.2.6 のように書ける(点 B には車輪が付いていますが、この意味はわかりますか?)。いま、この図のように角度 θ_1 と θ_2 を定義する。このとき、

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{4}{5}, & \cos \theta_1 = \frac{3}{5} \\ \sin \theta_2 = \frac{1.2}{\sqrt{1.2^2 + 1.5^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}}, & \cos \theta_2 = \frac{5}{\sqrt{41}} \end{cases} \quad (6.2.6)$$

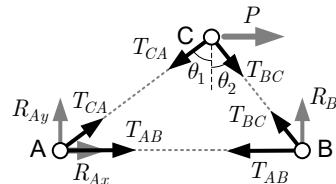


図 6.2.6 トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.3】

この手のトラスの問題では、どの頂点から力の釣り合いを解いていくかが大事になる。実際、一つの頂点に棒が 3 つ以上連結されている場合、力の釣り合いだけでは全ての棒の軸力を求めることはできない。しかし、3 本以上あっても、そのうちで軸力が未知なのが 2 本だけであれば解ける。この問題では、点 A や B での釣り合いから解こうとしても解けないが、点 C なら解ける。実際、点 C での釣り合いは

$$\begin{cases} -T_{CA} \sin \theta_1 + T_{BC} \sin \theta_2 + P = 0 \\ -T_{CA} \cos \theta_1 - T_{BC} \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (6.2.7)$$

これに式(6.2.6)を代入して解くと、

$$T_{CA} = \frac{25}{32}P, \quad T_{BC} = -\frac{3\sqrt{41}}{32}P \quad (6.2.8)$$

次に、点 B での力の釣り合いより、

$$-T_{AB} - T_{BC} \sin \theta_2 = 0, \quad T_{BC} \cos \theta_2 + R_B = 0 \quad (6.2.9)$$

したがって、

$$T_{AB} = \frac{3}{8}P, \quad R_B = \frac{15}{32}P \quad (6.2.10)$$

最後に、点 A での力の釣り合いより、

$$R_{Ax} + T_{AB} + T_{CA} \sin \theta_1 = 0, \quad R_{Ay} + T_{CA} \cos \theta_1 = 0 \quad (6.2.11)$$

したがって、

$$R_{Ax} = -P, \quad R_{Ay} = -\frac{15}{32}P \quad (6.2.12)$$

※ ここでは棒の軸力を求めてから反力を求めたが、トラス全体の力の釣り合いとモーメントの釣り合いから反力を直接求めることもできる。

【例題 6.4】静定トラスの軸力(4)

図 6.2.7 のような 4 本の同じ長さの棒から成るトラス

の各棒の軸力を求めなさい。また、点 A、点 B における反力を求めなさい。

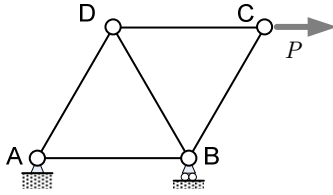


図 6.2.7 静定トラスの軸力【例題 6.4】

【例題 6.5】静定トラスの軸力(5)

図 6.2.8 のようなトラスの棒 AB, BC, AD, BD, CD の軸力をそれぞれ求めなさい。また、点 A、点 B における反力を求めなさい。

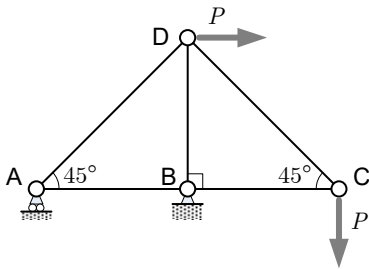


図 6.2.8 静定トラスの軸力【例題 6.5】

【略解】

この問題も、【例題 6.3】と同様、どの頂点での力の釣り合いから解いていくか、順番が重要となる。この問題では、最初に点 D で力の釣り合いを考えても解けないが、点 C からであれば解ける。

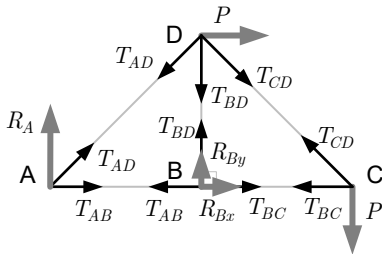


図 6.2.9 トラスの頂点での力の釣り合い【例題 6.5】

実際、棒に作用する力は図 6.2.9 のようになり、点 C で力の釣り合い式を立てると、

$$-T_{BC} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{CD} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}T_{CD} - P = 0 \quad (6.2.13)$$

したがって、

$$T_{BC} = -P, \quad T_{CD} = \sqrt{2}P \quad (6.2.14)$$

次に、点 D での力の釣り合いより、

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{AD} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{CD} + P = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{AD} - T_{BD} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{CD} = 0 \end{cases} \quad (6.2.15)$$

この式に式(6.2.14)を代入して T_{AD} 、 T_{BD} を求めると、

$$T_{AD} = 2\sqrt{2}P, \quad T_{BD} = -3P \quad (6.2.16)$$

次に、点 A での力の釣り合いより、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}T_{AD} + T_{AB} = 0, \quad R_A + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{AD} = 0 \quad (6.2.17)$$

式(6.2.16)を代入して T_{AB} と R_A を求めると、

$$T_{AB} = -2P, \quad R_A = -2P \quad (6.2.18)$$

最後に、点 B での力の釣り合いより、

$$-T_{AB} + T_{BC} + R_{Bx} = 0, \quad T_{BD} + R_{By} = 0 \quad (6.2.19)$$

式(6.2.14)、(6.2.16)、(6.2.18)を代入して R_{Bx} 、 R_{By} を求めると、

$$R_{Bx} = -P, \quad R_{By} = 3P \quad (6.2.20)$$

【例題 6.6】静定トラスの軸力(6)

図 6.2.10 のようなトラスの頂点 G に下向きの荷重 P が作用しているとき、それぞれの棒の軸力を求めなさい。

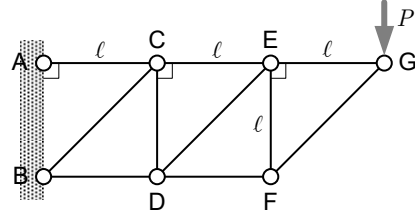


図 6.2.10 静定トラスの軸力【例題 6.6】

【略解】

このようなトラスの問題では、各頂点で順番に力の釣り合いを解いていけば、芋づる式に軸力が求まっていくのだが、どの順番で解いていくかがポイントとなる。

結果だけ記すと、まず、点 G での力の釣り合いから、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} - T_{EG} = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} - P = 0 \quad (6.2.21)$$

したがって、

$$T_{FG} = -\sqrt{2}P, \quad T_{EG} = P \quad (6.2.22)$$

次に、点 F での力の釣り合いから、

$$-T_{DF} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} = 0, \quad T_{EF} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} = 0 \quad (6.2.23)$$

したがって、

$$T_{DF} = \frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} = -P, \quad T_{EF} = -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{FG} = P \quad (6.2.24)$$

次に、点 E での力の釣り合いから、

$$-T_{CE} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} + T_{EG} = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} - T_{EF} = 0 \quad (6.2.25)$$

したがって、

$$\begin{cases} T_{DE} = -\sqrt{2}T_{EF} = -\sqrt{2}P \\ T_{CE} = -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} + T_{EG} = P + P = 2P \end{cases} \quad (6.2.26)$$

次に、点 D での力の釣り合いから、

$$-T_{BD} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} + T_{DF} = 0, \quad T_{CD} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} = 0 \quad (6.2.27)$$

したがって、

$$\begin{cases} T_{CD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} = P \\ T_{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}}T_{DE} + T_{DF} = -P - P = -2P \end{cases} \quad (6.2.28)$$

最後に、点 C での力の釣り合いから

$$-T_{AC} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{BC} + T_{CE} = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{BC} - T_{CD} = 0 \quad (6.2.29)$$

したがって,

$$\begin{cases} T_{BC} = -\sqrt{2}T_{CD} = -\sqrt{2}P \\ T_{AC} = -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{BC} + T_{CE} = P + 2P = 3P \end{cases} \quad (6.2.30)$$

したがって、軸力の分布は図 6.2.11 のようになる。この図からわかる通り、縦部材や斜め部材の軸力はそれぞれ一様で、上辺の軸力は引張側で壁に近くなるほど大きくなり、下辺の軸力は圧縮側で壁に近くなるほど圧縮が大きくなる。

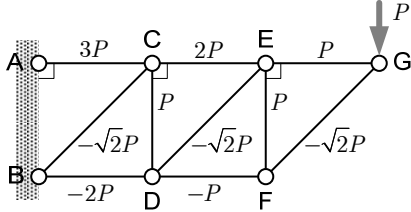


図 6.2.11 静定トラスの軸力分布【例題 6.6】

【例題 6.7】静定トラスの軸力(7)

図 6.2.12 のように、図 6.2.10 のトラスに棒 FH と棒 GH が加わったトラスの頂点 G に下向きの荷重 P が作用している。このとき、それぞれの棒の軸力を求めなさい。

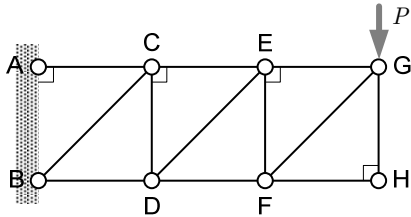


図 6.2.12 静定トラスの軸力【例題 6.7】

【略解】

この問題は、点 G に 3 本の棒が集まっているので解けないように見えるかもしれないが、実は解ける。結論だけ述べると、棒 FH と棒 GH の軸力は 0 で、その他の棒の軸力は【例題 6.6】と全く同じ、すなわち、図 6.2.11 のようになる(理由はわかりますか?)。

【例題 6.8】静定トラスの軸力(8)

図 6.2.13 のように、【例題 6.7】と同じトラスの点 H に下向きの荷重 P が作用している。このとき、それぞれの棒の軸力を求めなさい。

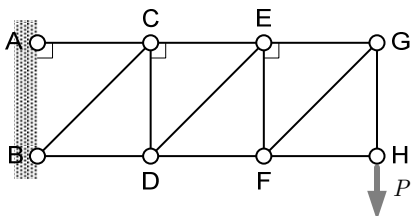


図 6.2.13 静定トラスの軸力【例題 6.8】

6.3. トラスの変位

トラスの頂点の変位を求めてみよう。

【例題 6.9】静定トラスの変位(1)

【例題 6.1】において、点 B の変位を求めなさい。

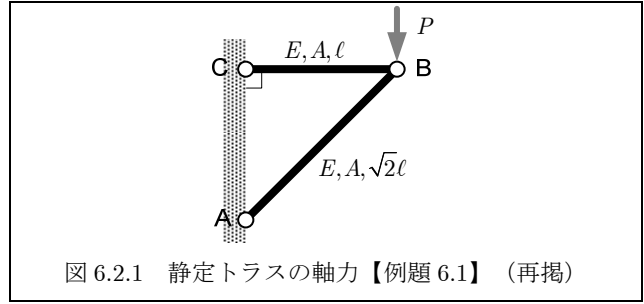


図 6.2.1 静定トラスの軸力【例題 6.1】(再掲)

【略解 1】

【例題 6.1】の結果より、棒 AB の軸力 T_1 と棒 BC の軸力 T_2 はそれぞれ以下になることはわかっている。

$$T_1 = -\sqrt{2}P, \quad T_2 = P \quad (6.3.1)$$

したがって、棒 AB の伸び λ_1 と棒 BC の伸び λ_2 はそれぞれ

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}P \times \sqrt{2}\ell}{EA} = -\frac{2P\ell}{EA}, \quad \lambda_2 = \frac{P\ell}{EA} \quad (6.3.2)$$

となることもわかる。では、点 B は横方向にどれだけ変位し、縦方向にどれだけ変位するであろうか？

点 B の横方向変位を u 、縦方向変位を v とするとき、 λ_1 と λ_2 から u と v を求めることは、できないことはないが、正直、やや面倒である。実は、このような問題では、 u と v から λ_1 と λ_2 を求め、それが式(6.3.2)と一致する、という方程式を立てて解くことで、 u と v を求めることができる。

では、どうやって u と v から λ_1 と λ_2 を求めればよいのだろうか？この節はこれについて考えてみよう。

いま、図 6.3.1 のように点 B が (u, v) だけ変位して、 B' に移動したとする。このとき、それぞれの棒の伸びは

$$\lambda_1 = \overline{AB'} - \sqrt{2}\ell, \quad \lambda_2 = \overline{CB'} - \ell \quad (6.3.3)$$

となる。 $\overline{AB'}$ と $\overline{CB'}$ を実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} \overline{AB'} &= \sqrt{(\ell + u)^2 + (\ell + v)^2} \\ &= \sqrt{2\ell^2 + 2\ell(u + v) + u^2 + v^2} \\ &= \sqrt{2}\ell \left[\sqrt{1 + \frac{u + v}{\ell} + \frac{u^2 + v^2}{2\ell^2}} \right] \\ &\approx \sqrt{2}\ell \left(1 + \frac{u + v}{2\ell} \right) = \sqrt{2}\ell + \frac{u + v}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

$$\begin{aligned} \overline{CB'} &= \sqrt{(\ell + u)^2 + v^2} \\ &= \sqrt{\ell^2 + 2\ell u + u^2 + v^2} = \ell \sqrt{1 + \frac{2u}{\ell} + \frac{u^2 + v^2}{\ell^2}} \\ &\approx \ell \left(1 + \frac{u}{\ell} \right) = \ell + u \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

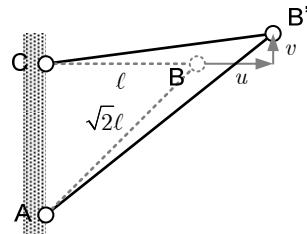


図 6.3.1 トラスの変位【例題 6.9】

したがって、伸びは、

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx \sqrt{2}\ell + \frac{u + v}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\ell = \frac{u + v}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 \approx \ell + u - \ell = u \end{cases} \quad (6.3.6)$$

このようにして、伸びが求まったので、式(6.3.2)を用いると

$$\frac{u+v}{\sqrt{2}} = -\frac{2P\ell}{EA}, \quad u = \frac{P\ell}{EA} \quad (6.3.7)$$

したがって、変位は

$$u = \frac{P\ell}{EA}, \quad v = -\frac{(2\sqrt{2}+1)P\ell}{EA} \quad (6.3.8)$$

※ 図 6.3.2 のように、長さ ℓ の棒 AB があり、AB 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とする。いま、点 B の変位ベクトルが $\mathbf{u}$ であるとき、棒の伸びは

$$\lambda = \overline{AB'} - \overline{AB} = |\ell\mathbf{e} + \mathbf{u}| - \ell \approx \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \quad (6.3.9)$$

で求められる（この近似式を導くことができますか？）。すなわち、 ℓ に関係なく、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{e}$ の内積をとれば伸びが求まるのである。この近似を用いるのが材料力学の重要な特徴の一つである。

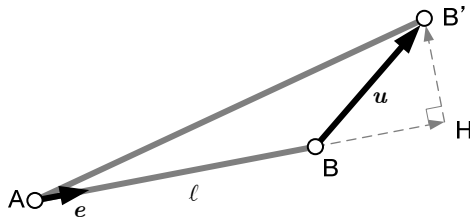


図 6.3.2 棒の伸びの算出法

実際、式(6.3.9)を用いると、【例題 6.9】については、

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u \end{cases} \quad (6.3.10)$$

となり、式(6.3.6)と同じ結果を得る。なお、式(6.3.9)の近似は、棒に対して垂直方向の変位を無視することを意味している。図 6.3.2 でいえば、棒 AB の伸びを BH と近似して、B'H の長さの影響を無視するのが材料力学である。

この近似によると、棒と垂直方向の変位（B'H 方向の変位）が起こっても、棒は伸びたとみなさず、軸力は発生しない。逆に言えば、棒の軸力が 0 だったとしても、点 B は B'H 方向に変位している可能性がある。

【略解 2】

略解 1 からわかる通り、結局、変位を未知数として解くことになるので、それであれば、不静定問題と同様、はじめから変位を未知数にして解いてみる方法も考えられる。実際、点 B の変位を (u, v) とすれば、棒 AB, BC の伸びは

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u \end{cases} \quad (6.3.11)$$

したがって、棒 AB, BC の軸力はそれぞれ

$$T_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}\ell} \lambda_1 = \frac{EA}{2\ell} (u+v), \quad T_2 = \frac{EA}{\ell} \lambda_2 = \frac{EA}{\ell} u \quad (6.3.12)$$

点 B における力の釣り合いは

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - T_2 = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - P = 0 \quad (6.3.13)$$

したがって、

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (u+v) - \frac{EA}{\ell} u = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (u+v) - P = 0 \end{cases} \quad (6.3.14)$$

これより、

$$u = \frac{P\ell}{EA}, \quad v = -\frac{(2\sqrt{2}+1)P\ell}{EA} \quad (6.3.15)$$

※ 点 B の変位先がどのあたりになるか、図示することができますか？

【例題 6.10】静定トラスの変位(2)

【例題 6.2】において、点 B の変位を求めなさい。

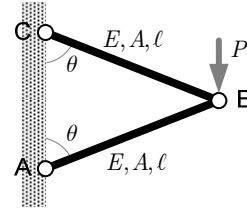


図 6.3.3 静定トラスの軸力【例題 6.2】

【略解】

点 B の変位を (u, v) とすれば、棒 AB, BC の伸びはそれぞれ

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = u \sin \theta + v \cos \theta \\ \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} = u \sin \theta - v \cos \theta \end{cases} \quad (6.3.16)$$

したがって、棒 AB, BC の軸力はそれぞれ

$$\begin{cases} T_1 = \frac{EA}{\ell} \lambda_1 = \frac{EA}{\ell} (u \sin \theta + v \cos \theta) \\ T_2 = \frac{EA}{\ell} \lambda_2 = \frac{EA}{\ell} (u \sin \theta - v \cos \theta) \end{cases} \quad (6.3.17)$$

一方、点 B における力の釣り合いより、

$$\begin{cases} -T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta = 0 \\ -T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta - P = 0 \end{cases} \quad (6.3.18)$$

これらを連立して解くと、

$$T_1 = -\frac{P}{2 \cos \theta}, \quad T_2 = \frac{P}{2 \cos \theta} \quad (6.3.19)$$

したがって、式(6.3.17), (6.3.19)より、

$$\begin{cases} \frac{EA}{\ell} (u \sin \theta + v \cos \theta) = -\frac{P}{2 \cos \theta} \\ \frac{EA}{\ell} (u \sin \theta - v \cos \theta) = \frac{P}{2 \cos \theta} \end{cases} \quad (6.3.20)$$

これを解くと、

$$u = 0, \quad v = -\frac{P\ell}{2EA \cos^2 \theta} \quad (6.3.21)$$

【例題 6.11】静定トラスの変位(3)

【例題 6.1】と同じトラスで、荷重の方向が右方向の場合について、点 B の変位を求めなさい。

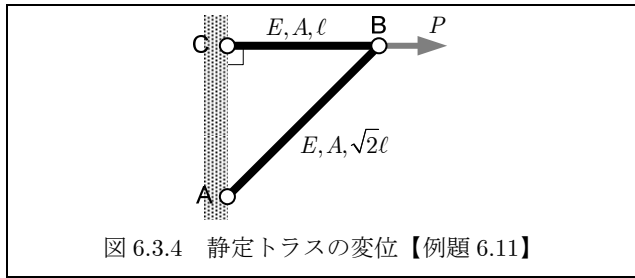


図 6.3.4 静定トラスの変位【例題 6.11】

【略解】

棒 AB および BC の軸力をそれぞれ T_1 および T_2 とすれば、点 B での力の釣り合いより、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - T_2 + P = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 = 0 \quad (6.3.22)$$

つまり、

$$T_1 = 0, \quad T_2 = P \quad (6.3.23)$$

一方、点 B の変位を (u, v) とすれば、棒 AB および BC の伸びはそれぞれ

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u \quad (6.3.24)$$

であるから、軸力は

$$T_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \lambda_1 = \frac{EA}{2l} (u+v), \quad T_2 = \frac{EA}{l} \lambda_2 = \frac{EA}{l} u \quad (6.3.25)$$

したがって、式(6.3.23), (6.3.25)より、

$$\frac{EA}{2l} (u+v) = 0, \quad \frac{EA}{l} u = P \quad (6.3.26)$$

よって、

$$u = \frac{Pl}{EA}, \quad v = -\frac{Pl}{EA} \quad (6.3.27)$$

※ なお、棒 AB の軸力が 0 であるので、点 B は棒 AB に垂直方向に変位する。つまり、点 B は図 6.3.5 の直線 PQ 上のどこかに移動する。一方、棒 BC の軸力が P であることから、棒 BC の伸びは $\lambda_2 = Pl/EA$ であることがわかる。したがって、点 B は図 6.3.5 の直線 GH 上のどこかに移動することがわかる。したがって、点 B は両者の交点である B' に移動することがわかる。このように、軸力を求めることで棒の伸びを算出し、幾何学的関係から変位先を図示することは可能ではあるが、実際に図から u や v を求めることは、一般にはやや面倒である（この例題なら容易であろうが）。

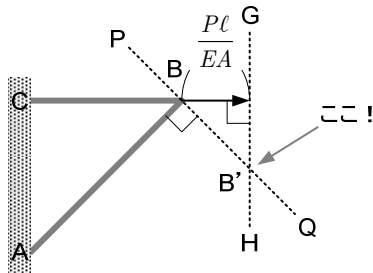


図 6.3.5 変形後の頂点の位置【例題 6.11】

【例題 6.12】静定トラスの変位(4)

【例題 6.1】と同じトラスで、荷重の方向が右斜め 45 度方向の場合について、点 B の変位を求めなさい。

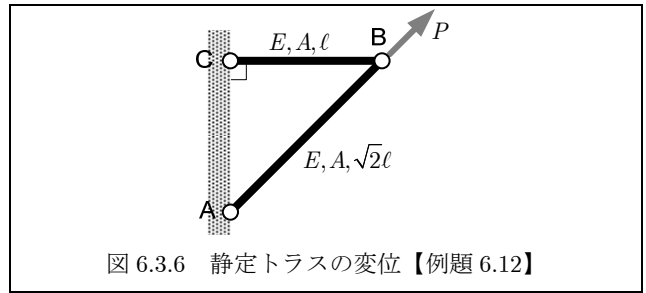


図 6.3.6 静定トラスの変位【例題 6.12】

6.4. まとめ

静定トラスの軸力の求め方について学んだ。また、トラスの頂点の変位から棒の伸びを求める方法を学び、それを用いて、荷重を受けるトラスの頂点の変位を求める方法について学んだ。

6.5. 宿題

【例題 6.4】，【例題 6.8】，【例題 6.12】を解きなさい。

第7章 トラスの変形(2)

前回の講義では「静定トラス」の変形について学んだが、今回はその発展として、まず、シンプルな「不静定トラス」の変形の解析法について学ぶ。そして、静定、不静定によらず、より複雑な「トラス構造」の変形の解析法について学ぶ。

7.1. 不静定トラス

次の問題を解いてみよう。

【例題 7.1】 不静定トラスの変位(1)

図 7.1.1 のようなトラスにおいて、点 D にて右方向の荷重 P が作用するとき、点 D の変位を求めなさい。

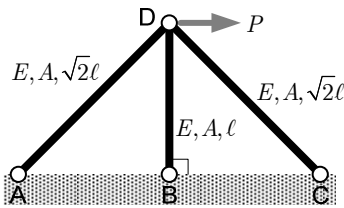


図 7.1.1 不静定トラスの変位【例題 7.1】

【略解】

棒 AD, BD, CD の軸力をそれぞれ T_1, T_2, T_3 とすると、点 D での力の釣り合いは

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}T_3 + P = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}T_1 - T_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}T_3 = 0 \end{cases} \quad (7.1.1)$$

となるが、釣り合い式が 2 つであるのに対し、未知数は 3 つであるので、釣り合い式が足りない。つまり、この問題は不静定問題である。そこで、点 D の変位を (u, v) とし、軸力を u と v で表してみよう。

まず、棒 AD, BD, CD の伸びはそれぞれ、

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, & \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v \\ \lambda_3 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{-u+v}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (7.1.2)$$

したがって、軸力は

$$\begin{cases} T_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \lambda_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \frac{u+v}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2l} (u+v) \\ T_2 = \frac{EA}{l} \lambda_2 = \frac{EA}{l} v \\ T_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \lambda_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \frac{-u+v}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2l} (-u+v) \end{cases} \quad (7.1.3)$$

これらを釣り合い式(7.1.1)に代入すると、

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2l} (u+v) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2l} (-u+v) + P = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2l} (u+v) - \frac{EA}{l} v - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2l} (-u+v) = 0 \end{cases} \quad (7.1.4)$$

これを解くと、

$$u = \frac{\sqrt{2}P\ell}{EA}, \quad v = 0 \quad (7.1.5)$$

【例題 7.2】 不静定トラスの変位(2)

図 7.1.2 のような、同じ材質で長さだけが異なる棒 3 本から成るトラスにおいて、点 B にて右方向の荷重 P が作用するとき、点 D の変位を求めなさい。

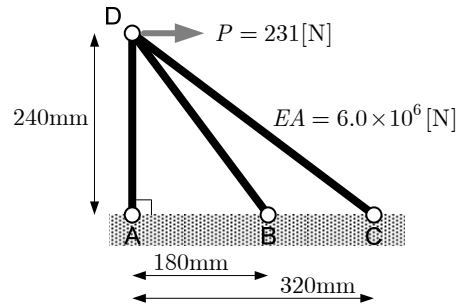


図 7.1.2 不静定トラスの変位【例題 7.2】

【略解】

点 D の変位を (u, v) [m] とすると、棒 AD, BD, CD の伸びはそれぞれ、

$$\begin{cases} \lambda_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v, & \lambda_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{-3u+4v}{5} \\ \lambda_3 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{-4u+3v}{5} \end{cases} \quad (7.1.6)$$

したがって、棒 AD, BD, CD の軸力はそれぞれ、

$$\begin{cases} T_1 = \frac{6.0 \times 10^6}{0.24} \lambda_1 = 25 \times 10^6 v \\ T_2 = \frac{6.0 \times 10^6}{0.30} \lambda_2 = \frac{6.0 \times 10^6}{0.30} \frac{-3u+4v}{5} \\ \quad = 4.0 \times 10^6 (-3u+4v) \\ T_3 = \frac{6.0 \times 10^6}{0.4} \lambda_3 = \frac{6.0 \times 10^6}{0.4} \frac{-4u+3v}{5} \\ \quad = 3.0 \times 10^6 (-4u+3v) \end{cases} \quad (7.1.7)$$

点 D における力の釣り合いは、

$$\frac{3}{5}T_2 + \frac{4}{5}T_3 + P = 0, \quad -T_1 - \frac{4}{5}T_2 - \frac{3}{5}T_3 = 0 \quad (7.1.8)$$

これに式(7.1.7)を代入すると、

$$\begin{cases} \frac{3}{5} \times 4.0 \times 10^6 \times (-3u+4v) \\ \quad + \frac{4}{5} \times 3.0 \times 10^6 \times (-4u+3v) + 231 = 0 \\ -24 \times 10^6 v - \frac{4}{5} \times 4.0 \times 10^6 \times (-3u+4v) \\ \quad - \frac{3}{5} \times 3.0 \times 10^6 \times (-4u+3v) = 0 \end{cases} \quad (7.1.9)$$

これを解くと、

$$u = 22.5[\mu\text{m}], \quad v = 8.75[\mu\text{m}] \quad (7.1.10)$$

7.2. 複数 bay のトラスの変形

図 7.2.1 のように棒 AB が変形し、点 A が u_A だけ変位して点 A' に、点 B が u_B だけ変位して点 B' に移動したとする。このとき、棒の伸び $\lambda_{AB} = A'B' - AB$ はどのような式で表せるであろうか？つまり、いままでは、点 A は固定で点 B だけが変位した場合の伸びを求めてきたが、点 A も変位する場合はどうなるであろうか？

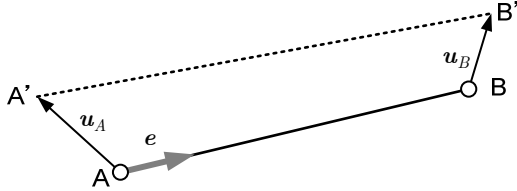


図 7.2.1 棒の伸びの算出

点 A' からみた点 B' の相対変位は $u_B - u_A$ となるので、

$$\lambda_{AB} = (u_B - u_A) \cdot e \quad (7.2.1)$$

となる。これを頭に入れて、以下、複数 bay の問題を考えてみよう。

例えば、図 6.2.10 (【例題 6.6】) のような複数 bay のトラスの変形を手計算するのは大変だが、次の例題くらいであれば、方程式を立てることはできるだろう。

【例題 7.3】不静定トラスの変位(3)

図 7.2.2 のような不静定トラスにおいて、点 E にて右方向の荷重 P が作用するとき、点 D と点 E の変位を求める方程式を立てなさい (棒の材質および断面積は全て同じである)。

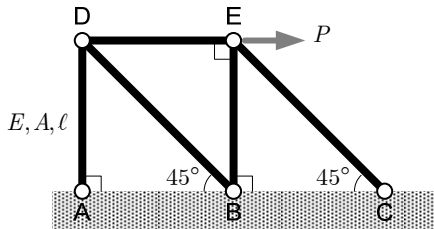


図 7.2.2 不静定トラスの変位【例題 7.3】

【略解】

棒が 5 本、すなわち、未知の軸力が 5 個で、釣り合い式は点 D, E でそれぞれ 2 つずつの計 4 つしかないの、この問題は不静定問題である。そこで、点 D, E の変位をそれぞれ (u_1, v_1) , (u_2, v_2) とすると、棒 AD, BD, BE, CE の伸びはそれぞれ、

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{AD} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1, & \lambda_{BD} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{-u_1 + v_1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_{BE} &= \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_2, & \lambda_{CE} &= \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{-u_2 + v_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right. \quad (7.2.2)$$

そして、棒 DE の伸びは

$$\lambda_{DE} = \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 - u_1 \quad (7.2.3)$$

したがって、軸力は

$$\begin{cases} T_{AD} = \frac{EA}{\ell} v_1, & T_{BD} = \frac{EA}{\sqrt{2}\ell} \frac{-u_1 + v_1}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2\ell} (-u_1 + v_1) \\ T_{BE} = \frac{EA}{\ell} v_2, & T_{CE} = \frac{EA}{\sqrt{2}\ell} \frac{-u_2 + v_2}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{2\ell} (-u_2 + v_2) \\ T_{DE} = \frac{EA}{\ell} (u_2 - u_1) \end{cases} \quad (7.2.4)$$

力の釣り合いは、点 D, E でそれぞれ、

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} T_{BD} + T_{DE} = 0, & -T_{AD} - \frac{1}{\sqrt{2}} T_{BD} = 0 \\ -T_{DE} + \frac{1}{\sqrt{2}} T_{CE} + P = 0, & -T_{BE} - \frac{1}{\sqrt{2}} T_{CE} = 0 \end{cases} \quad (7.2.5)$$

これに式(7.2.4)を代入することで、 u_1, v_1, u_2, v_2 に関する方程式を得ることができる。すなわち、

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (-u_1 + v_1) + \frac{EA}{\ell} (u_2 - u_1) = 0 \\ -\frac{EA}{\ell} v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (-u_1 + v_1) = 0 \\ -\frac{EA}{\ell} (u_2 - u_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (-u_2 + v_2) + P = 0 \\ -\frac{EA}{\ell} v_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{EA}{2\ell} (-u_2 + v_2) = 0 \end{cases} \quad (7.2.6)$$

7.3. まとめ

不静定トラスの変形解析法について学んだ。変位を未知数にして方程式を立てる手順自体は機械的にできるので、パソコンを使えば複数 bay のトラスでも容易に解を求めることができる。実際、市販のソフトはこの手順をプログラミングして計算している。

7.4. 宿題

- 1) 式(7.2.6)を解いて、 u_1, v_1, u_2, v_2 を求めなさい。

第8章 熱応力

一般に、棒に熱を加えると棒は伸びる。つまり、歪が生じる。これにより、境界条件によっては、荷重を加えなくても応力が生じる場合があり、設計上、大きな問題になることがある。そこで、今回の講義では熱による応力や歪について学ぼう。

8.1. 線膨張係数と熱歪

一般に、温度上昇によって長さや体積が変化する割合は熱膨張率 (coefficient of thermal expansion, CTE) と呼ばれる。その中でも、棒の長さの変化率は線膨張率、あるいは、線膨張係数と呼ばれる。例えば、長さ ℓ の棒に熱を加えて ΔT だけ温度が上昇したとき、棒は伸びるが、そのときの歪 ε_T は ΔT に比例することが知られている。そこで、その比例定数を線膨張係数と呼ぶ。つまり、線膨張係数を α とすれば、

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad (8.1.1)$$

つまり、 ΔT だけ温度が上昇すると、棒には $\alpha \Delta T$ だけの歪が生じるのである。この歪 ε_T は熱歪 (thermal strain) と呼ばれる。

熱歪 ε_T による伸び λ_T は、棒の伸び方が一様 (棒の各部の温度が一様に变化する) であれば、

$$\lambda_T = \varepsilon_T \ell = \alpha \ell \Delta T \quad (8.1.2)$$

となって、 ℓ に比例し、かつ、 ΔT に比例することがわかる。

では、例えば、図 8.1.1 のように長さ ℓ の棒を加熱して温度を ΔT だけ上昇させ、かつ、先端に引張荷重を加えたところ、伸びが λ になったとしたら、加えた引張荷重 P はどれくらいだったかを求めることはできるだろうか？

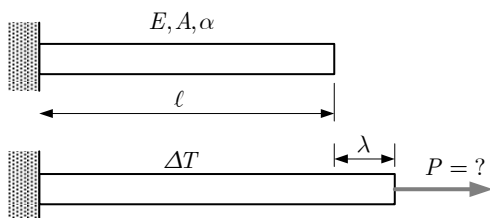


図 8.1.1 加熱と荷重による棒の伸び

この問いに答えるには、「重ね合わせ」の概念を理解しておく必要がある。つまり、加熱による伸び λ_T と荷重 P による伸び λ_e を足すと、全体の伸び λ になる、すなわち、 $\lambda = \lambda_e + \lambda_T$ というもので、これが頭の中にあると、以下のようにして P を求めることができる。すなわち、加熱による伸びは $\lambda_T = \alpha \ell \Delta T$ であるから、荷重 P による伸びは

$$\lambda_e = \lambda - \alpha \ell \Delta T \quad (8.1.3)$$

ということになる。したがって、 P は次式で求められる。

$$P = \frac{EA}{\ell} \lambda_e = \frac{EA}{\ell} (\lambda - \alpha \ell \Delta T) \quad (8.1.4)$$

また、応力は

$$\sigma = E \frac{\lambda_e}{\ell} = \frac{E}{\ell} (\lambda - \alpha \ell \Delta T) \quad (8.1.5)$$

なお、主な材料の線膨張係数 α は表 8.1.1 の通りである。ただし、処理によって値は少し異なるので、ここに示した値は、「だいたいこのくらい」という程度に理解しておくのがちょうどいいだろう。このように、材料によって値がかなり異なるので、何かを開発する際、どの材料を選定するかは重要な検討項目の一つのなる可能性がある。

表 8.1.1 材料の線膨張係数

材料	線膨張係数 ($\times 10^{-6} / \text{K}$)	材料	線膨張係数 ($\times 10^{-6} / \text{K}$)
アルミニウム	23	SS400	12
マグネシウム	25	S45C	12
チタン	8.4	SUS304	17
銅	17	ねずみ鉄	12

8.2. 熱応力

式(8.1.5)は、熱を加えた場合、全体の伸び λ が $\alpha \ell \Delta T$ でない限り、棒には応力が発生してしまうことを意味している。つまり、何かを設計をする際には、熱により応力が生じる可能性があることを考える必要がある。そこで、例題を通じて熱による応力について考えてみよう。

【例題 8.1】熱応力による変形(1)

図 8.2.1 のように両端を固定された棒に熱を加えたところ、 ΔT だけ温度が上昇した。棒に作用する熱応力 (thermal stress) を求めなさい。

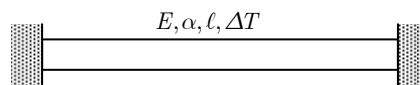


図 8.2.1 熱応力【例題 8.1】

【略解】

熱により棒は伸びるはずが、両側を固定されているので伸びることができない。つまり、式(8.1.5)において、全体の伸び λ が 0 ということである。したがって、熱応力は

$$\sigma = \frac{E}{\ell} (0 - \alpha \ell \Delta T) = -E \alpha \Delta T \quad (8.2.1)$$

※ 機械や構造物を運用中に、温度変化が激しい場合には、この例題のように両端を固定する部材をつくることは危険である。実際には、両端が壁ということではなく、両端も何かの部材であることが多いだろうが、棒と周辺部材との熱膨張率が異なると、結局、熱応力が生じることになるので、例えば板に棒をねじ留めする場合などは、板、ネジ、棒の熱膨張係数の値には細心の注意を払う必要がある。

【例題 8.2】熱応力による変形(2)

図 8.2.2 のように、断面積が両端を固定された長さ 200mm の 3 本の棒 A, B, C が等間隔に並んでいて、左端は壁に固定されている。また、右端は剛体板に固定されている。A と C はアルミ、B は SUS304 で、断面積は 3 本とも 100mm² である。いま、棒に熱を加えたところ、温度が 50°C 上昇した。右端の伸びを求めなさい。また、各棒に生じる応力を求めなさい。

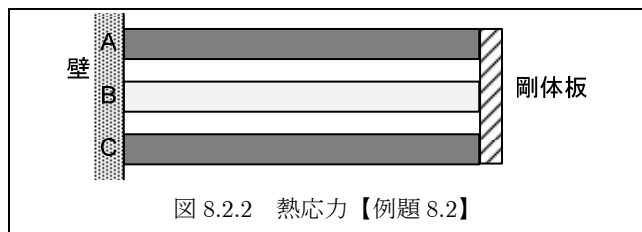


図 8.2.2 熱応力【例題 8.2】

【略解】

表 3.3.1 より，アルミのヤング率を $E_1 = 69\text{GPa}$ ，SUS304 のヤング率を $E_2 = 197\text{GPa}$ とする．また，表 8.1.1 より，アルミの線膨張係数を $\alpha_1 = 23 \times 10^{-6} / \text{K}$ ，SUS304 の線膨張係数を $\alpha_2 = 17 \times 10^{-6} / \text{K}$ とする．断面積は $A = 100 \times 10^{-6} \text{m}^2$ ，長さは $\ell = 0.2\text{m}$ ，温度差は $\Delta T = 50\text{K}$ であるから，棒 A, B, C の軸力をそれぞれ T_A ， T_B ， T_C とし，伸びを λ とすれば，

$$\begin{cases} T_A = \frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T), & T_B = \frac{E_2 A}{\ell} (\lambda - \alpha_2 \ell \Delta T) \\ T_C = \frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) \end{cases} \quad (8.2.2)$$

であり，剛体の力の釣り合いは，

$$-T_A - T_B - T_C = 0 \quad (8.2.3)$$

つまり，

$$\begin{aligned} -\frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) - \frac{E_2 A}{\ell} (\lambda - \alpha_2 \ell \Delta T) \\ - \frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) = 0 \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

したがって，

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2E_1 \alpha_1 + E_2 \alpha_2}{2E_1 + E_2} \ell \Delta T \\ &= \frac{2 \times 69 \times 23 \times 10^{-6} + 197 \times 17 \times 10^{-6}}{2 \times 69 + 197} \times 0.2 \times 50 \text{m} \\ &= 0.1947 \text{mm} \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

また，棒 A, C に作用する応力は

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E_1}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) \\ = \frac{69 \times 10^9}{0.2} \times (0.1947 \times 10^{-3} - 23 \times 10^{-6} \times 0.2 \times 50) \text{Pa} \\ = -12.173 \text{MPa} \approx -12 \text{MPa} \\ \sigma_2 = \frac{E_2}{\ell} (\lambda - \alpha_2 \ell \Delta T) \\ = \frac{197 \times 10^9}{0.2} \times (0.1947 \times 10^{-3} - 17 \times 10^{-6} \times 0.2 \times 50) \text{Pa} \\ = 24.35 \text{MPa} \approx 24 \text{MPa} \end{cases} \quad (8.2.6)$$

つまり，真ん中の SUS304 は引っ張られ，両脇のアルミは圧縮される．

【例題 8.3】熱応力による変形(3)

図 8.2.3 のように，同じ断面積，同じ長さの異種材料の棒が連結され，両端は壁に固定されている．いま，棒の温度を ΔT だけ上昇させた．棒に生じる応力を求めなさい．

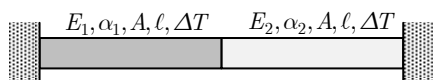


図 8.2.3 熱応力【例題 8.3】

【略解】

棒 1 の伸びを λ とすると，棒 2 の伸びは $-\lambda$ となるので，

棒の軸力はそれぞれ

$$T_1 = \frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T), \quad T_2 = \frac{E_2 A}{\ell} (-\lambda - \alpha_2 \ell \Delta T) \quad (8.2.7)$$

連結点での力の釣り合いより，

$$-T_1 + T_2 = 0 \quad (8.2.8)$$

したがって，

$$-\frac{E_1 A}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) + \frac{E_2 A}{\ell} (-\lambda - \alpha_2 \ell \Delta T) = 0 \quad (8.2.9)$$

これを解くと，

$$\lambda = \frac{E_1 \alpha_1 - E_2 \alpha_2}{E_1 + E_2} \ell \Delta T \quad (8.2.10)$$

したがって，棒に生じる応力は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E_1}{\ell} (\lambda - \alpha_1 \ell \Delta T) \\ &= \frac{E_1}{\ell} \left(\frac{E_1 \alpha_1 - E_2 \alpha_2}{E_1 + E_2} \ell \Delta T - \alpha_1 \ell \Delta T \right) \\ &= -\frac{E_1 E_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{E_1 + E_2} \Delta T \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

ちなみに，2 つの棒に生じる応力は同じである（理由はわかりますか？）．

【例題 8.4】熱変形(1)

図 8.2.4 のような静定トラスを ΔT だけ温度上昇させたときの頂点 A の変位を求めなさい．また，棒 AB の応力を求めなさい．

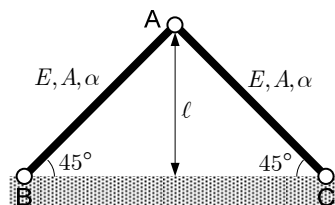


図 8.2.4 熱変形【例題 8.4】

【例題 8.5】熱変形(2)

図 8.2.5 のような不静定トラスを ΔT だけ温度上昇させたときの頂点 A の変位を求めなさい．また，棒 AB の応力を求めなさい．

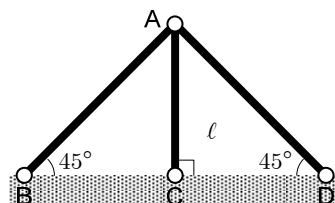


図 8.2.5 熱変形【例題 8.5】

※ この 2 つの例題から，静定と不静定の違いがよくわかるだろう．

※ 例えば，「二つの板をボルトで結合する際，中心軸を精度よく合わせたい」という要求がある場合，軸に沿って，2 か所，あるいは数か所でボルト締めするであろう．その際，二つの板の熱膨張係数が異なっていると，熱応力が発生する可能性がある．その場合には，ある一箇所のねじ穴は一致させておいて，その他のねじ穴については，一方の板は普通に空けて，もう一方の板の穴は軸に沿って“長穴”

にしておく, といった工夫をすることになるだろう (この文章を読んで, 映像／絵が思い浮かびますか?) .

※ 熱応力が怖いのは当然であるが, 最近では, 高精度な宇宙望遠鏡を搭載した衛星など, 熱歪により構造全体がわずかに伸びたりゆがんだりすること自体が問題になる問題も多くなってきている. そこで, 例えば, 線膨張係数がほぼ 0 となる CFRP を用いたり, 線膨張係数がマイナスとなるような特殊な材料と組み合わせることで, 熱応力が生じたとしても, 全体の伸びが 0 となるようにする工夫がされるようになってきている.

8.3. まとめ

熱歪, 熱応力について学び, 加熱した際に棒に生じる応力の算出法について学んだ.

8.4. 宿題

- 1) 【例題 8.4】 , 【例題 8.5】 を解きなさい.

第9章 梁による荷重の支持

前回までは、棒の軸力で荷重を支持する構造について学んだ。今回からは、曲げモーメントとせん断力で荷重を支持する方法について学ぶ。

9.1. せん断荷重

これまでは、一本の棒の軸方向に荷重が作用する場合や、トラス構造の頂点に荷重が作用する場合を考えてきた。では、図 9.1.1 のように、棒の軸に垂直な方向に荷重が作用する場合はどうなるだろうか？

この場合には、軸力ではこの荷重 P に対抗する（ P を支える）ことはできない。その代わりに、縦方向に力（というよりは、応力）が生じないと、 P を支えることができない。では、その応力はどのような応力であろうか？

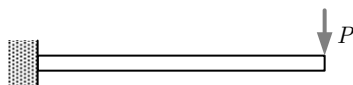


図 9.1.1 せん断荷重を受ける梁

これについて考えるには、棒がどのような変形をするかを考える必要がある。実際、棒が図 9.1.2 のように曲がることは容易に予想できるであろう。

しかし、図 9.1.3(a) のように、極めて短い棒（もはや、棒とは呼べないだろう）の場合には、“曲がる”というよりは、図 9.1.3(b) のようなせん断変形に近い変形を起こすだろうことも容易に予想できるだろう。



図 9.1.2 せん断荷重を受ける梁の曲げ変形

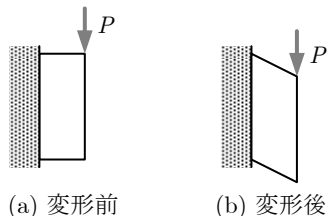


図 9.1.3 せん断荷重を受ける矩形物体のせん断変形

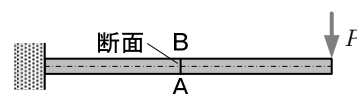
では、実際にはどのように変形するのであろうか？

この問いに答えるには、そもそも、「曲げ」というものがどのような変形であるのかを理解する必要がある。そこで、次節では「曲げ」について定義する。

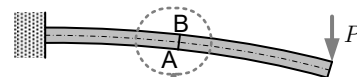
なお、1.2 節でも述べた通り、細長い部材で、軸力のみを負担できる部材は「棒」（bar）と呼ばれ、曲げやせん断荷重を負担する部材は「梁」（beam）と呼ばれる。

9.2. 曲げ変形とせん断変形

図 9.2.1(a) のように先端にせん断荷重を受ける梁の断面 AB がどうなるかを考えてみよう。この断面は梁の中心線に対して垂直な面であるが、もし、変形後も図 9.2.1(b) のように中心線に対して垂直で、かつ、中心線の軸歪が 0 だった場合、この断面は「曲げ変形」しているという。つまり、曲げとは、棒が伸び縮みしていないかということとともに、変形後の断面が中心線に対して垂直かどうかで判断されるものなのである。実際、細長い梁であれば、ほぼ曲げ変形になっているだろうと想像できる。



(a) 変形前の断面



(b) 変形後の断面

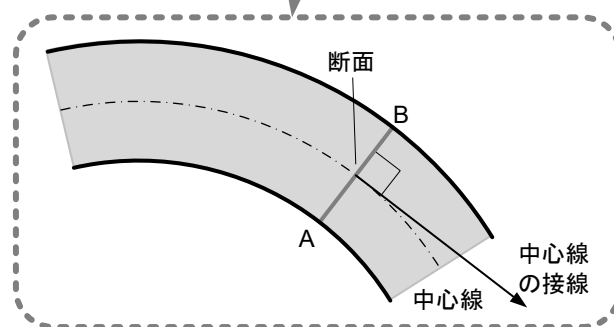


図 9.2.1 曲げ変形

これに対し、図 9.2.2 のように、断面の角度は変わらず、梁が下方に“ひしゃげる”のがせん断変形である。しかし、細長い梁はこのような変形はしないだろうことが予想できるだろう。

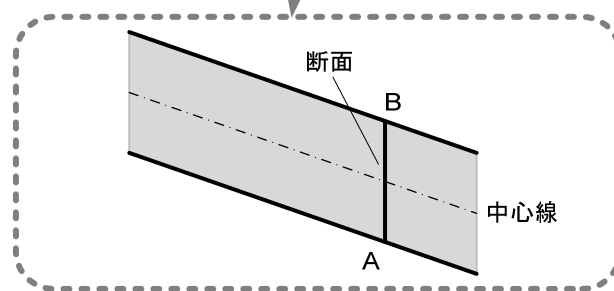
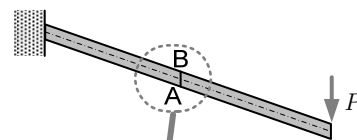


図 9.2.2 せん断変形

では、実際には断面はどのように変形するのであろうか？

9.3. 梁の断面の実際の変形

実際には、梁の断面は図 9.3.1 のように変形する。すなわち、

- 1) 実際の断面は、曲げ変形をした場合の断面とせん断変形をした場合の断面の間にくる。
- 2) したがって、断面と中心線が交わる場所では、断面は中心線に直交しない。
- 3) しかし、梁の表面のところ（点 A と点 B）では、断面は表面と直交する。

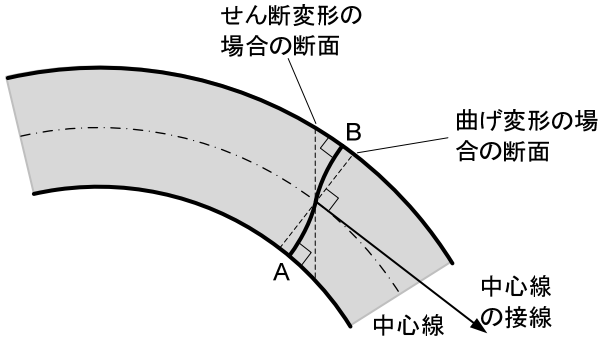


図 9.3.1 梁の断面の変形

なぜこうなるかを知りたいければ、次の本を読むとよいだろう。この本を読むと、断面がどんな関数で表される曲線になっているのか、詳細な理論を勉強できる。

小林繁雄，近藤恭平，「弾性力学」，培風館

※なお，「材料力学Ⅰ」，「材料力学Ⅱ」では，断面が曲げ変形のみを呈すると仮定する．この仮定は Bernoulli-Euler（ベルヌーイ-オイラー）の仮説と呼ばれる．

9.4. 曲げによる曲率と歪

梁が曲げ変形をする際，梁の内部はどのように変形しているだろうか？

これについて考えるためには，まず，曲率や曲率半径というものを理解しておく必要がある．いま，図 9.4.1 のよう，曲線があって，端点から曲線上の任意の点 A まで曲線に沿った長さ（弧長，arc length）を s ，点 A での曲線の傾斜角を θ としよう．

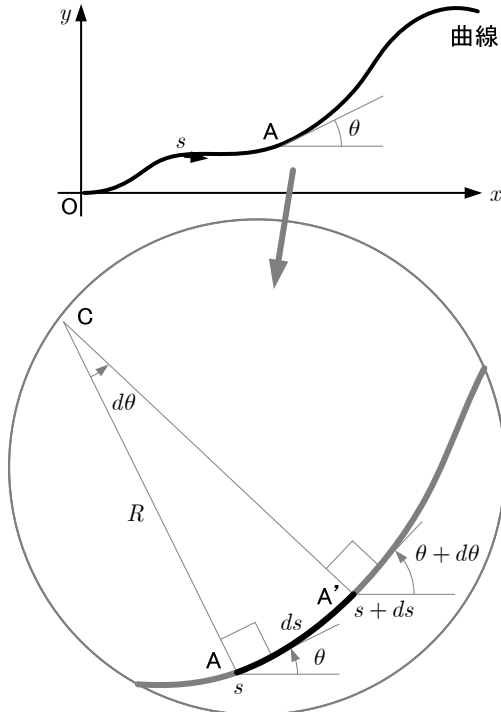


図 9.4.1 曲率半径

このとき，点 A から ds だけ進んだ点を A' を考え，点 A' の傾斜角を $\theta + d\theta$ とする．そして，点 A での曲線の法線と点 A' での法線の交点を C とし，AC の長さを R とすると， $ds \rightarrow 0$ の極限では，

$$ds = R d\theta \quad (9.4.1)$$

が成り立つ．すなわち，

$$R = \frac{ds}{d\theta} \quad (9.4.2)$$

ここで， R を点 A での曲率半径（radius of curvature）と呼び，その逆数 κ を曲率（curvature）と呼ぶ．

$$\kappa \equiv \frac{d\theta}{ds} \quad (9.4.3)$$

これを，梁の変形に当てはめてみよう．いま，図 9.4.2 のように，梁の長さ ds の微小部分 AA' が曲がり，曲率半径が R となったとする．このとき，中心線 AA' の長さは ds のまま変化していないとする（それが「曲げ」の定義）．このとき，中心線から下側に距離 z だけ離れた線分 GH はどれくらい伸びるだろうか？

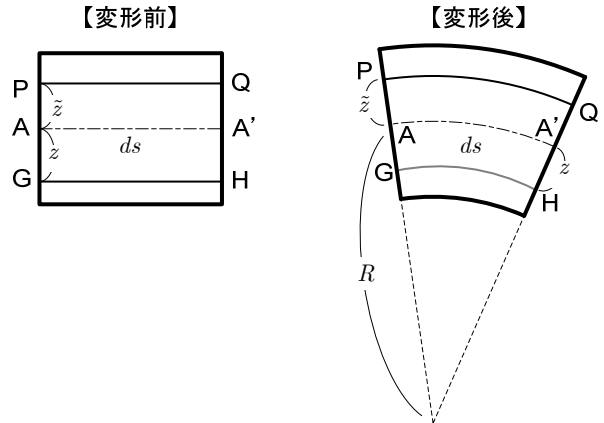


図 9.4.2 梁の微小部分の変形

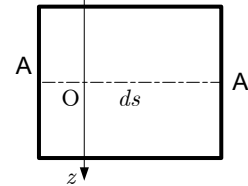


図 9.4.3 梁の断面に沿った座標

図 9.4.2 からわかる通り，変形後の GH の長さは

$$\widehat{GH} = \frac{R-z}{R} ds \quad (9.4.4)$$

であるから，線分 GH の歪は

$$\epsilon_{GH} = \frac{\frac{R-z}{R} ds - ds}{ds} = -\frac{z}{R} \quad (9.4.5)$$

となり，歪は負，すなわち，圧縮となる．同様に，曲がった時に中心線の外側になる線分 PQ の場合，

$$\widehat{PQ} = \frac{R+z}{R} ds \quad (9.4.6)$$

であり，

$$\epsilon_{PQ} = \frac{\frac{R+z}{R} ds - ds}{ds} = \frac{z}{R} \quad (9.4.7)$$

となる．つまり，外側では引張が生じている．このように，曲げ変形とは，中心線からの距離に比例して垂直歪が生じる変形であり，したがって，断面の場所によって垂直歪が異なる．そして，いま，図 9.4.3 のように，中心線上の点を原点として，断面に沿った方向（中心線に垂直な方向）に z 座標を設定すると，

$$\epsilon = -\frac{z}{R} = -\kappa z \quad (9.4.8)$$

と書くことができる。これを曲げ歪と呼ぶ。

※ 実際の梁は、荷重のかけ方にもよるが、曲げ歪だけでなく、軸歪やせん断歪が生じている。

9.5. 曲げ応力

曲げ歪が式(9.4.8)のように書けるということは、これによる応力（曲げ応力と呼ばれる）は次式のように書ける。

$$\sigma = -E\kappa z \quad (9.5.1)$$

したがって、その分布は図 9.5.1 のようになる。

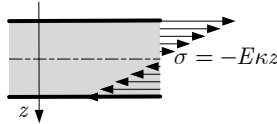


図 9.5.1 曲げ応力分布

9.6. せん断応力

せん断応力とは、物体がせん断変形を起こす際に生じる応力である。一般に、材料力学ではせん断応力 τ はせん断歪 γ に比例すると仮定する。そして、その比例定数 G は一般にせん断弾性係数、あるいは、横弾性係数と呼ばれる。

$$\tau = G\gamma, \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (9.6.1)$$

では、そもそもせん断歪とは何かというと、図 9.6.1 のように、ひしゃげた角度を指す。また、せん断応力は、図 9.6.2 のように、側面に沿った方向に作用する応力である。

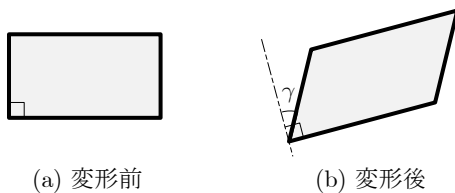


図 9.6.1 せん断歪

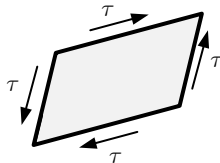


図 9.6.2 せん断応力

では、これを梁の変形に当てはめてみよう。図 9.6.3 のように梁がせん断変形したとすると、せん断応力は図 9.6.3(b) のように作用することになる。

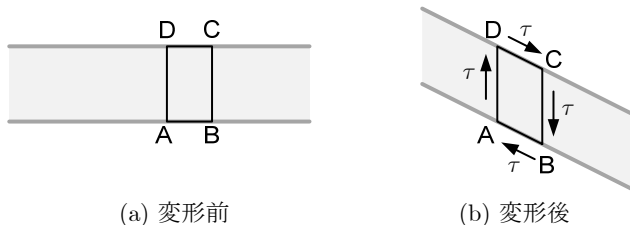


図 9.6.3 梁のせん断応力

なお、Bernoulli-Euler の仮説によると、断面はせん断変形を起こさない。ということは、せん断応力も生じないと思うかもしれないが、そうではない。実際には、せん断応力が先にあって、せん断応力が生じることで、せん断歪も生じようとするが、せん断弾性係数 G は“限りなく無限大に近い”値であるため、式(9.6.1)からわかる通り、 γ は 0 に“限りなく近い”値になる。これが Bernoulli-Euler の仮説の本質で

ある。

9.7. 合応力

前回まで、「軸力が P で断面積が A のとき、単位面積当たりの力 P/A を垂直応力と呼ぶ」というような説明をしてきたかと思う。しかし、これは少し不正確な表現であり、実際には、外力が生じると、「弾性体内には応力が生じ、それを足し合わせたものが軸力」というのがより正確な表現となる。実際、例えば、図 9.7.1 のように、断面内の中心線と交わる点を原点として断面に平行に z 軸を、紙面に垂直に y 軸を設置すると、応力 σ は断面内で一定の場合もあれば、荷重のかけかたによっては y や z の関数になることもある。そこで、軸力は次式のように定義できる（まだ二重積分については「微分積分学」で学んでいないかもしれないが、式(9.7.1)の意味を簡単に言えば、「断面内の、幅 dy 、高さ dz 微小な四角形の面積部分に作用する力は $\sigma(x, y)dydz$ であり、それを断面積全体にわたって足し合わせたのが軸力 P である」、ということである）。

$$P = \iint_A \sigma(y, z) dy dz \quad (9.7.1)$$

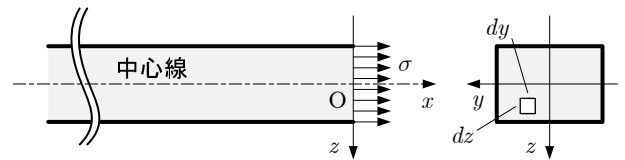


図 9.7.1 垂直応力分布

そして、ただ真っ直ぐ引っ張った場合には、 σ は一定であろうと近似することで、

$$P = \iint_A \sigma dy dz = \sigma \iint_A dy dz = \sigma A \quad (9.7.2)$$

を得るのである。せん断力 N の場合も同様で、せん断応力を積分することで得られる。すなわち、

$$N = \iint_A \tau(y, z) dy dz \quad (9.7.3)$$

ちなみに、せん断応力は、どんなに簡単な問題であっても、断面内で一樣になることはまずないとおいた方がいい。これについては「材料力学Ⅱ」で学ぶことになる。

このように、応力を断面全体で積分した、「断面に作用する力」を断面力、あるいは、合応力 (stress resultant) と呼ぶ。

では、曲げ応力を積分すると、どうなるであろうか？

これを考えるには、「中心線（中心軸）」について理解しておく必要がある。中心線とは、断面の「図心」を各断面でつないでいった線であり、図心を原点として断面内に直交座標軸 y, z を設定すると、一般に次式が成り立つ。

$$\iint_A y dy dz = \iint_A z dy dz = \iint_A yz dy dz = 0 \quad (9.7.4)$$

そこで、これを用いて、曲げ応力の式(9.5.1)を断面全体にわたって積分してみよう。すると、断面力は

$$F = \iint_A -E\kappa z dy dz = -E\kappa \iint_A z dy dz = 0 \quad (9.7.5)$$

つまり、0 となる。断面内に応力が生じているのに、それを足し合わせると 0 になるということは、曲げ応力は局所的なものであって、梁全体には影響を及ぼさないものなのであろうか？

もちろん、そんなことはない。実際、梁は曲がっているわけで、大きな影響を与えている。では、この影響はどう評価すればよいのだろうか？

これについて考えるには、物体の移動について考える必要がある。

一般に、物体の移動には「並進移動」と「回転移動」の二種類がある。「力と運動の物理学」、あるいは、「力学の基礎及び演習」で学んだかと思うが、並進移動をもたらすのが「力」であり、「回転移動」をもたらすのが「力のモーメント」である。

そこで、曲げ応力による断面の図心まわりの力のモーメント M を計算してみよう。ただし、反時計回り (y 軸に対して右ネジの方向) を正とする。このとき、計算式は以下のようになる。

$$M = \iint_A z \times \sigma dy dz = -E\kappa \iint_A z^2 dy dz = -EI\kappa \quad (9.7.6)$$

ただし、 I は次式で定義され、**断面二次モーメント** (second moment of area) と呼ばれる。

$$I \equiv \iint z^2 dy dz \quad (9.7.7)$$

例えば、厚さ h 、奥行き b の矩形断面であれば、

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \right] dy = \frac{bh^3}{12} \quad (9.7.8)$$

結局、曲げ応力は力のモーメントをもたらすものであり、梁の断面を回転させる効果を持っている。それゆえ、梁は曲がるのである。そこで、力のモーメント M を、材料力学の世界では「**曲げモーメント**」 (bending moment) と呼ぶ。曲げモーメントも「合応力」の一種で、「**合モーメント**」 (stress couple) と呼ばれる。また、「断面モーメント」とも呼ばれる。

曲げ応力や断面二次モーメントの詳細については第 13 章で学ぶ。また、式(9.7.6)、すなわち、「曲げモーメントは曲率に比例する」という関係は極めて重要であり、その比例係数である EI は棒の曲がり具合をつかさどる重要な設計パラメータとなる。 EI は「**曲げ剛性**」 (bending rigidity) と呼ばれる。

9.8. 二重積分

9.7 節で示した通り、断面二次モーメントの計算には二重積分が必要となる。そこで、ここでは二重積分について練習してみよう。

【例題 9.1】二重積分(1)

図 9.8.1 の領域の体積を求めなさい。

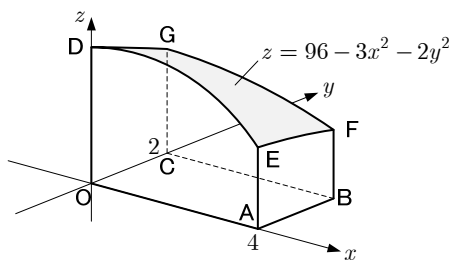


図 9.8.1 二重積分【例題 9.1】

【略解】

図 9.8.2 のように、底面が xy 平面上で区間 $[x, x+dx]$, $[y, y+dy]$ で囲まれた長方形で、それを上に伸ばしていった立体が曲面 $z = 96 - 3x^2 - 2y^2$ で切断された微小な立体の体積を dV とすると、

$$dV = (96 - 3x^2 - 2y^2) dx dy + O^3(dx, dy) \quad (9.8.1)$$

であるので、求めるべき立体全体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left\{ \int_0^4 (96 - 3x^2 - 2y^2) dx \right\} dy \\ &= \int_0^2 \left\{ [96x - x^3 - 2y^2x]_0^4 \right\} dy \\ &= \int_0^2 \{ 320 - 8y^2 \} dy = \left[320y - \frac{8}{3}y^3 \right]_0^2 \\ &= 640 - \frac{64}{3} = \frac{1856}{3} \end{aligned} \quad (9.8.2)$$

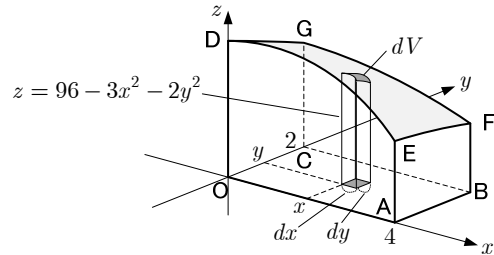


図 9.8.2 微小部分の体積

【例題 9.2】二重積分(2)

次の領域の体積をそれぞれ求めなさい。

- 1) $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2x^2 + y^2\}$
- 2) $\{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - x^2, 0 \leq z \leq 2x^2 + y^2\}$

【例題 9.3】断面二次モーメントの例題

以下の断面の断面二次モーメントを求めなさい。

- 1) 高さ a 、幅 $2a$ の長方形
- 2) 直径 d の円

【略解】

- 1) 断面は図 9.8.3 のようになり、微小部分の y 軸まわりの断面二次モーメントは $z^2 dy dz$ である。したがって、断面全体の断面二次モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iint z^2 dy dz = \int_{-a}^a \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz \right\} dy \\ &= \int_{-a}^a \left\{ \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \right\} dy = \int_{-a}^a \left\{ \frac{a^3}{12} \right\} dy = \left[\frac{a^3}{12} y \right]_{-a}^a = \frac{a^4}{6} \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

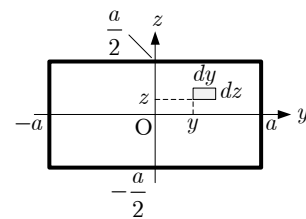


図 9.8.3 矩形断面の断面二次モーメント

- 2) 断面は図 9.8.4 のようになる。ここで、微小部分の面積は $r d\theta \times dr = r dr d\theta$ と書けるので、 y 軸まわりの断面二次モーメントは $(r \sin \theta)^2 r dr d\theta$ となる。したがって、断面全体の断面二次モーメントは次式のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \iint (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{d/2} r^3 dr \right\} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{d/2} \right\} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d^4}{64} \right\} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{d^4}{128} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \quad (9.8.4)$$

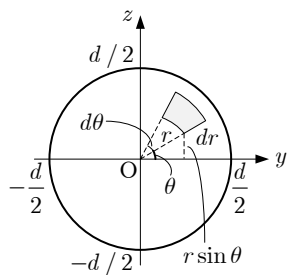


図 9.8.4 円断面の断面二次モーメント

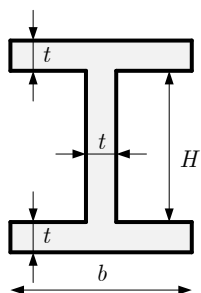
9.9. まとめ

「曲げ」の概念について学んだ。そして、「合応力」の概念について学び、具体例として、軸力、せん断力について確認した。そして、「曲げモーメント」の定義やその意味について学んだ。また、二重積分の計算法の基礎を学んだ。

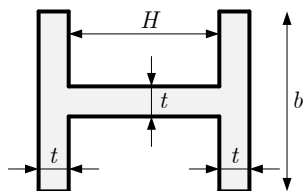
9.10. 宿題

以下の断面の断面二次モーメントを求めなさい。

- 1) 高さ $2a$ ，幅 a の長方形
- 2) 内径が d ，厚さが t の円筒
- 3) 板厚がどの箇所も t ，全体の高さが $(H+2t)$ で，奥行きが b の I 型断面



- 4) 3) の断面を 90° 回転させた H 型断面



第10章 梁に生じるせん断力と曲げモーメント

前回は梁の断面内を詳細にみていったが、今回からは、梁をもっとマクロにみて、梁の任意の箇所の断面に生じるせん断力と曲げモーメントについて考えていく。

10.1. 力の釣り合いとモーメントの釣り合い

図 10.1.1(a)のように、先端で荷重を受ける片持ち梁(cantilever)について考えてみよう。いま、固定端から距離 x の点 A で仮想的に梁を切断すると、その断面には何がしかのせん断力 F と曲げモーメント M が生じているはずである(軸力が生じない理由はわかりますか?)。また、その反作用で、逆側の断面(図 10.1.1(b)の点 A' の側の断面)には逆向きのせん断力と曲げモーメントが作用しているはずである。では、 F と M の値はいくつになるだろうか?

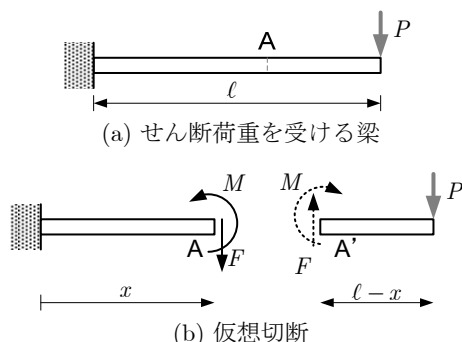


図 10.1.1 梁の釣り合い

この問いに答えるには釣り合いを考えればよい。最も簡単な方法は、図 10.1.1(b)において、切断面から右側(先端側)の部分での力の釣り合いとモーメントの釣り合いを考えることである(左側だと、壁からの反力を求めないと、力の釣り合い式をたてることができない)。まず、上下方向の力の釣り合いより、

$$F - P = 0 \quad (10.1.1)$$

(上向きを正とした)。したがって、せん断力は

$$F = P \quad (10.1.2)$$

となることがわかる。また、点 A' まわりの力のモーメントの釣り合いを考えると、

$$-M - (\ell - x) \times P = 0 \quad (10.1.3)$$

(モーメントは、通常、反時計回りを正として計算する)。したがって、

$$M = -P(\ell - x) \quad (10.1.4)$$

※ 実は、せん断力や曲げモーメントを考える際、どちらの向きを正にするのかは、参考書によってまちまちである。しかも、追々述べていく通り、 z 軸(上下方向)は、下向きを正にとる参考書が非常に多い。これに関しては、正直、違和感があるのだが、もともと、梁に関しては、重力で下向きにたわんでしまうことをどう解析するかというところから歴史が始まっており、「下向きを正にするのが当然」という歴史的経緯があって、今でも下向きを正にする参考書が多い。

※ そもそも、モーメントというものがなぜ出現したのか、なぜモーメントの釣り合いを考えるのか、と疑問に思うかもしれない。この疑問に答えるためには、物体内の任意の点の位置を表現するための変数の数、すなわち、「自

由度」(degree of freedom)を理解し、それらの変数の値を決定するための方程式、すなわち、運動方程式の導出法について理解しなければならない。詳細は省くが、梁の場合、任意の断面の中心の位置(たわみ)と、断面の回転角(たわみ角)がわかれば、任意の点の位置(座標)を求めることができ、たわみ、ならびに、たわみ角を求めるための運動方程式をそれぞれたて、釣り合い状態にある、すなわち、静止している、という条件をそれぞれの運動方程式に加えると、それぞれ力の釣り合い式とモーメントの釣り合い式になる。

10.2. 反力と反モーメント(固定モーメント)

棒の引張の場合と同様、梁の場合も、荷重を受けると、当然、壁から反力を受ける。また、梁の場合、壁から力のモーメントも受ける可能性がある。これは反モーメントと呼ばれる。そこで、上下方向の反力を R_0 、反モーメントを M_0 とすると、図 10.2.1 のようになる(なぜ、 R_0 や M_0 の向きを図のようにしたのか、わかりますか?)。

このとき、 R_0 や M_0 の値は、式(10.1.2)、(10.1.4)で $x = 0$ とすればいいだけである。つまり、

$$R_0 = P, \quad M_0 = -P\ell \quad (10.2.1)$$

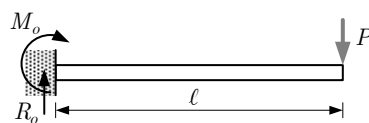


図 10.2.1 反力と反モーメント

※ 反力、反モーメントを求める別の方法としては、図 10.2.1 で釣り合いを考える方法がある。実際、上下方向の力の釣り合いより、

$$R_0 - P = 0 \quad (10.2.2)$$

固定点まわりの力のモーメントの釣り合いより、

$$-M_0 - \ell \times P = 0 \quad (10.2.3)$$

これらより、式(10.2.1)と同じ答えを得ることができる。そして、反力等を先に求めた後、任意断面での F と M を求める方法もある。すなわち、図 10.1.1(b)に反力等を書き足して、フリーボディーダイアグラムを描くと、図 10.2.2 のようになる。ここで、左側(根元側)の梁の力および根元まわりのモーメントの釣り合いはそれぞれ、

$$R_0 - F = 0, \quad -M_0 + M - x \times F = 0 \quad (10.2.4)$$

式(10.2.1)を代入すると、

$$P - F = 0, \quad P\ell + M - x \times F = 0 \quad (10.2.5)$$

これを解くと、式(10.1.2)、(10.1.4)と同じ答えが得られる。

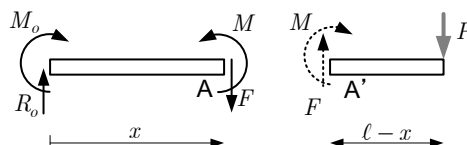


図 10.2.2 反力を考慮した梁の釣り合い

結局、重要なのは、切断してフリーボディーダイアグラムを描いたときに、全ての力およびモーメントを描けているかである。切断点から右側で釣り合いを考える場合、反力等を求めていなくても、図 10.1.1(b)のように全ての力やモーメントが書けているので問題ない。しかし、左側で考える場合、反力等を求めないといけなくなる。したがって、この例題であれば、右側で釣り合いを考えた方が答えに早くたどり着くことができるだろう。しかし、次節以降に示す通り、問題によっては、どちら側で考えても反力等の計算が必要になる場合もあるので、「だったら、はじめから、左側と決めて、反力等も計算する方法だけをマスターしておけば、どんな問題でも解ける」という考え方もあるだろう。そこは各自の好みで決めてもらえればと思う。個人的には、“臨機応変”が好みである。

10.3. 例題

せん断力と曲げモーメントの分布を知ることは、構造設計を行う上で極めて重要である。これについては講義の際に述べていくとして、今回の講義では、ひたすら例題を通して学んでいこう。初回の講義でも述べた通り、せん断力と曲げモーメントの分布を求めることは、「材料力学Ⅰ」の最も重要なテーマであるので、是非、しっかりマスターしていつてほしい。

【例題 10.1】せん断力と曲げモーメント(1)

図 10.3.1 のような片持ち梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい。

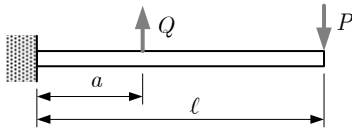


図 10.3.1 せん断力と曲げモーメント【例題 10.1】

【略解】

軸力の場合と同様、梁の途中に集中荷重が作用すると、その前後でせん断力や曲げモーメントの分布は変化する。実際に計算してみよう。固定点から先端に向かって座標 x を設定し、任意の x 断面で切断した断面のせん断力を F 、曲げモーメントを M とする。このとき、

1) $0 \leq x < a$ の場合

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.2 のようになる。

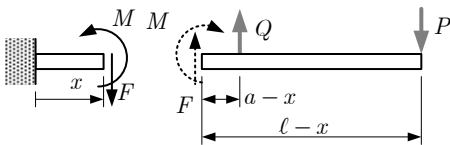


図 10.3.2 梁の釣り合い【例題 10.1】(その 1)

したがって、右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより、

$$\begin{cases} F + Q - P = 0 \\ -M + (a-x) \times Q - (\ell-x) \times P = 0 \end{cases} \quad (10.3.1)$$

これを解くと、

$$F = P - Q, \quad M = (P - Q)x + Qa - P\ell \quad (10.3.2)$$

2) $a \leq x \leq \ell$ の場合

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.3 のようになり、

右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより、

$$F - P = 0, \quad -M - (\ell - x) \times P = 0 \quad (10.3.3)$$

したがって、

$$F = P, \quad M = P(x - \ell) \quad (10.3.4)$$

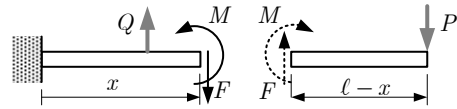


図 10.3.3 梁の釣り合い【例題 10.1】(その 2)

【例題 10.2】せん断力と曲げモーメント(2)

図 10.3.4 のような両端単純支持梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい。

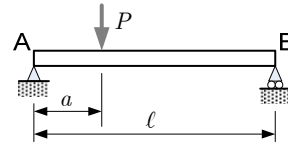


図 10.3.4 せん断力と曲げモーメント【例題 10.2】

【略解】

単純支持 (simply supported) とは、ピンジョイントで固定することであり、力は支持できるがモーメントは支持できない。つまり、単純支持点では反モーメントは 0 である。ちなみに、壁などに固定する場合 (clamped) は、モーメントを支持でき、梁の傾きは 0 に保たれるが、単純支持の場合には、荷重のかけ方によってはクルクルと回転できる。

さて、この問題の場合、両端に支持点があり、この支持点での反力を求めない限り、せん断力や曲げモーメントの分布を求めることはできない。そこで、まず、両端の反力をそれぞれ、 R_1 、 R_2 としてフリーボディーダイアグラムを描いてみると、図 10.3.5 のようになる。

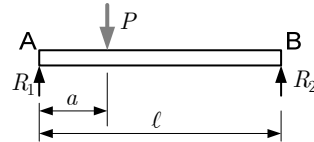


図 10.3.5 反力【例題 10.2】

したがって、力の釣り合い、および、点 A まわりのモーメントの釣り合いより、

$$R_1 + R_2 - P = 0, \quad -a \times P + \ell \times R_2 = 0 \quad (10.3.5)$$

よって、

$$R_1 = \frac{\ell - a}{\ell} P, \quad R_2 = \frac{a}{\ell} P \quad (10.3.6)$$

次に、せん断力 F と曲げモーメント M を求める。

1) $0 \leq x < a$ の場合

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.6 のようになる。

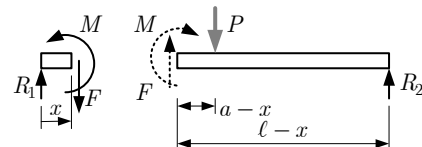


図 10.3.6 梁の釣り合い【例題 10.2】(その 1)

したがって、右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより、

$$\begin{cases} F - P + R_2 = 0 \\ -M - (a-x) \times P + (\ell-x) \times R_2 = 0 \end{cases} \quad (10.3.7)$$

これを解くと、

$$F = P - R_2, \quad M = -P(a-x) + R_2(\ell-x) \quad (10.3.8)$$

これに式(10.3.6)を代入すると、

$$\begin{cases} F = P - \frac{a}{\ell}P = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)P \\ M = -P(a-x) + \frac{a}{\ell}P(\ell-x) = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)Px \end{cases} \quad (10.3.9)$$

2) $a \leq x \leq \ell$ の場合

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.7 のようになる。

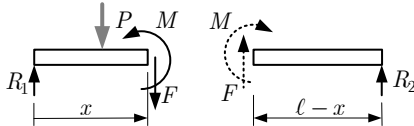


図 10.3.7 梁の釣り合い【例題 10.2】 (その 2)

したがって、右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより、

$$F + R_2 = 0, \quad -M + (\ell-x) \times R_2 = 0 \quad (10.3.10)$$

これを解くと、

$$F = -R_2, \quad M = R_2(\ell-x) \quad (10.3.11)$$

これに式(10.3.6)を代入すると、

$$F = -\frac{a}{\ell}P, \quad M = \frac{a}{\ell}P(\ell-x) \quad (10.3.12)$$

【例題 10.3】せん断力と曲げモーメント(3)

図 10.3.8 のような両端単純支持梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい。

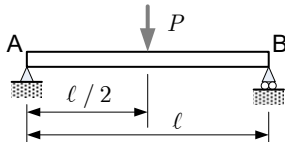


図 10.3.8 せん断力と曲げモーメント【例題 10.3】

【例題 10.4】せん断力と曲げモーメント(4)

図 10.3.9 のように、単位長さあたり w だけの等分布荷重を受ける片持ち梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい (実際の設計では、重力のように分布荷重が作用する問題が多いので、この手の問題は是非、解けるようになってほしい)。

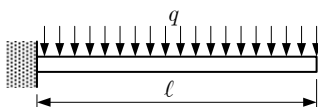
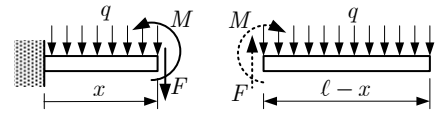


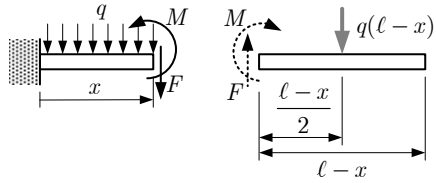
図 10.3.9 せん断力と曲げモーメント【例題 10.4】

【略解】

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.10(a) のようになり、切断面の右側で釣り合い式を考えれば解けるはずであるが、問題となるのは分布荷重の取り扱いである。



(a) 梁に作用する力とモーメント



(b) 梁に作用する等価な力とモーメント

図 10.3.10 梁の釣り合い【例題 10.4】

結論から述べると、図 10.3.10(a) の問題は図 10.3.10(b) のように、分布荷重の中央点に集中荷重 $q(\ell-x)$ が作用する問題と力学的には等価である (証明は後述)。したがって、力の釣り合いおよびモーメントの釣り合いは

$$F - q(\ell-x) = 0, \quad -M - \frac{\ell-x}{2} \times q(\ell-x) = 0 \quad (10.3.13)$$

したがって、

$$F = q(\ell-x), \quad M = -\frac{q}{2}(\ell-x)^2 = -\frac{q}{2}(x-\ell)^2 \quad (10.3.14)$$

※ 一般に、図 10.3.11(a) のように分布荷重が x の複雑な関数で与えられている場合、図 10.3.11(b) のように切断した右側での力の釣り合いとモーメントの釣り合いは

$$\begin{cases} F - \int_x^\ell q(\xi) d\xi = 0 \\ -M - \int_x^\ell (\xi-x) \times q(\xi) d\xi = 0 \end{cases} \quad (10.3.15)$$

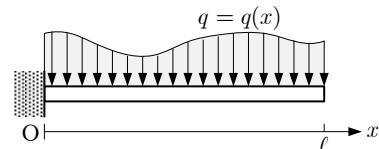
となる。これはどういうことかという、以下の通りである。すなわち、 $x \leq \xi < \ell$ である任意の ξ から $\xi + d\xi$ までの $d\xi$ の長さに作用する力は $-q(\xi) \times d\xi$ であり、これを $x \leq \xi < \ell$ の範囲で全て足し合わせたのが分布荷重による合力となるので、その合力は

$$\int_x^\ell q(\xi) d\xi$$

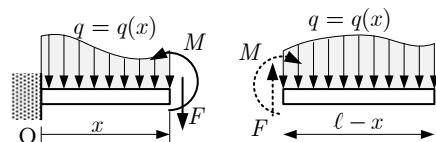
と書けるのである。したがって、式(10.3.15)の第一式が成り立つことになる。また、この微小部分の力による、切断点まわりのモーメントは $-(\xi-x) \times q(\xi) d\xi$ であり、これを $x \leq \xi < \ell$ の範囲で全て足し合わせたのが分布荷重によるモーメントとなるので、そのモーメントは

$$-\int_x^\ell (\xi-x) \times q(\xi) d\xi$$

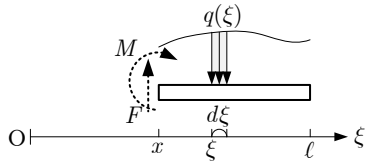
と書けるのである。したがって、式(10.3.15)の第二式が成り立つことになる。



(a) 分布荷重



(b) 力とモーメントの釣り合い



(c) 微小部分の力

図 10.3.11 分布荷重を受ける梁の釣り合い
ここで,

$$P \equiv \int_x^\ell q(\xi) d\xi \quad (10.3.16)$$

と定義すると, これは図 10.3.11(b)の $x \leq \xi < \ell$ の部分の分布荷重の“面積”を表している. そして, 分布荷重によるモーメントは

$$\begin{aligned} & \int_x^\ell (\xi - x) \times q(\xi) d\xi \\ &= \int_x^\ell \xi q(\xi) d\xi - x \int_x^\ell q(\xi) d\xi \\ &= \int_x^\ell \xi q(\xi) d\xi - xP \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

と書いて,

$$x_c \equiv \frac{\int_x^\ell \xi q(\xi) d\xi}{\int_x^\ell q(\xi) d\xi} \quad (10.3.18)$$

と定義すると, 次式のようにになる.

$$\int_x^\ell (\xi - x) \times q(\xi) d\xi = x_c P - xP = (x_c - x)P \quad (10.3.19)$$

以上より, 式(10.3.15)は次のように書き換えられる.

$$F - P = 0, \quad -M - (x_c - x) \times P = 0 \quad (10.3.20)$$

この式は, 図 10.3.11(b)の切断面の右側部分の問題が図 10.3.12 と等価であることを意味している.

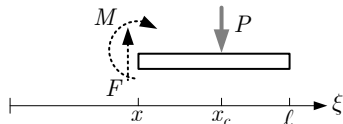


図 10.3.12 分布荷重を受ける梁の等価問題
そして, 例えば, 等分布荷重の場合,

$$x_c = \frac{\int_x^\ell \xi q(\xi) d\xi}{\int_x^\ell q(\xi) d\xi} = \frac{q \int_x^\ell \xi d\xi}{q(\ell - x)} = \frac{\frac{\ell^2 - x^2}{2}}{\ell - x} = \frac{\ell + x}{2} \quad (10.3.21)$$

となるので, x_c は ℓ と x の中間点であることがわかる. したがって, 図 10.3.10(b)のようになるのである.

※ なお, 式(10.3.18)で定義される x_c は, $x \leq \xi \leq \ell$ の部分の分布荷重の“図心”の x 座標を表している. 実際に, 任意の関数 $w(\xi)$ の図心の x 座標を求めたければ, 式(10.3.18)で計算すればよい.

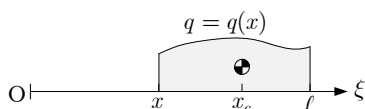


図 10.3.13 図心の計算

【例題 10.5】せん断力と曲げモーメント(5)

図 10.3.14 のような両端単純支持梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい.

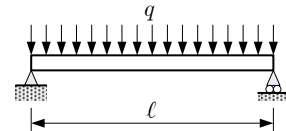


図 10.3.14 せん断力と曲げモーメント 【例題 10.5】

【略解】

対称性より, 梁の両端に作用する反力は $q\ell/2$ となるので, 梁に作用する力とモーメントは図 10.3.15 のようになる. 右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより,

$$\begin{cases} F - q(\ell - x) + \frac{q\ell}{2} = 0 \\ -M - \frac{\ell - x}{2} \times q(\ell - x) + (\ell - x) \times \frac{q\ell}{2} = 0 \end{cases} \quad (10.3.22)$$

したがって,

$$F = -qx + \frac{q\ell}{2}, \quad M = \frac{q}{2}x(\ell - x) \quad (10.3.23)$$

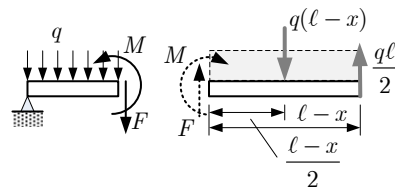


図 10.3.15 梁の釣り合い 【例題 10.5】

【例題 10.6】せん断力と曲げモーメント(6)

図 10.3.16 のような片持ち梁のせん断力と曲げモーメントの分布を求めなさい.

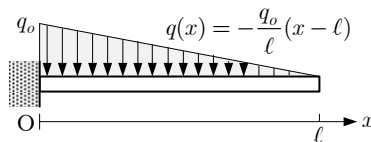


図 10.3.16 せん断力と曲げモーメント 【例題 10.6】

【略解】

梁に作用する力とモーメントは図 10.3.17 のようになり, 右側部分における力の釣り合いおよび切断点まわりのモーメントの釣り合いより,

$$\begin{cases} F - \frac{q_0}{2\ell}(\ell - x)^2 = 0 \\ -M - \frac{\ell - x}{3} \times \frac{q_0}{2\ell}(\ell - x)^2 = 0 \end{cases} \quad (10.3.24)$$

したがって,

$$F = \frac{q_0}{2\ell}(\ell - x)^2, \quad M = -\frac{q_0}{6\ell}(\ell - x)^3 \quad (10.3.25)$$

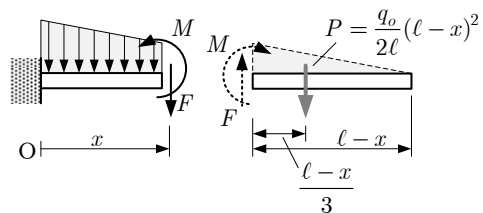


図 10.3.17 梁の釣り合い 【例題 10.6】

【例題 10.7】せん断力と曲げモーメント(7)

図 10.3.18 のような両端単純支持梁のせん断力と曲げ

モーメントの分布を求めなさい.

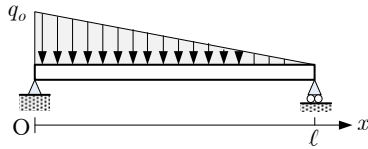


図 10.3.18 セン断力と曲げモーメント 【例題 10.7】

10.4. なぜ“せん断力”と“曲げモーメント”なのか？

第 8 章までは、棒 (column) の軸力についてばかり考えていたが、第 9 章からは、梁 (beam) のせん断力と曲げモーメントばかり考えるようになった。これはなぜかといえ、第 8 章までは軸力しか作用しない場合について考えていて、第 9 章からはせん断力と曲げモーメントだけしか作用しない場合について考えているからである。

ということは、当然、軸力、せん断力、曲げモーメントの全てが作用する場合も考えられるし、もっといえば、ねじりモーメント (トルク) が作用する場合も考えられる。

軸力、せん断力、曲げモーメントの 3 者が作用する問題は、ビーム・カラム (beam-column) の問題と呼ばれ、梁がたわんだ時に、軸力により曲げモーメントが発生することを考慮する問題であり、航空機の設計の際、考慮することになるであろう。結局、「どういう荷重が作用しているか」、「何を考慮するか、しないか」で計算方法が変わるわけである。この際、前者の場合にはわかりやすいが、後者の判断は難しい。何でもかんでも細かいことを考慮し始めると、どんどん、計算が複雑になっていって、解くのが大変である。しかし、考慮するかしないかによって結果が大きく変わるのであれば、考慮せざるを得ない。逆に、大して変わらないのであれば、考慮しなくてもいい、という判断をするであろう。このあたりは設計者のセンスにゆだねられる (まあ、今後は、AI に判断させることになるかもしれない)。

ちなみに、物体の変形や運動を考える際には、必ずと言っていいほど、「力」と「モーメント」を考える。逆に言えば、この 2 つさえ考えていれば、変形や運動を解くことができる。なぜだかわかりますか？ (「力と運動の物理学Ⅰ」、「力と運動の物理学Ⅱ」を受講していればわかるはず？さらに、2 年生の「工業力学Ⅰ」、「工業力学Ⅱ」を受講すれば、より詳しくわかるようになるはず?)。

10.5. まとめ

梁の任意の断面に生じるせん断力と曲げモーメントの算出法について学んだ。

10.6. 宿題

- 1) 【例題 10.3】を解きなさい。
- 2) 【例題 10.7】を解きなさい。

第11章 SFD と BMD(1)

前回に引き続き、梁の任意断面に生じるせん断力と曲げモーメントについて考える。
今回は特に、それらの分布図（SFD, BMD）の描画法をマスターする。

11.1. SFD と BMD

図 11.1.1 のような、先端でせん断荷重 P を受ける片持ち梁のせん断力と曲げモーメントは式(10.1.2), (10.1.4)の通り,

$$F = P, \quad M = -P(\ell - x) \quad (11.1.1)$$

となる。これをグラフ化すると、せん断力と曲げモーメントは図 11.1.1(b)のようになる。一般に、せん断力の分布図を SFD (Shear Force Diagram), 曲げモーメントの分布図を BMD (Bending Moment Diagram) と呼ぶ。

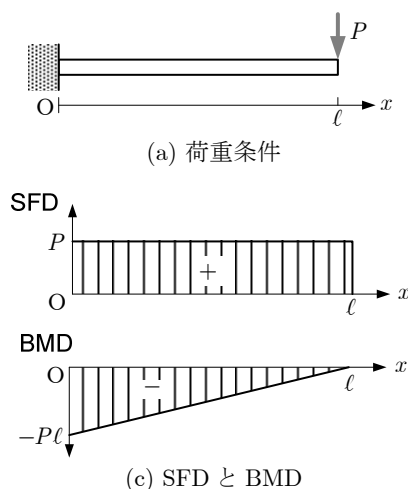


図 11.1.1 梁の SFD と BMD の算出例

【例題 11.1】 SFD と BMD(1)

図 11.1.2 の梁の SFD と BMD を描きなさい。ただし、 $P\ell > Qa$ であるとする。

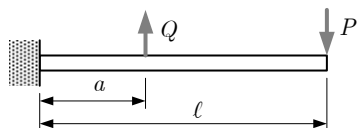


図 11.1.2 SFD と BMD 【例題 11.1】

【略解】

【例題 10.1】で解を出しており、

$$\begin{cases} 0 \leq x < a : F = P - Q, & M = (P - Q)x + Qa - P\ell \\ a \leq x \leq \ell : F = P, & M = P(x - \ell) \end{cases} \quad (11.1.2)$$

したがって、SFD と BMD は図 11.1.3 のようになる。

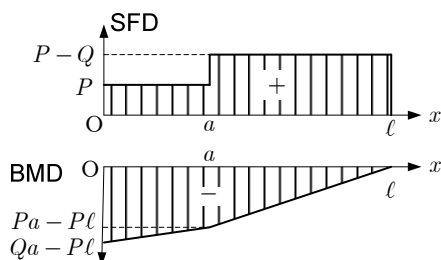


図 11.1.3 SFD と BMD の解 【例題 11.1】

【例題 11.2】 SFD と BMD(2)

図 11.1.4 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

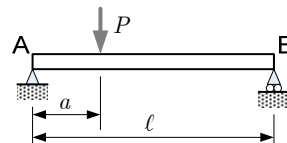


図 11.1.4 SFD と BMD 【例題 11.2】

【略解】

【例題 10.2】で解を出しており、

$$\begin{cases} 0 \leq x < a : F = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)P, & M = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)Px \\ a \leq x \leq \ell : F = -\frac{a}{\ell}P, & M = Pa\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \end{cases} \quad (11.1.3)$$

したがって、SFD と BMD は図 11.1.5 のようになる。

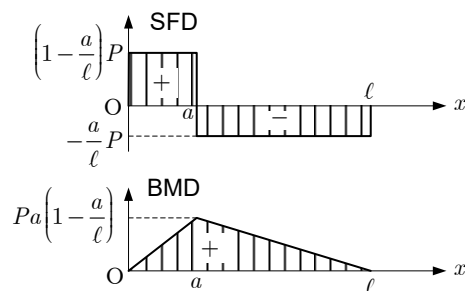


図 11.1.5 SFD と BMD の解 【例題 11.2】

【例題 11.3】 SFD と BMD(3)

図 11.1.6 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

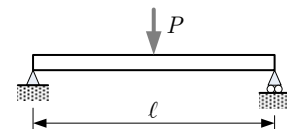


図 11.1.6 SFD と BMD 【例題 11.3】

【例題 11.4】 SFD と BMD(4)

図 11.1.7 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

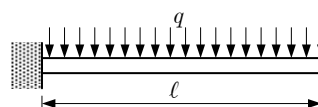


図 11.1.7 SFD と BMD 【例題 11.4】

【略解】

【例題 10.4】で解を出しており、

$$F = q(\ell - x), \quad M = -\frac{q}{2}(x - \ell)^2 \quad (11.1.4)$$

したがって、SFD と BMD は図 11.1.5 のようになる。

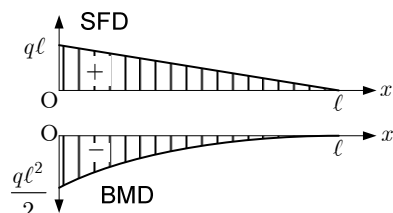


図 11.1.8 SFD と BMD の解【例題 11.4】

【例題 11.5】SFD と BMD(5)

図 11.1.9 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

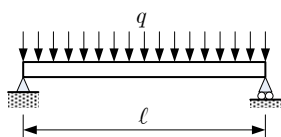


図 11.1.9 SFD と BMD【例題 11.5】

【例題 11.6】SFD と BMD(6)

図 11.1.10 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

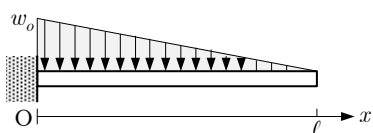


図 11.1.10 SFD と BMD【例題 11.6】

【例題 11.7】SFD と BMD(7)

図 11.1.11 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

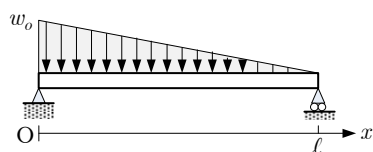


図 11.1.11 SFD と BMD【例題 11.7】

11.2. せん断力と曲げモーメントとの関係

これまで例題を通じて、せん断力 F と曲げモーメント M との関係について何か気づいただろうか？図 11.2.1(a) のような梁の微小部分 dx でのつり合いを考えてみよう。

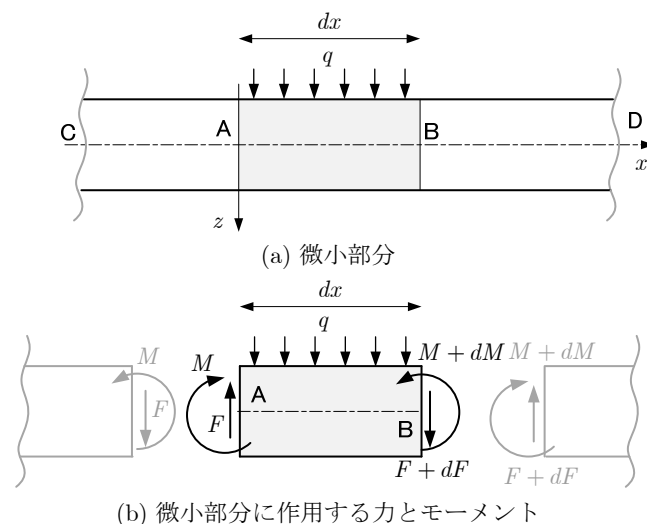


図 11.2.1 梁の微小部分でのつり合い

この微小部分の両側を切断すると、図 11.2.1(b) のようにな

る。この微小部分での力の釣り合い式は

$$-F + qdx + F + dF = 0 \quad (11.2.1)$$

であり、点 A まわりのモーメントの釣り合い式は

$$-M + \frac{dx}{2} \times qdx + M + dM - dx \times (F + dF) = 0 \quad (11.2.2)$$

式(11.2.1)より、

$$\frac{dF}{dx} = -q \quad (11.2.3)$$

となるので、分布荷重 q が x の関数として与えられれば、それを積分することでせん断力 F を求めることができる。そして、式(11.2.2)より、

$$\frac{dM}{dx} = F + dF - \frac{q}{2} dx \quad (11.2.4)$$

となり、 $dx \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{dM}{dx} = F \quad (11.2.5)$$

となる。つまり、曲げモーメント M を微分するとせん断力 F となり、したがって、BMD の曲線の傾きの値が SFD となっているのである！ ということは、例えば、SFD でせん断力が 0 となっている（横軸と交わっている）ところでは、BMD の曲線の傾きは 0 になっているはずである。また、SFD がプラスの値のところでは、BMD の曲線の傾きはプラスで、SFD がマイナスなら、BMD の曲線の傾きはマイナスになっているはずである。そうならないければ、どこかで計算間違いをしたと思って計算を見直す必要があり、自分の答案のちょうどいいチェック方法になるだろう。

11.3. まとめ

SFD と BMD の描き方を学んだ。SFD と BMD は軽構造設計の基本中の基本なので、是非、マスターしてほしい。

11.4. 宿題

【例題 11.5】～【例題 11.7】を解きなさい。

第12章 SFD と BMD(2)

今回も、様々な荷重条件および境界条件における SFD と BMD の描画法を学ぶ。

12.1. 例題

今回も、前回に引き続き、例題を解いていこう。

【例題 12.1】 SFD と BMD(8)

図 12.1.1 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

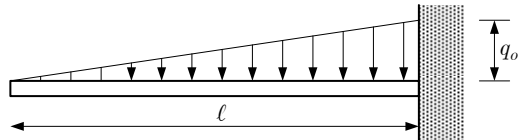


図 12.1.1 SFD と BMD 【例題 12.1】

【例題 12.2】 SFD と BMD(9)

図 12.1.2 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

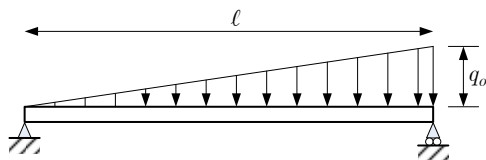


図 12.1.2 SFD と BMD 【例題 12.2】

【例題 12.3】 SFD と BMD(10)

図 12.1.3 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

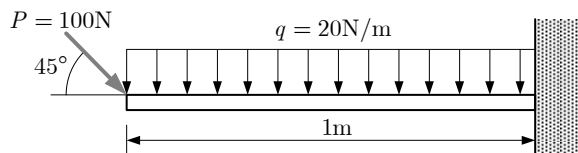


図 12.1.3 SFD と BMD 【例題 12.3】

【例題 12.4】 SFD と BMD(11)

図 12.1.4 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

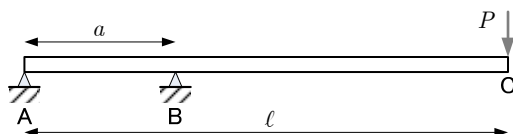


図 12.1.4 SFD と BMD 【例題 12.4】

【例題 12.5】 SFD と BMD(12)

図 12.1.5 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

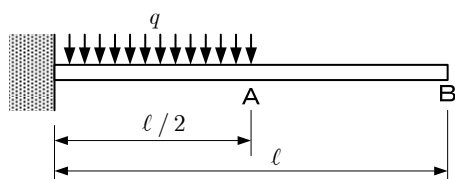


図 12.1.5 SFD と BMD 【例題 12.5】

【例題 12.6】 SFD と BMD(13)

図 12.1.6 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

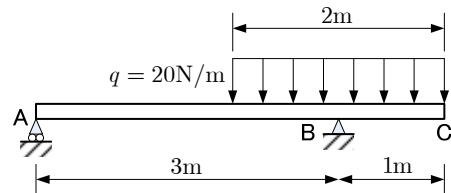


図 12.1.6 SFD と BMD 【例題 12.6】

【例題 12.7】 SFD と BMD(14)

図 12.1.7 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

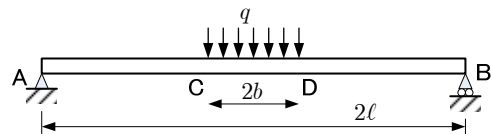


図 12.1.7 SFD と BMD 【例題 12.7】

【例題 12.8】 SFD と BMD(15)

図 12.1.8 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

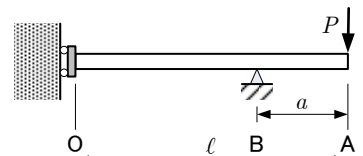


図 12.1.8 SFD と BMD 【例題 12.8】

【例題 12.9】 SFD と BMD(16)

図 12.1.9 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

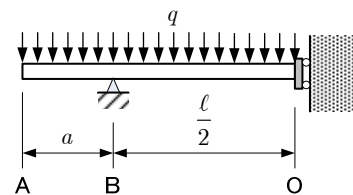


図 12.1.9 SFD と BMD 【例題 12.9】

【例題 12.10】 SFD と BMD(17)

図 12.1.10 の梁の SFD と BMD を描きなさい。

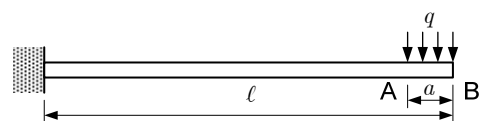


図 12.1.10 SFD と BMD 【例題 12.10】

12.2. まとめ

例題を通じて，SFD と BMD の描き方について再確認した．SFD と BMD は航空機設計の基本中の基本となるので，是非，完璧にマスターしてほしい．

12.3. 宿題

- 1) 【例題 12.9】と【例題 12.10】を解きなさい．

第13章 曲げ応力の設計への応用

曲げ応力については第9章で既に学んでいるが、今回はそれを再確認し、曲げ応力についてしっかり理解する。そして、曲げを受ける梁の設計法の基礎について学ぶ。

13.1. 座標系

10.1節でも述べた通り、材料力学の分野では、その歴史的経緯から、梁の解析の際、座標軸や変数の方向が特殊であることが多い。本来ならば、そのような座標系・方向ではなく、数学的に統一的で適切な座標系・方向を用いたいところであるが、今後、参考書等を読む際に戸惑わないよう、この講義でも、従来の特殊な座標系・方向に準拠することとする。

まず、座標系は、図13.1.1のように、 x 軸は状況に応じて右向きでも左向きでも、どちらもよく用いられるが、 z はほぼ必ず下向きに取っている参考書が多いだろう。

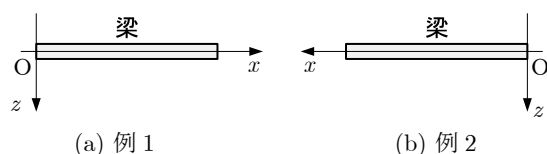


図13.1.1 座標系の例

次に、軸力の符号は、断面を切った際、物体内部から外部に向かう法線方向を必ず正にする(図13.1.2)。こうすることで、「軸力が引張力の場合は正、圧縮力の場合は負」という条件が数学的に厳密に満たされる。

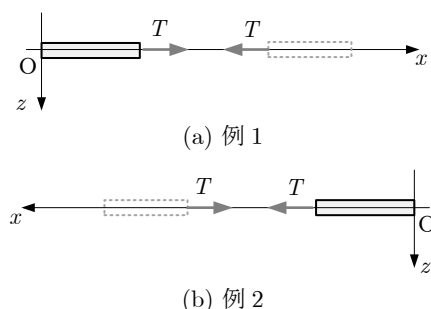


図13.1.2 軸力の例

せん断力については、断面が x 軸の正の向きの場合、 z 軸の方向を正にする、すなわち、下向きを正にしている参考書が多いだろう(図13.1.3)。そして、断面法線が x 軸の負の方向の場合、その面のせん断力の正の方向は z 軸と逆向きである(図13.1.3の破線の部分)。

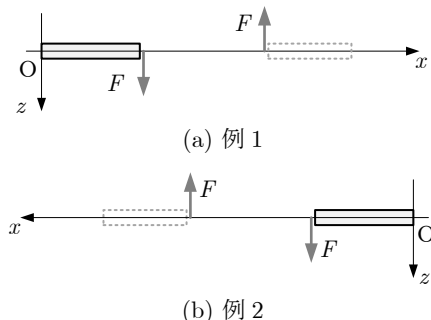


図13.1.3 せん断力の例

次に、曲げモーメントについては、断面が x 軸の正の向きの場合、 y 軸に対して右ネジの方向、つまり、図13.1.4の向きを正にする。

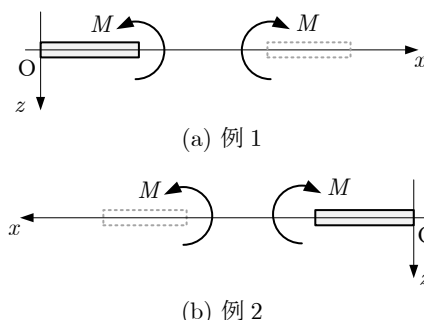


図13.1.4 曲げモーメントの例

最後に、角度の方向は、断面が x 軸の正の向きの場合、 y 軸に対して左ネジの方向、つまり、曲げモーメントとは逆の方向を正としている参考書が多いようである。この統一感のなさには少々違和感を感じるが、仕方ない。

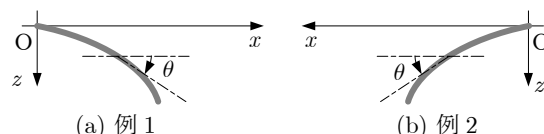


図13.1.5 座標系の例

13.2. 曲げモーメントと曲げ応力との関係

曲率 κ で曲げられている梁において、中心線から距離 z だけ離れた点の垂直応力 σ は式(9.5.1)で求められた。

$$\sigma = -E\kappa z \quad (9.5.1)$$

また、曲げモーメント M と曲率 κ との関係は式(9.7.6)で求められた。

$$M = -EI\kappa \quad (9.7.6)$$

ただし、 I は断面二次モーメントであった。これらの式から次式が導かれる。

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (13.2.1)$$

※ 上向きを y 軸とし、角度もモーメントも z 軸の右ネジの向きを正とする式の立て方も当然ある。個人的にはそれがベストと考えているが、この講義では慣例に従うこととする。

13.3. 許容応力と安全率

梁は、縦方向の荷重を支えるためのものであり、“梁を設計する”とは、“与えられた荷重をきちんと支えることができる梁の材料やサイズを決めること”である。ここで、“きちんと支える”とは、端的に言えば、“梁が壊れないこと”であろうが、もう少し定量的に考えてみよう。

3.3節では、歪と垂直応力との関係を学び、応力-歪線図が図3.3.1のようになることを学んだ。ここで、“壊れない”とは、本当に破壊してちぎれてしまうような状況を指す場合もあれば、“荷重を取り除いたときに、元通りに戻らない”ことを指す場合もある。図3.3.1でいえば、前者は、点Fに至るまで応力が大きくなる状況であり、応答者は点Bに至る

る状況を示す。つまり、点 F、あるいは点 B の応力よりも実際に梁に作用する応力が小さければよい、という考えの元で梁の材料やサイズを決定するのが“梁の設計”である。

ただし、実際には、点 A、すなわち、応力と歪がほぼ線形になっている状況でしか使いたくない、という場合も多い。なぜなら、点 A から点 B の間というのは、厳密には“グレーゾーン”で、もしかしたら、梁の一部が少し塑性変形してしまっているかもしれないからである。

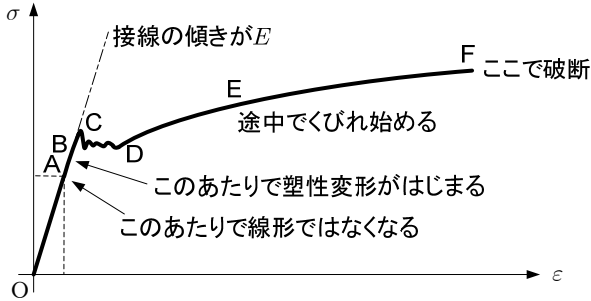


図 3.3.1 典型的な（真の）応力-歪線図（再掲）

いずれにしても、「梁に作用するであろう応力、すなわち、計算から求めた最大応力 $\sigma_{\max}$ が、ある応力 σ_a を超えないようにする」というのが、設計のポイントである。しかし、ここで、いくつか心配なことがある。例えば、

- 1) 梁に作用する荷重が、梁の使用中に、たまたま何等かの原因で想定していた荷重よりも大きくなる瞬間があるかもしれない
- 2) 梁の材料をつくる（精製、焼き入れ等々）とき、つくりかたにばらつきがあると、想定していた σ_a よりも小さい応力で塑性変形等が起こってしまうかもしれない

といった心配である。そこで、そういった心配を考慮して、梁に作用する応力が、計算から求めた最大応力 $\sigma_{\max}$ の 1.5 倍、あるいは 2.0 倍など、より大きい応力になっても壊れないように設計することが多い。そして、そのような、様々な“心配事”を考慮した最大応力と、元々想定している応力の限界値 σ_{cr} （カタログに載っている、平均的な材料特性から決まるはず）との比を**安全率**（safety factor）と呼ぶ。この場合、例えば、ある材料の限界応力が $\sigma_{cr} = 100\text{MPa}$ で、安全率を $S = 2.0$ と設定するとすると、計算上の最大応力 $\sigma_{\max}$ が $\sigma_{\max} \leq 100\text{MPa} / 2.0 = 50\text{MPa}$ となるよう、材料やサイズを決めなくてはならないのである。

棒の場合であれば、例えば、限界応力 $\sigma_{cr} = 300\text{MPa}$ のアルミ合金の丸棒を使うとした場合、棒に作用する荷重が $P = 1200\text{N}$ であった場合、

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi d^2 / 4} \quad (13.3.1)$$

であり、本来ならば、

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a \quad (13.3.2)$$

とすればよいので、棒の直径 d は

$$\frac{P}{\pi d^2 / 4} \leq \sigma_a \quad (13.3.3)$$

つまり、

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \times 1200}{\pi \times 300 \times 10^6}} = 0.002257\text{m} \approx 2.3\text{mm} \quad (13.3.4)$$

としたいところであるが、安全率を $S = 2.0$ とした場合には、

$$S \times \sigma_{\max} \leq \sigma_{cr} \quad (13.3.5)$$

つまり、

$$S \times \frac{P}{\pi d^2 / 4} \leq \sigma_{cr} \quad (13.3.6)$$

でなければならない。したがって、

$$d \geq \sqrt{S \times \frac{4P}{\pi \sigma_a}} = \sqrt{2 \times \frac{4 \times 1200}{\pi \times 300 \times 10^6}} = 0.003192\text{m} \approx 3.2\text{mm} \quad (13.3.7)$$

つまり、直径をより太めにしないといけなくなる。

※ 安全率は、「自分達の想定値（つまり、計算から求めた予想値）にどれだけ不安があるか」ということを示す値ととらえることもできるが、別の観方をすると、「どこまでギリギリを狙うか」ととらえることもできる。つまり、「安全率が 1 の場合は全く余裕 (margin) がない設計で、2.0 の場合は少し余裕を持った設計、5.0 の場合は、さらに余裕が多い設計」ととらえることができる。作る側としては、余裕が多い方が気が楽であるが、そうすると、上記の例のようにサイズが大きくなる、つまり、重くなって、航空機や宇宙機をつくる際には困ったことになる。実際、衛星の場合、1.25 か 1.5 くらいに設定するケースが多い。

※ 一般には、引張側の許容応力と圧縮側の許容応力とは異なるが、多くの場合、引張側の方が低いようである。特に断りがなければ、許容応力と言われたら、引張側と圧縮側とで同じ値であると思ってよいだろう。

13.4. 曲げ設計

では、梁の場合、何をどうすればよいだろうか。

結局のところ、梁に作用する最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ を求めればよい。次の例題を解いてみよう。

【例題 13.1】曲げ設計(1)

図 13.5.1 において、限界応力を $\sigma_{cr} = 60.0\text{MPa}$ 、安全率を $S = 2.0$ とし、断面は幅が $b = 40.0\text{mm}$ で板厚が h である矩形であるとして、 h を設計しなさい。

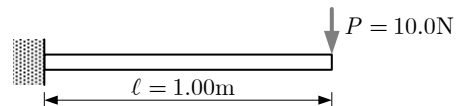


図 13.4.1 曲げ設計【例題 13.2】

【略解】

曲げモーメント分布は

$$M = -P(\ell - x) \quad (13.4.1)$$

したがって、曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M}{I} z = -\frac{P}{I}(\ell - x)z \quad (13.4.2)$$

ここで、断面二次モーメントは一定で

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (13.4.3)$$

であるから、式(13.4.2)より、 σ の絶対値が最大となるのは $(x, z) = (0, \pm h/2)$ のときで、

$$\sigma_{\max} = \frac{P\ell h}{I 2} = \frac{P\ell}{bh^3 / 12} \frac{h}{2} = \frac{6P\ell}{bh^2} \quad (13.4.4)$$

であることがわかる。一方、設計条件は、

$$S\sigma_{\max} \leq \sigma_{cr} \quad (13.4.5)$$

であるから,

$$S \times \frac{6P\ell}{bh^2} \leq \sigma_{cr} \quad (13.4.6)$$

つまり,

$$h \geq \sqrt{\frac{6SP\ell}{b\sigma_{cr}}} \quad (13.4.7)$$

よって,

$$h \geq \sqrt{\frac{6 \times 2.0 \times 10.0 \times 1.00}{40.0 \times 10^{-3} \times 60.0 \times 10^6}} = 0.02236\text{m} \approx 22.4\text{mm} \quad (13.4.8)$$

13.5. 例題

限界応力を $\sigma_{cr} = 100\text{MPa}$, 安全率を $S = 1.5$ とし, 断面は幅が $b = 40\text{mm}$ で板厚が h である矩形であるとして, 以下の例題に答えなさい.

【例題 13.2】曲げ設計(2)

図 13.5.1 の梁の板厚 h を設計しなさい.

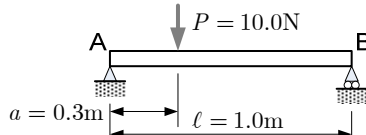


図 13.5.1 曲げ設計【例題 13.2】

【略解】

断面が矩形であるので, 曲げ応力が最大になるのは棒の表面 ($z = \pm h/2$) である. 曲げモーメントに関しては, 【例題 11.2】で BMD は出しており, 図 11.1.5 にある通り, 曲げモーメントの絶対値の最大値 $M_{\max}$ は

$$M_{\max} = Pa \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \quad (13.5.1)$$

であるので, 曲げ応力の絶対値の最大値は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \frac{h}{2} = \frac{Pa \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) h}{bh^3 / 12} \frac{h}{2} = \frac{6Pa}{bh^2} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \quad (13.5.2)$$

設計条件は

$$S\sigma_{\max} \leq \sigma_{cr} \quad (13.5.3)$$

すなわち,

$$S \frac{6Pa}{bh^2} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \leq \sigma_{cr} \quad (13.5.4)$$

したがって,

$$\begin{aligned} h &\geq \sqrt{S \frac{6Pa}{b\sigma_{cr}} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)} \\ &= \sqrt{1.5 \times \frac{6 \times 10.0 \times 0.3}{0.04 \times 100 \times 10^6} \left(1 - \frac{0.3}{1.0}\right)} \\ &\approx 0.002174\text{m} \approx 2.18\text{mm} \end{aligned} \quad (13.5.5)$$

【例題 13.3】曲げ設計(3)

図 13.5.2 の梁の板厚 h を設計しなさい.

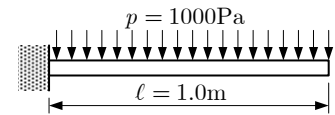


図 13.5.2 曲げ設計【例題 13.3】

【例題 13.4】曲げ設計(4)

図 13.5.3 の梁の板厚 h を設計しなさい.

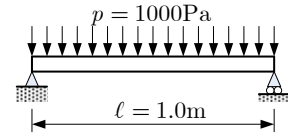


図 13.5.3 曲げ設計【例題 13.4】

【例題 13.5】曲げ設計(5)

図 13.5.4 の梁の板厚 h を設計しなさい.

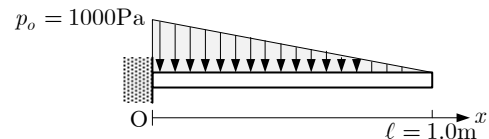


図 13.5.4 曲げ設計【例題 13.5】

【例題 13.6】曲げ設計(6)

図 13.5.5 の梁の板厚 h を設計しなさい.

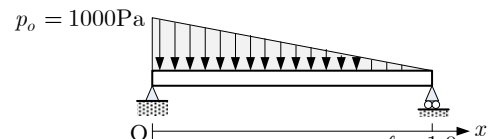


図 13.5.5 曲げ設計【例題 13.6】

【例題 13.7】曲げ設計(7)

図 13.5.6 の梁の板厚 h を設計しなさい.

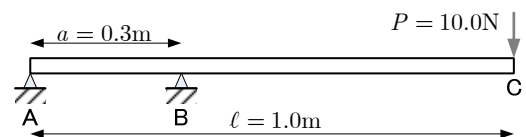


図 13.5.6 曲げ設計【例題 13.7】

【例題 13.8】曲げ設計(8)

図 13.5.7 の梁の板厚 h を設計しなさい.

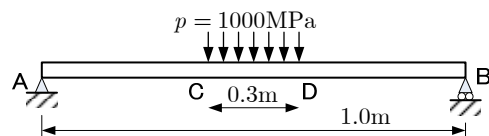


図 13.5.7 曲げ設計【例題 13.8】

【例題 13.9】曲げ設計(9)

図 13.5.8 の梁の板厚 h を設計しなさい.

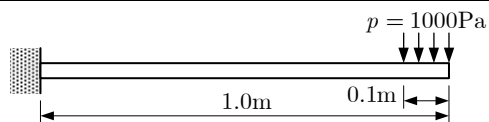


図 13.5.8 曲げ設計【例題 13.9】

【例題 13.10】曲げ設計(10)

図 13.5.9 の梁の板厚 h を設計しなさい（この問題では、曲げ応力に加えて、軸方向の応力も作用するので、その点を考える必要がる）。

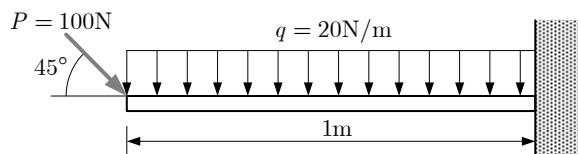


図 13.5.9 曲げ設計【例題 13.10】

13.6. まとめ

曲げ応力の算出方法について学び、応力に関する要求を満たす梁の板厚の設計法について学んだ。

13.7. 宿題

- 1) 【例題 13.10】を解きなさい。

第14章 断面二次モーメントの算出法

今回が実質的には最後の講義である（次回はこれまでの講義内容のまとめ）。

14.1. 断面二次モーメントの定義

既に 9.7 節で学んだ通り，例えば，ある断面の図心を通る一つの軸を y 軸，それに直交する軸を z 軸としたとき，「 y 軸まわりの断面二次モーメント」は次式で定義される。

$$I = \iint z^2 dA \quad (14.1.1)$$

ここで大切なことは，断面二次モーメントは，何等かの軸を基準として，その軸からの距離 z を用いて計算するものであり，基準となる軸をどれにするかによって値は変わるということである。

断面二次モーメントは曲げ応力の計算の他，「材料力学Ⅱ」で学ぶことになる，たわみの算出に必要なとなるので，是非，その算出法をマスターしてほしい。

14.2. 例題(1)

今回もひたすら例題を解いていこう。

【例題 14.1】断面二次モーメント(1)

次の断面の断面二次モーメントを求めなさい。

- 1) 直径 D の円断面
- 2) 幅 b ，厚さ h の矩形断面
- 3) 内径 d ，外径 D の円筒
- 4) 直径 D ，厚さ t の薄肉円筒
- 5) 一辺が a ，厚さ t の正方形中空断面
- 6) 一辺が a ，厚さ t の薄肉の正方形中空断面

【例題 14.2】断面二次モーメント(2)

図 14.2.1 の断面の断面二次モーメントを計算しなさい。

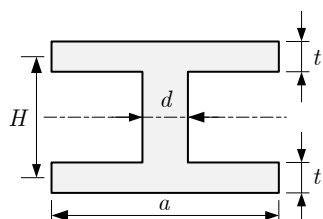


図 14.2.1 断面二次モーメント 【例題 14.2】

【例題 14.3】断面二次モーメント(3)

図 14.2.1 の断面の断面二次モーメントを計算しなさい。

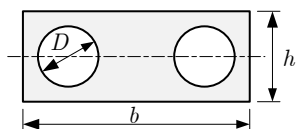


図 14.2.2 断面二次モーメント 【例題 14.2】

例えば，図 14.3.1 のように，ある断面の中心を通る軸 OO' まわりの断面二次モーメントが I_o であつたしよう。このとき， OO' から距離 d だけ離れた軸 AA' まわりの断面二次モーメント I_A はどうなるであろうか？

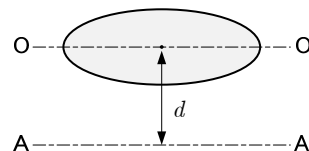


図 14.3.1 平行軸の定理

実際に計算してみよう。まず，

$$I_o = \iint \xi^2 dA \quad (14.1.2)$$

であり，

$$\begin{aligned} I_A &= \iint z^2 dA = \iint (\xi + d)^2 dA \\ &= \iint \xi^2 dA + 2d \iint \xi dA + d^2 \iint dA \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

であるが，軸 OO' が図心を通ることから，

$$\iint \xi dA = 0 \quad (14.1.4)$$

したがって，次式を得る。この定理は「平行軸の定理」と呼ばれ，よく使われるので覚えての方がよいだろう。

$$I_A = \iint \xi^2 dA + 0 + d^2 \iint dA = I_o + d^2 A \quad (14.1.5)$$

14.4. 例題(2)

【例題 14.4】断面二次モーメント(4)

図 14.2.1 の断面の断面二次モーメントを計算しなさい。

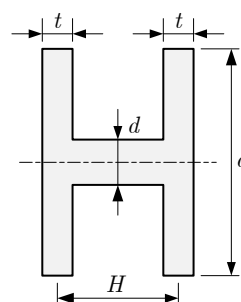
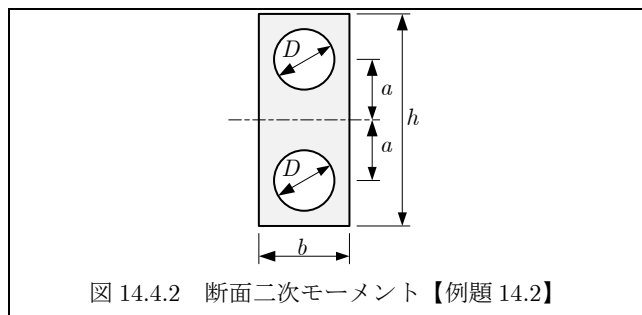


図 14.4.1 断面二次モーメント 【例題 14.2】

【例題 14.5】断面二次モーメント(5)

図 14.2.1 の断面の断面二次モーメントを計算しなさい。

14.3. 平行軸の定理



14.5. まとめ

断面二次モーメントの計算法について確認した. よほど面倒な形の断面でない限り, 矩形と円とを組み合わせることで断面二次モーメントを計算することができるだろう.

14.6. 宿題

なし.

編集・著作：宮崎 康行
日本大学工学部航空宇宙工学科
〒274-8501 千葉県船橋市習志野台 7-24-1
2019 年 9 月 23 日