

Strength of Materials II

材 料 力 学 II
— 梁の曲げと座屈 —

2015

宮 崎 康 行

Yasuyuki Miyazaki

日本大学工学部航空宇宙工学科

はじめに

この講義は「材料力学 I」で学んだ、応力と歪、集中荷重、分布荷重、軸力・せん断力・曲げモーメントの概念、ならびに、SFD, BMD の描き方を基礎として、今後、航空機構造や宇宙機構造の解析・設計に必要な次の内容を講義する。

授業計画		
1		この講義全体の内容の解説と復習 梁のせん断力と曲げモーメントに関する理解度を確認する為に簡単なテストを実施する。
2		丸棒のねじり 丸棒のねじりによるせん断応力の計算法について補足する。
3		梁の曲げ応力 曲げ応力の概念と計算法、曲げ応力と合応力としての曲げモーメントとの関係について解説する。
4		梁の曲げによるたわみの算出(1) 梁のたわみに関する微分方程式の導出と、積分法によるたわみ曲線の算出法について解説する。
5		梁の曲げによるたわみの算出(2) 前回に引き続き、積分法によるたわみ曲線の算出法について解説する。
6		特異関数法によるたわみの算出 特異関数と積分法を組み合わせたたわみ曲線の算出法について解説する。
7		重ね合わせ法によるたわみの算出(1) 重ね合わせ法によるたわみやたわみ角の算出法について解説する。
8		重ね合わせ法によるたわみの算出(2) 前回に引き続き、重ね合わせ法によるたわみやたわみ角の算出法について解説する。
9		梁の不静定問題(1) 釣り合い式からだけでは反力を求められない問題（不静定問題）におけるたわみの算出法について解説する。
10		梁の不静定問題(2) 前回に引き続き、不静定問題の解法について解説する。
11		面積モーメント法による梁のたわみの算出 面積モーメント法による特定の点でのたわみの算出法について解説する。
12		柱の座屈荷重の解法(1) 座屈方程式の定式化法とその解法について解説する。
13		柱の座屈荷重の解法(2) 座屈応力に関する実験公式について解説する。
14		柱の座屈荷重の解法(3) 偏心や初期不整のある梁に軸圧縮荷重を作用させた場合の変形について解説する。また、短柱座屈に関する実験公式を紹介する。
15		補遺：梁の曲げによるせん断応力 梁の曲げによる断面内のせん断応力分布の計算法について解説する。
16		試験

教科書には、「材料力学 I」でも用いた

日本機械学会『材料力学（JSME テキストシリーズ）』丸善

を用いる。また、参考書として、

材料力学教育研究会『新形式 材料力学の学び方・解き方』共立出版

を用いる。授業や宿題に出す問題はこの参考書から取っているものが多いので、購入することを勧める。また、航空機の設計・解析に携わっている OB からも、この参考書は仕事を進める上で役立っているとの評判を聞いているので、そういった方面に就職したい者は是非、読んでほしい。

なお、このテキストはあくまでも教育目的の学内内部資料であり、非営利目的資料である。テキスト自体を一般に公開することはない。このテキストに掲載している文献の図等は、特に著者の許可を得ているものではないが、それは、非公開資料という前提があるからである。学生諸君もこのテキストを外部には決して公開しないこと。

目次

第1章	この講義全体の内容の解説と復習	1-1
1.1.	講義の概要	1-1
1.2.	座標軸および内力の方向の定義	1-2
1.3.	自由端と固定端と単純支持	1-2
1.4.	なぜ応力が設計にとって重要なのか？	1-2
1.5.	なぜ歪が設計にとって重要なのか？	1-2
1.6.	なぜ力とモーメントなのか？	1-2
1.7.	作用・反作用の関係と集中外力	1-2
1.8.	解の重ね合わせ	1-3
1.9.	線形解析	1-4
1.10.	変形後の形状と力の釣り合い	1-4
1.11.	小テストについて	1-5
1.12.	まとめ	1-5
1.13.	次回までの宿題	1-5
第2章	丸棒のねじり	2-1
2.1.	ねじりによる丸棒のせん断応力分布	2-1
2.2.	ねじりモーメント	2-2
2.3.	ねじり剛性	2-3
2.4.	簡単な例題	2-4
2.5.	まとめ	2-4
2.6.	宿題	2-4
第3章	梁の曲げ応力	3-1
3.1.	曲率 (curvature)	3-1
3.2.	歪の定義	3-1
3.3.	純曲げによる垂直歪	3-2
3.4.	純曲げによる垂直応力	3-2
3.5.	純曲げによる軸力と曲げモーメント	3-2
3.6.	純曲げ	3-3
3.7.	中立面	3-3
3.8.	合応力という発想	3-3
3.9.	曲げ応力の最大値	3-4
3.10.	まとめ	3-4
3.11.	宿題	3-4
第4章	梁の曲げによるたわみの算出(1)	4-1
4.1.	梁の弾性曲線と曲率との関係	4-1
4.2.	境界条件	4-2
4.3.	まとめ	4-3
4.4.	宿題	4-3
第5章	梁の曲げによるたわみの算出(2)	5-1
5.1.	対称性を利用する場合	5-1
5.2.	梁の途中に荷重が作用する場合	5-2
5.3.	その他の応用問題	5-2
5.4.	まとめ	5-4
5.5.	宿題	5-4
第6章	特異関数法によるたわみの算出	6-1
6.1.	複数荷重が作用する問題	6-1

6.2. まとめ	6-7
6.3. 宿題	6-7
第7章 重ね合わせ法によるたわみの算出(1)	7-1
7.1. 基本解	7-1
7.2. 複数荷重の組み合わせ問題	7-1
7.3. 組み合わせ問題の応用	7-2
7.4. まとめ	7-3
7.5. 宿題	7-3
第8章 重ね合わせ法によるたわみの算出(2)	8-1
8.1. 対称性の利用	8-1
8.2. その他の応用問題	8-4
8.3. まとめ	8-5
8.4. 宿題	8-5
第9章 梁の不静定問題(1)	9-1
9.1. 不静定	9-1
9.2. まとめ	9-3
9.3. 宿題	9-3
第10章 梁の不静定問題(2)	10-1
10.1. 不静定問題	10-1
10.2. まとめ	10-3
10.3. 宿題	10-3
第11章 面積モーメント法によるたわみの算出	11-1
11.1. 面積モーメント法	11-1
11.1.1. 面積モーメント	11-1
11.1.2. たわみ角の計算法	11-1
11.1.3. 面積モーメント法によるたわみの計算法	11-1
11.2. Clapeyronの3モーメントの式	11-7
11.3. Bernoulli-Eulerの仮説	11-7
11.4. Timoshenko梁	11-7
11.5. まとめ	11-9
11.6. 宿題	11-9
第12章 座屈現象とその解法(1)	12-1
12.1. 圧縮は不安定を招く	12-1
12.2. 座屈	12-1
12.3. 座屈現象	12-2
12.3.1. オイラー座屈 (Euler Buckling)	12-2
12.3.2. ねじれ座屈 (Torsional Buckling)	12-2
12.3.3. クリップリング (Crippling)	12-3
12.3.4. 横倒れ座屈 (Lateral Buckling)	12-3
12.3.5. 薄板の圧縮座屈	12-3
12.3.6. 薄板のせん断座屈と張力場	12-3
12.3.7. 円筒座屈	12-4
12.3.8. 補強パネルの座屈	12-4
12.4. Euler座屈	12-4
12.5. 片持ち梁の座屈荷重	12-5
12.5.1. 座屈の力学	12-5
12.5.2. 座屈の固有値問題	12-6
12.6. 両端単純支持梁の座屈荷重	12-7
12.7. 端末条件係数と座屈応力	12-7
12.8. 細長い物体の呼び名	12-7

12.9.まとめ.....	12-8
12.10. 宿題.....	12-8
第 13 章 座屈現象とその解法(2).....	13-1
13.1.種々の端末条件と座屈荷重.....	13-1
13.2.種々の端末条件と端末条件係数.....	13-2
13.3.断面形状と座屈荷重.....	13-2
13.4.まとめ.....	13-2
13.5.宿題.....	13-2
第 14 章 座屈現象とその解法(3).....	14-1
14.1.偏心荷重を受ける梁.....	14-1
14.2.初期たわみを有する梁.....	14-2
14.3.Euler 座屈の限界.....	14-3
14.4.ランキン (Rankine) の式.....	14-3
14.5.ジョンソン (Johnson) の式.....	14-3
14.6.テトマイヤー (Tetomajer) の式.....	14-3
14.7.塑性座屈.....	14-4
14.8.まとめ.....	14-5
14.9.宿題.....	14-5
14.10. まとめ.....	14-5
14.11. 宿題.....	14-5
第 15 章 補遺：梁の曲げによるせん断応力.....	15-1
15.1.梁の側面の境界条件.....	15-1
15.2.梁の微小部分の力の釣り合い.....	15-1
15.3.せん断応力分布.....	15-1
15.3.1.薄肉断面のせん断応力分布.....	15-3
15.4.まとめ.....	15-4
15.5.宿題.....	15-4

図目次

図 1.2.1 座標軸および内力の方向の定義.....	1-2
図 1.3.1 支持方法の例.....	1-2
図 1.7.1 内力の向きと作用・反作用の法則.....	1-3
図 1.7.2 集中荷重.....	1-3
図 1.7.3 トラスにおける力の釣り合い.....	1-3
図 1.7.4 反力.....	1-3
図 1.8.1 片持ち梁に作用する荷重の重ね合わせ.....	1-3
図 1.8.2 解の重ね合わせ.....	1-4
図 1.10.1 変形前と後の座標系.....	1-4
図 1.10.2 力の釣り合いにおける変形形状の近似.....	1-4
図 1.11.1 BMD と SFD の例題(1).....	1-5
図 1.11.2 BMD と SFD の例題(2).....	1-5
図 1.11.3 BMD と SFD の例題(3).....	1-5
図 1.11.4 BMD と SFD の例題(4).....	1-5
図 2.1.1 棒のねじり.....	2-1
図 2.1.2 せん断歪の定義.....	2-1
図 2.1.3 棒のねじれ角.....	2-1
図 2.1.4 ねじりによるせん断変形.....	2-1
図 2.1.5 せん断応力分布.....	2-2
図 3.1.1 曲率.....	3-1
図 3.2.1 伸びと歪.....	3-1
図 3.2.2 歪の定義.....	3-2
図 3.3.1 純曲げによる歪.....	3-2
図 3.4.1 純曲げによる曲げ応力分布.....	3-2

図 3.7.1	図心	3-3
図 3.8.1	合応力	3-3
図 4.1.1	たわみ曲線微小部分とたわみ角	4-1
図 4.1.2	先端に荷重が作用する片持ち梁	4-1
図 4.1.3	モーメントの釣り合い	4-1
図 4.2.1	分布荷重を受ける両端単純支持梁	4-2
図 4.2.2	分布荷重を受ける片持ち梁	4-2
図 4.2.3	先端にモーメントを受ける片持ち梁	4-2
図 4.2.4	端部にモーメントを受ける両端単純支持梁	4-3
図 5.1.1	中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁	5-1
図 5.2.1	梁の途中に荷重が作用する場合	5-2
図 5.2.2	変形後の梁の形状 (図 5.2.1 の場合)	5-2
図 5.2.3	根元に分布荷重を受ける片持ち梁	5-2
図 5.3.1	断面形状が変化する片持ち梁	5-2
図 5.3.2	バネで押される片持ち梁	5-3
図 5.3.3	変形後の梁とバネの状態	5-3
図 5.3.4	変形後の梁とバネの状態の分離	5-3
図 5.3.5	バネで押される単純支持梁	5-3
図 5.3.6	断面が不連続に変化する梁	5-3
図 5.3.7	途中に荷重を受ける両端単純支持梁	5-4
図 5.3.8	途中に荷重を受ける片持ち梁	5-4
図 6.1.1	複数荷重を受ける片持ち梁	6-1
図 6.1.2	反力 (【例題 5.1】)	6-2
図 6.1.3	先端側に分布荷重を受ける片持ち梁	6-2
図 6.1.4	反力 (【例題 5.1】)	6-2
図 6.1.5	反力 (【例題 6.4】)	6-3
図 6.1.6	両端に荷重を受ける単純支持梁	6-3
図 6.1.7	分布荷重を受ける単純支持梁	6-3
図 6.1.8	先端に荷重を受ける単純支持梁	6-3
図 6.1.9	中央に分布荷重を受ける両端単純支持梁	6-3
図 6.1.10	モーメントの重ね合わせ (【例題 6.8】)	6-4
図 7.2.1	複数荷重を受ける静定梁	7-1
図 7.2.2	解の重ね合わせ【例題 7.1】	7-1
図 7.2.3	解の重ね合わせ【例題 7.2】	7-2
図 7.2.4	先端のたわみ【例題 7.2】	7-2
図 7.3.1	解の重ね合わせ【例題 7.3】	7-2
図 7.3.2	先端のたわみ【例題 7.3】	7-2
図 7.3.3	先端に荷重を受ける片持ち梁の中央のたわみ	7-2
図 7.3.4	梁のたわみ【例題 7.4】	7-3
図 7.3.5	分布荷重を受ける片持ち梁の中央のたわみ	7-3
図 7.3.6	梁のたわみ【例題 7.5】	7-3
図 7.3.7	分布荷重を受ける片持ち梁の途中のたわみ	7-3
図 8.1.1	【例題 8.1】の梁	8-1
図 8.1.2	【例題 8.1】と等価な梁	8-1
図 8.1.3	解の重ね合わせ (図 8.1.2)	8-1
図 8.1.4	対称性の利用【例題 8.2】	8-1
図 8.1.5	4点曲げ試験による曲げ剛性の算出	8-2
図 8.1.6	解の重ね合わせ【例題 8.2】	8-2
図 8.1.7	解の重ね合わせ【例題 8.2】の問題 1	8-2
図 8.1.8	解の重ね合わせ【例題 8.3】	8-3
図 8.1.9	解の重ね合わせ【例題 8.3】の問題 1	8-3
図 8.1.10	対称性の利用【例題 8.3】	8-3
図 8.2.1	モーメントの釣り合い【例題 8.4】	8-4
図 8.2.2	梁の分割【例題 8.4】	8-4
図 8.2.3	変形後の形状【例題 8.4】	8-4
図 8.2.4	連結問題【例題 8.6】	8-5
図 9.1.1	中央を単純支持され先端荷重を受ける片持ち梁	9-1
図 9.1.2	【例題 7.2】の梁	9-1
図 9.1.3	解の重ね合わせ (図 9.1.1)	9-1
図 9.1.4	中央を単純支持され分布荷重を受ける片持ち梁	9-1
図 9.1.5	解の重ね合わせ【例題 9.2】	9-1
図 9.1.6	梁のたわみ【例題 9.2】 (問題 1)	9-2
図 9.1.7	先端を単純支持され分布荷重を受ける片持ち梁	9-2

図 9.1.8	中央と両端を単純支持され分布荷重を受ける梁	9-2
図 9.1.9	途中で単純支持され先端荷重を受ける片持ち梁	9-2
図 9.1.10	途中で荷重を受ける両端固定梁	9-2
図 9.1.11	解の連結【例題 9.6】	9-2
図 10.1.1	分布荷重を受ける両端固定梁	10-1
図 10.1.2	解の重ね合わせ【例題 10.1】	10-1
図 10.1.3	途中で荷重を受ける 3 点支持梁	10-1
図 10.1.4	対称性の利用【例題 10.2】	10-1
図 10.1.5	解の重ね合わせ 1【例題 10.2】	10-1
図 10.1.6	解の重ね合わせ 2【例題 10.2】	10-2
図 10.1.7	等価な問題【例題 10.2】	10-2
図 10.1.8	分布荷重を受ける 4 点支持梁	10-2
図 10.1.9	解の重ね合わせ【例題 10.3】	10-2
図 11.1.1	BMD の図心	11-1
図 11.1.2	中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁	11-1
図 11.1.3	中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁	11-2
図 11.1.4	BMD【例題 11.2】	11-2
図 11.1.5	BMD【例題 11.4】	11-3
図 11.1.6	BMD と面積モーメント (1)【例題 11.5】	11-3
図 11.1.7	BMD と面積モーメント (2)【例題 11.5】	11-3
図 11.1.8	BMD と面積モーメント (3)【例題 11.5】	11-3
図 11.1.9	BMD と面積モーメント【例題 11.6】	11-4
図 11.1.10	BMD【例題 11.7】	11-4
図 11.1.11	複数の集中荷重を受ける両端単純支持梁	11-5
図 11.1.12	BMD【例題 11.8】	11-5
図 11.1.13	BMD【例題 11.9】	11-6
図 11.3.1	Bernoulli-Euler の仮説	11-7
図 11.3.2	実際の断面形状	11-7
図 11.3.3	せん断変形のみの場合の断面形状	11-7
図 11.3.4	Timoshenko 梁	11-7
図 12.1.1	床の上での箱の移動	12-1
図 12.1.2	おもりを取り付けた棒	12-1
図 12.1.3	おもりを取り付けて曲げた棒	12-1
図 12.2.1	長柱座屈	12-1
図 12.2.2	座屈経路	12-1
図 12.3.1	Euler 座屈 (Wikipedia より)	12-2
図 12.3.2	ねじれ座屈 (http://www.infograph.eu/beispiel/pki.htm)	12-2
図 12.3.3	アングル材のねじれ座屈 (滝)	12-3
図 12.3.4	クリップリング (滝)	12-3
図 12.3.5	横倒れ座屈 (滝)	12-3
図 12.3.6	薄板の圧縮座屈 (滝)	12-3
図 12.3.7	せん断座屈 (滝)	12-3
図 12.3.8	円筒殻の座屈	12-4
図 12.3.9	吉村パターン	12-4
図 12.3.10	補強パネルの座屈 (滝)	12-4
図 12.4.1	両端単純支持梁の Euler 座屈荷重 (滝)	12-4
図 12.4.2	初期不整を有する両端単純支持梁の座屈 (滝)	12-4
図 12.5.1	座屈した片持ち梁	12-5
図 12.5.2	座屈した片持ち梁の釣り合い	12-5
図 12.5.3	片持ち梁の座屈モード形状	12-6
図 12.6.1	両端単純支持梁の座屈	12-7
図 12.6.2	両端単純支持梁の釣り合い	12-7
図 13.1.1	一端固定他端単純支持梁の座屈	13-1
図 13.1.2	一端固定他端単純支持梁の釣り合い	13-1
図 13.1.3	固有方程式の解 (一端固定他端単純支持)	13-1
図 14.1.1	偏心荷重を受ける片持ち梁	14-1
図 14.1.2	偏心荷重を受ける片持ち梁のモデル化	14-1
図 14.1.3	偏心荷重を受ける片持ち梁の釣り合い	14-1
図 14.1.4	偏心荷重を受ける片持ち梁の先端たわみ	14-2
図 14.2.1	初期たわみを有する両端単純支持梁	14-2
図 14.2.2	たわみの定義	14-2
図 14.2.3	初期たわみを有する両端単純支持梁の釣り合い	14-2
図 14.2.4	初期たわみを有する両端単純支持梁の中央たわみ	14-2

図 14.4.1	Rankine の式 (軟鋼)	14-3
図 14.5.1	Johnson の式 (軟鋼)	14-3
図 14.5.2	Johnson の式 (薄肉構造)	14-3
図 14.6.1	Tetmjer の式 (軟鋼)	14-4
図 14.6.2	Tetmajer の式 (鋼材)	14-4
図 14.7.1	A7075-T7451 板材の応力-歪関係 (1ksi=6.894757 MPa)	14-4
図 14.7.2	塑性座屈応力 (A7075-T7451 板材)	14-4
図 14.7.3	座屈応力 (A7075-T7451 板材)	14-4
図 15.1.1	微小部分に生じるせん断応力	15-1
図 15.2.1	梁内部の応力状態	15-1
図 15.2.2	梁内部の微小部分の力の釣り合い	15-1
図 15.3.1	片持ち梁に生じるせん断応力	15-2
図 15.3.2	片持ち梁の先端部分のモーメントの釣り合い	15-2
図 15.3.3	せん断応力分布	15-2
図 15.3.4	薄肉円筒の微小部分の力の釣り合い	15-3
図 15.3.5	薄肉円筒のせん断応力分布	15-3
図 15.3.6	ロケットの胴体構造の例	15-3
図 15.3.7	航空機の胴体構造の例	15-4

表目次

表 1.3.1	支持方法の違い	1-2
表 4.2.1	梁の端部での境界条件	4-2
表 7.1.1	重ね合わせ法の基本解	7-1
表 7.1.2	重ね合わせ法の基本解(2)	7-1
表 12.3.1	分岐座屈の分類	12-2
表 13.1.1	固有方程式の解 (一端固定他端単純支持)	13-2
表 13.2.1	端末条件係数	13-2
表 14.4.1	Rankine の式の定数 (両端単純支持)	14-3
表 14.6.1	Tetmajer の式の定数 (両端単純支持)	14-4

例題目次

【例題 1.1】	BMD と SFD (1)	1-5
【例題 1.2】	BMD と SFD (2)	1-5
【例題 1.3】	BMD と SFD (3)	1-5
【例題 1.4】	BMD と SFD (4)	1-5
【例題 2.1】	直径の設計	2-4
【例題 2.2】	径の違う棒の連結	2-4
【例題 2.3】	径の違う棒の連結	2-4
【例題 3.1】	重力下での棒の伸び	3-2
【例題 3.2】	BMD と最大曲げ応力	3-4
【例題 3.3】	断面二次モーメント	3-4
【例題 3.4】	最大曲げ応力	3-4
【例題 4.1】	先端荷重による片持ち梁のたわみ	4-1
【例題 4.2】	分布荷重による両端単純支持梁のたわみ	4-2
【例題 4.3】	分布荷重による片持ち梁のたわみ	4-2
【例題 4.4】	モーメントによる片持ち梁のたわみ	4-2
【例題 4.5】	モーメントによる両端単純支持梁のたわみ	4-3
【例題 5.1】	集中荷重による両端単純支持梁のたわみ	5-1
【例題 5.2】	両端単純支持梁のたわみ (対称性の利用)	5-2
【例題 5.3】	梁のたわみ (荷重が一部に作用する場合)	5-2
【例題 5.4】	先端荷重による三角梁のたわみ	5-2
【例題 5.5】	梁とバネの連成(1)	5-3
【例題 5.6】	梁とバネの連成(2)	5-3
【例題 5.7】	断面が不連続に変化する梁のたわみ	5-3
【例題 5.8】	途中に荷重が作用する梁のたわみ	5-4
【例題 5.9】	途中に荷重が作用する梁のたわみ	5-4

【例題 6.1】 特異関数による解法(1)	6-1
【例題 6.2】 特異関数による解法(2)	6-2
【例題 6.3】 特異関数による解法(3)	6-2
【例題 6.4】 特異関数による解法(4)	6-3
【例題 6.5】 特異関数による解法(5)	6-3
【例題 6.6】 特異関数による解法(6)	6-3
【例題 6.7】 特異関数による解法(7)	6-3
【例題 6.8】 特異関数による解法(8)	6-3
【例題 6.9】 特異関数による解法(9)	6-4
【例題 6.10】 特異関数による解法(10)	6-4
【例題 6.11】 特異関数による解法(11)	6-5
【例題 6.12】 特異関数による解法(12)	6-5
【例題 6.13】 特異関数による解法(13)	6-6
【例題 6.14】 特異関数による解法(14)	6-6
【例題 6.15】 特異関数による解法(15)	6-7
【例題 6.16】 特異関数による解法(16)	6-7
【例題 7.1】 重ね合わせ法(1)	7-1
【例題 7.2】 重ね合わせ法(2)	7-2
【例題 7.3】 重ね合わせ法(3)	7-2
【例題 7.4】 重ね合わせ法(4)	7-2
【例題 7.5】 重ね合わせ法(5)	7-3
【例題 7.6】 重ね合わせ法(6)	7-3
【例題 7.7】 重ね合わせ法(7)	7-3
【例題 7.8】 重ね合わせ法(8)	7-3
【例題 8.1】 対称性の利用(1)	8-1
【例題 8.2】 対称性の利用(2)	8-1
【例題 8.3】 対称性の利用(3)	8-3
【例題 8.4】 途中に荷重が作用する梁のたわみ(9)	8-4
【例題 8.5】 断面が不連続に変化する梁のたわみ	8-4
【例題 8.6】 連結問題	8-5
【例題 9.1】 不静定問題の例(1)	9-1
【例題 9.2】 不静定問題の例(2)	9-1
【例題 9.3】 不静定問題の例(3)	9-2
【例題 9.4】 不静定問題の例(4)	9-2
【例題 9.5】 不静定問題の例(5)	9-2
【例題 9.6】 不静定問題の例(6)	9-2
【例題 10.1】 不静定問題の例(7)	10-1
【例題 10.2】 連続梁の例(1)	10-1
【例題 10.3】 連続梁の例(2)	10-2
【例題 11.1】 特定の点のたわみ角	11-1
【例題 11.2】 面積モーメント法(9)	11-2
【例題 11.3】 面積モーメント法(10)	11-2
【例題 11.4】 面積モーメント法(11)	11-3
【例題 11.5】 面積モーメント法(12)	11-3
【例題 11.6】 面積モーメント法(13)	11-4
【例題 11.7】 面積モーメント法(14)	11-4
【例題 11.8】 面積モーメント法(15)	11-5
【例題 11.9】 途中に荷重が作用する梁のたわみ(3)	11-6
【例題 11.10】 先端にせん断荷重を受ける Timoshenko 梁	11-8
【例題 11.11】 分布荷重を受ける Timoshenko 梁	11-8
【例題 13.1】 座屈荷重の計算(1)	13-1
【例題 14.1】 偏心圧縮荷重を受ける梁の計算	14-2
【例題 14.2】 初期たわみを有する梁の計算	14-3
【例題 15.1】 せん断応力分布	15-2
【例題 15.2】 せん断応力分布(2)	15-3

第1章 この講義全体の内容の解説と復習

材料力学Ⅰでは棒(bar)の引張・圧縮による応力・歪の算出法, 静定トラスの軸力(axial force)の算出法, そして, 梁(beam)の曲げモーメント(bending moment)とせん断力(shear force)の算出法, BMD(Bending moment Diagram), SFD(Shear Force Diagram)の描き方を学んだ. 今回の講義では, これらの中でも材料力学Ⅱに直接関係してくる, 梁の断面に作用する曲げモーメントとせん断力について復習したい.

1.1. 講義の概要

この講義の内容はシラバスの通りであるが, 特に, 以下の点についてしっかりと理解してほしいと考えている.

- 1) 梁に作用する力やモーメントの釣合い
- 2) 梁のたわみの算出法
- 3) 柱の座屈現象と, 柱の座屈荷重の算出法
- 4) 棒のねじり

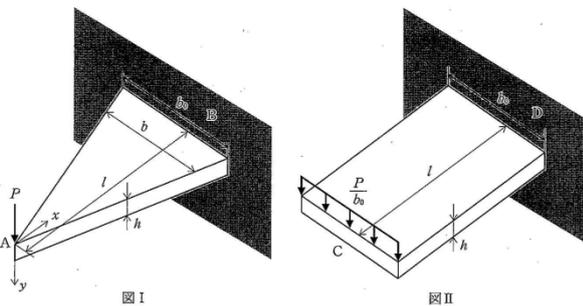
ここで, 1)は「材料力学Ⅰ」の復習であり, ここが理解できていないと, 「材料力学Ⅱ」を受講するのはかなり厳しいと言わざるを得ない. 「材料力学Ⅰ」を修得できなかった者は, 無理はせず, 他の科目を受講することを勧める.

この講義では, 最低限, 材料力学に関する国家公務員試験総合職の問題は解けるようになることを目指している. 実際, 国家公務員試験において, 材料力学に関する問題はそれほど難しくはない. 以下に国家公務員試験の問題をさすが, この講義の修得できれば, この程度の問題であれば, 問題なく解けるようになっているだろう.

【問題 1】

[No. 53] 図Ⅰのように, 一定高さ h , 幅 b の長方形断面を有する長さ l の片持ち梁 AB がある. 幅 b は自由端 A から固定端 B に向かって, 自由端からの距離に比例する. また, 図Ⅱのように, 長さ及び高さが梁 AB と同じで幅が長さ方向に b_0 で一定である直方体片持ち梁 CD がある. 梁 AB 及び梁 CD の自由端に同じ大きさの荷重 P が自由端 A では集中荷重として, 自由端 C では分布荷重として作用するとき, 自由端 A に生ずるたわみ δ_a と自由端 C に生ずるたわみ δ_c との比として最も妥当なのはどれか.

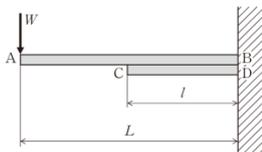
ただし, いずれの梁も同一の均質材料からできており, 梁の自重は考慮しないものとする. また, 図Ⅰのように, 自由端から梁の長さ方向を x 方向, 荷重方向を y 方向としたとき, 曲げモーメント M が作用する曲げ剛性 EI の梁の y 方向のたわみ δ は, $\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ で表されるものとする.



【問題 2】

[No. 53] 図のように, 長さ L の片持ち梁 AB が自由端に集中荷重 W を受けている. AB をこれと同じ断面で同じ弾性係数の, 長さ l の片持ち梁 CD で, 下から支えるとき, 点 C においてこれら二つの梁の間に働く力の大きさとして最も妥当なのはどれか.

ただし, AB 及び CD は同じ均質材料からできており, $L > l$ である. また, AB 及び CD の間に摩擦力は存在しないものとする.



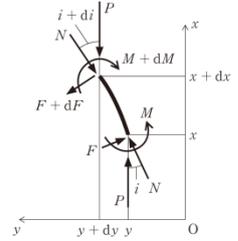
【問題 3】

(1) 一様断面の柱のオイラー座屈変形について考える.

(a) 図Ⅰにおいて, 太線は一様断面の柱である. これに圧縮力 P を受けて y 方向にわずかにたわみが生じたとき, 微小長さ (dx, dy) の部分に作用する力及びモーメントの釣合いから, 次の微分方程式が得られることを示せ.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

ただし, 曲げ剛性 EI は一定であり, たわみ角 i は微小であるため, $\cos i = 1$, $\sin i = i$ と近似できるものとする. また, たわみ曲線の微分方程式は既知であるものとしてよい.



(b) オイラーの座屈荷重を設計に用いるときに注意すべき点について簡単に説明せよ.

(2) 弾性体の平面上に xy 座標をとり, その原点において, x 軸から $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ の角度にひずみゲージを貼り付けて測定したところ, それぞれ $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ の垂直ひずみが検出された. 以下の問いに答えよ.

(a) この点における x, y 軸方向の垂直応力成分 σ_x, σ_y 及びせん断応力成分 τ_{xy} を求めよ.

ただし, 縦弾性係数を E , ポアソン比を ν とする.

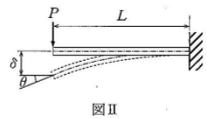
(b) $\epsilon_a = -1.0 \times 10^{-4}$, $\epsilon_b = 1.0 \times 10^{-4}$, $\epsilon_c = 3.0 \times 10^{-4}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ であるとき, 主応力方向を求めよ.

【問題 4】

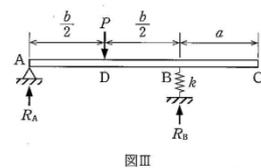
(2) 静定梁について以下の問いに答えよ.

ただし, 梁の曲げ剛性を EI とし, 自重は考慮しないものとする.

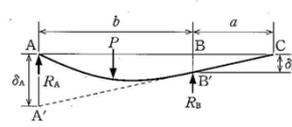
(a) 図Ⅱのような長さ L の片持ち梁の自由端に集中荷重 P が作用したとき, たわみ δ 及びたわみ角 θ を求めよ.



(b) 図Ⅲのように, 端点 A で単純支持され, 途中の点 B でばね定数 k のばねで支えられている静定梁 AC がある. AB の中点 D に集中荷重 P を加えたとき, 図Ⅳに示すように点 B が δ_b だけ変位し, 点 B' に移動するものとする. このとき, 点 C が上下に変位しないための k の値を, 以下の問いに答えることによって求めよ.



図Ⅲ



図Ⅳ

(i) 図Ⅲの反力 R_A 及び R_B を求めよ.

(ii) 図Ⅳの δ_b を P 及び k を用いて表せ.

(iii) $\triangle CAA'$ と $\triangle CBB'$ とが相似となるように点 A' を定めるとき, $\frac{\delta_b}{\delta_a}$ の値を a 及び b を用いて表せ.

(iv) 点 B' は, 片持ち梁 AB' の固定端とみなすことができる. このとき, (a) の結果を用いて, 図Ⅳの δ_a を求めよ.

(v) ばね定数 k を求めよ.

さて, この講義では, 毎回, 宿題として, 教科書の中で次回の内容に関連した部分を予習して, 手書きのレポートを A4 で提出してもらう. また, 数回, 課題を課す. これらの宿題は全て提出してほしい.

1.2. 座標軸および内力の方向の定義

材料力学の専門書を読んでみると、座標軸の設定の仕方（座標軸の向きや原点の位置）が本によってまちまちであることがわかるだろう。また、せん断力や曲げモーメントの方向もまちまちである。この講義では教科書に従って、図 1.2.1 の通りに定義する。y 軸を下に向けたり、下に向けているのに、鉛直方向の反力は上向きを正としたりと、かなり整合性の悪い定義になっているが、過去からの慣習でこの向きに取ることが多いので、この講義でも慣習に従うことにする。

この講義では、この図を常にイメージしておいてほしい。

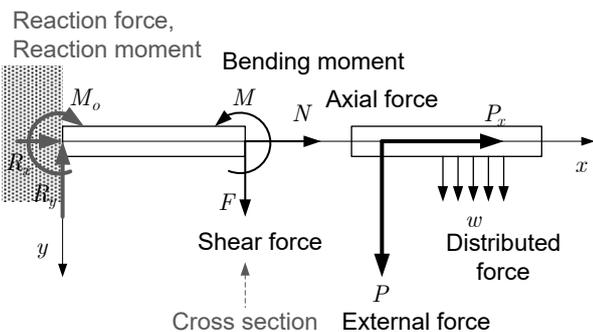


図 1.2.1 座標軸および内力の方向の定義

1.3. 自由端と固定端と単純支持

梁の支持方法の例として、材料力学 I では固定支持 (fixed) と単純支持 (simply supported) の 2 つを学んだ。また、全く支持しない自由端についても学んだ (図 1.3.1)。これらの違いは何だろうか？

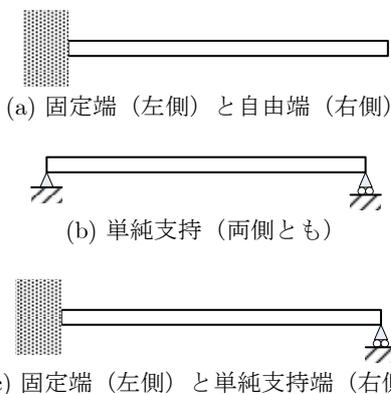


図 1.3.1 支持方法の例

表 1.3.1 支持方法の違い

支持方法	特徴
固定端 (壁に固定する場合など)	<ul style="list-style-type: none"> ✓ たわみが 0. 傾きも 0 ✓ 一般に、反力が生じる ✓ 一般に、反モーメント (固定モーメント) が生じる
単純支持点 (軸受で支持する場合など)	<ul style="list-style-type: none"> ✓ たわみが 0 ✓ 一般に、反力が生じる ✓ 反モーメントは生じない! ✓ 一般に、傾きは 0 にはならない
自由端	<ul style="list-style-type: none"> ✓ 外力が作用していなければ、せん断力は 0 ✓ 外モーメントが作用していなければ、モーメントは 0 ✓ 一般に、たわみも傾きも 0 にはならない

これらの支持方法の違いは表 1.3.1 の通りである。この表に書かれている内容は非常に重要なので、身体に染み込ませておいてほしい。ちなみに、単純支持の場合、図 1.3.1 のように車輪が付いている場合があるが、これが何を意味するのか (なぜ車輪が付いているのか)、わかるだろうか？

1.4. なぜ応力が設計にとって重要なのか？

ひと言でいえば、「物体のある部分に作用する応力がある値を超えると、その部分は壊れる」ということを昔の賢人が発見したからである。力がどんなに大きくても、応力が小さければ壊れないし、逆に、力が小さくても、応力が大きければ物体は壊れる。いわゆる応力集中がそのいい例である (だから、設計をする時、例えば、内側の角にも R を付けるなどの処置を施す)。

その意味では、物体をみたら常に「これには応力がどうかかかっているだろうか？」と瞬間的に考える感覚が構造解析の担当者には必要となる。

1.5. なぜ歪が設計にとって重要なのか？

ひと言でいえば、応力は歪に依存するからである。伸びやたわみがどんなに大きくても、歪が小さければ (= 応力が小さければ) 壊れることはないが、歪が大きいと、応力も大きくなり、壊れる危険性がでてくる。なお、実機の試験では、応力を直接測定することは難しく、歪を測定することで、応力を算出する方法を取る。その意味でも、歪の値は重要となる。

1.6. なぜ力とモーメントなのか？

物体の釣り合い (equilibrium) というとき、力の釣り合いとモーメントの釣り合いを考えるということになっている。では、なぜ、この二者について考えればよいのだろうか？

詳細は省くが、本来、釣り合いというものは、物体に力が作用した際の、物体内の任意の微小部分における「応力の釣り合い」のみで決まるものである。しかし、例えば剛体の場合であれば、力が作用しても変形はしないという仮定が付加され、それを用いると、微小部分における応力の釣り合い式を解くことと、剛体に作用する力の釣り合い式とモーメントの釣り合い式を解くことが同値であることを証明できる。また、梁の場合、

- ・ 断面は変形しない
- ・ 断面に垂直な方向は伸び縮みする

という仮定が付加されるので、その結果、微小部分の応力の釣り合い式を解くことと、せん断力の釣り合い式と曲げモーメントの釣り合い式を解くことが同値であることを証明することができる。証明するには、「自由度」というものがどういうものか、といった概念から始まって、いつか知っておかないといけないことがあり、長くなるのでここでは省略するが、どう証明すればよいかを知りたい者は研究室を訪れてほしい。

なお、応力の釣り合いについて知りたい者は「弾性力学 (Elasticity)」という分野を勉強することを勧める。

1.7. 作用・反作用の関係と集中外力

軸力やせん断力、曲げモーメントといった「内力」 (internal force) は、常に、梁を軸に対して垂直に切断したときのある断面に対して定義される。つまり、断面 (cross section) の場所が違えば、それらの値は異なる。また、梁を切断すると 2 つの面ができるが、それぞれの面で内力は

異なる。したがって、「内力は断面の場所と法線の向きで決まる」ことをしっかりと押さえておく必要がある。

例えば、図 1.7.1(a)のように、ある点 A で梁を切断したとする。このとき、左側の断面には図 1.7.1(b)のようにせん断力 F が下向きに、曲げモーメント M が反時計回りに作用していたとすると、右側の断面には上向きに F だけのせん断力が、時計回りに M だけの曲げモーメントが作用する。

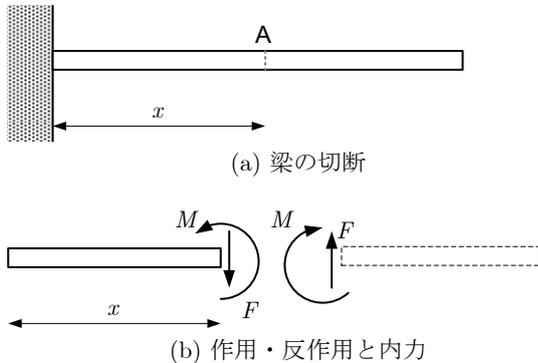


図 1.7.1 内力の向きと作用・反作用の法則

では、点 A に集中荷重 (concentrated load) P が作用している場合はどうかといえば、図 1.7.2(b)のように、左右の断面でせん断力の値は異なる。実際、右側の断面に作用するせん断力を F_2 とすれば、連結点での力の釣り合いは、図 1.7.2(b)のように

$$-F + P + F_2 = 0 \quad (1.7.1)$$

したがって、

$$F_2 = F - P \quad (1.7.2)$$

となる。図 1.2.1 の場合は、作用・反作用の法則から $F_2 = F$ となる、と考えてもよいが、図 1.7.2 でたまたま $P = 0$ のケースであったと考えてもよい。なお、せん断荷重 P が作用しただけでは曲げモーメントに影響はなく、梁の両側で同じ値 (向きは逆) となる。

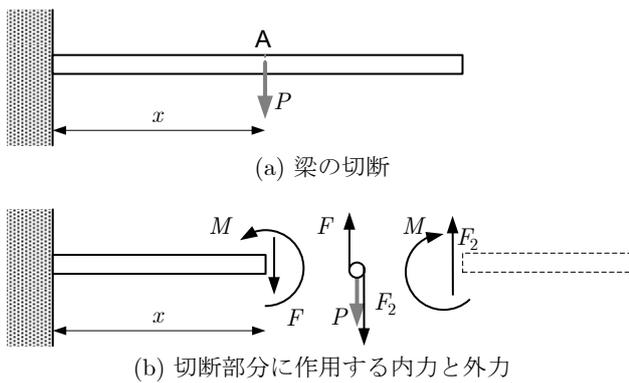


図 1.7.2 集中荷重

この「連結点」という考え方は、トラスにおける力の釣り合いを考える際にも役立つだろう (図 1.7.3)。

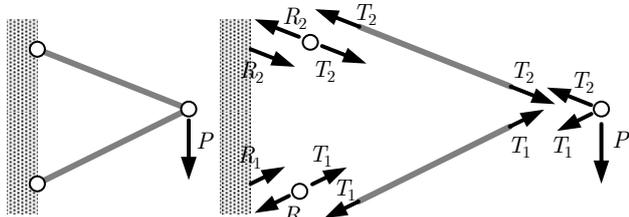


図 1.7.3 トラスにおける力の釣り合い

それから、梁に作用するせん断力や曲げモーメントと、壁からの固定反力との関係は、次のように考えることもできる。すなわち、図 1.7.4 のように、 $x = 0$ の断面で梁を切ると、梁の右断面には $x = 0$ でのせん断力・曲げモーメントと反対向きのせん断力・曲げモーメントが作用するはずであるが、これが反力なのである。そもそも、反力・反モーメントとは、壁が梁に対して与える外力・外モーメントなのであるから、当然といえば当然である。結局、梁の境界 (端部) で切った断面における、その面でのせん断力・曲げモーメントは外力・外モーメントと一致する。

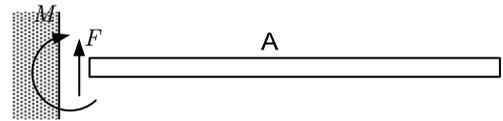


図 1.7.4 反力

1.8. 解の重ね合わせ

例えば、片持ち梁 (cantilever) の先端にせん断荷重 P を加えた場合 (図 1.8.1(a)) の BMD と、全体に単位長さあたり w の分布せん断荷重を作用させた場合 (図 1.8.1(b)) の BMD、そして、両者を同時に作用させた場合 (図 1.8.1(c)) の BMD、この三者にはどのような関係があるだろうか？

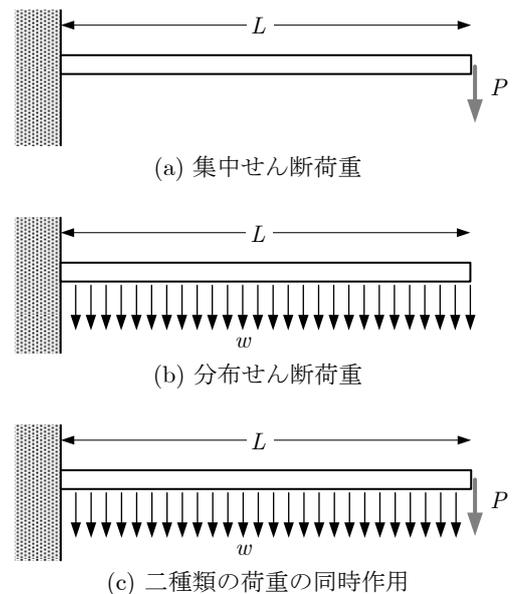


図 1.8.1 片持ち梁に作用する荷重の重ね合わせ

図 1.8.2 にそれぞれの場合の BMD を記すが、結果は単純で、(a) の場合と (b) の場合とを足し合わせたものが (c) の解になる。このように解の重ね合わせが成立するのは、古典的な材料力学の範囲内では力と変位との関係 (応力と歪との関係) を線形と仮定しているからである。

実際の物理現象においては、力と変位との関係は線形にはならないが、変位が微小な場合 (例えば、梁のたわみが梁の厚さと同程度のオーダーの場合) には、ほぼ線形と近似して問題ないことが知られている。もちろん、変位の解析をどの程度の精度で行いたいかによるが、少なくとも、材料力学 I ~ III では、線形解析 (linear analysis) を仮定して授業を進めてゆく。

なお、今後、この講義で学ぶ通り、梁のたわみ (deflection) についても同様で、(a) の場合のたわみと (b) の場合のたわみを足し合わせたものが (c) の場合のたわみとなる。

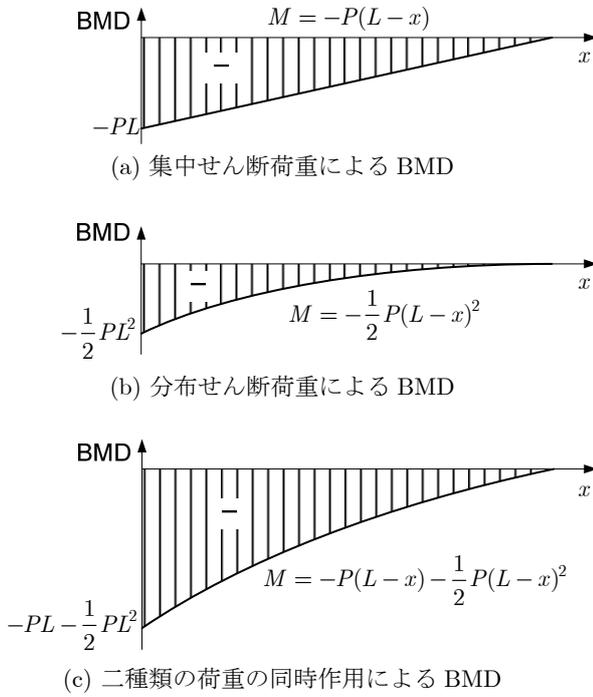


図 1.8.2 解の重ね合わせ

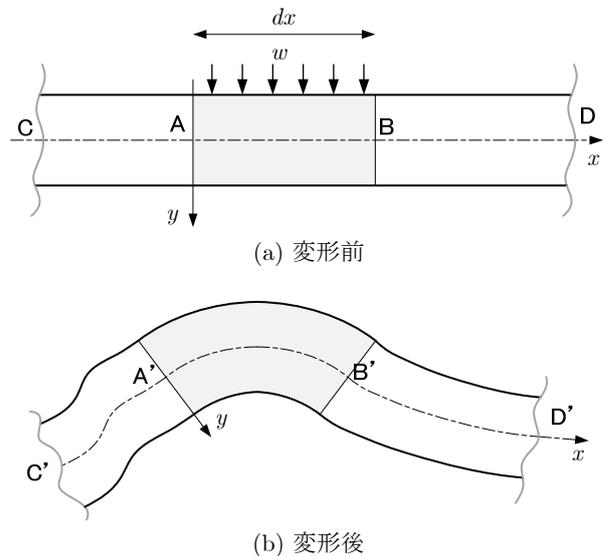


図 1.10.1 変形前と後の座標系

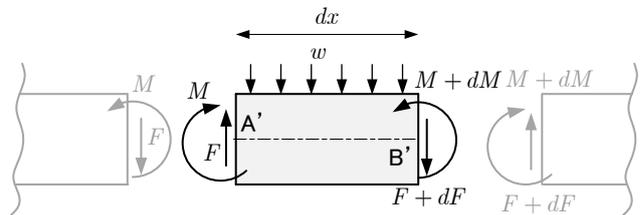


図 1.10.2 力の釣り合いにおける変形形状の近似

1.9. 線形解析

例えば、片持ち梁の先端にせん断荷重 P を作用させた場合のたわみと、荷重を 4 倍にした場合のたわみとの関係はどうなっているだろうか？

既に想像が付いていると思うが、荷重が 4 倍になればたわみも 4 倍になる。これも、前節と同様、材料力学が線形解析を仮定しているからである。したがって、ある荷重（例えば 1N）でのたわみを計算しておけば、荷重が違う場合のたわみも簡単に出すことができる。前節で学んだ、解の重ね合わせも合わせると、いろいろなパターンの荷重（集中荷重であったり、分布荷重であったり、荷重の作用する場所がいくつかのパターンであったり）に対して解を求めることが容易にできる。実際、航空機や宇宙機的设计では、設計段階で、荷重をいろいろ変えた場合の結果を比較したくなるが、一回の解析に時間がかかるので、ある単位荷重の場合について、想定されるパターンで計算しておき、それらを何倍かしたり組み合わせたりすることで、いろいろなパターンの荷重に対する解析結果を求めて比較し、適切な設計を行うことが行われる。

1.10. 変形後の形状と力の釣り合い

図 1.10.1(a)のように、変形前に真っ直ぐだった梁の微小部分 AB があり、梁の中心線に沿って x 軸、それに垂直に y 軸をとったとする。いま、変形後は図 1.10.1(b)のようになったとすると、 x 軸も y 軸も傾く。したがって、せん断力の方向も当然、傾く。

しかし、材料力学では、力の釣り合いの方向を考える場合には、変形を無視し、図 1.10.1(c)のように、変形前の向きにせん断力を考える。これはあくまでも近似であるが、変形が微小で、梁の曲がり具合が微小であれば、この近似はそれほど誤差を生まない。もちろん、変形が大きい場合には、こういった近似をしないで解かないと妥当な解を得られない。したがって、「変形が微小かどうか？」を常に考えておく必要がある。

なお、図 1.10.2 から、力の釣り合いおよび点 A' まわりのモーメントの釣り合いは、

$$\begin{aligned} -F + wdx + F + dF &= 0 \\ -M - \frac{dx}{2} \times wdx + M + dM - dx \times (F + dF) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

となり、これを解くと、

$$\frac{dF}{dx} = -w \quad (1.10.2)$$

$$\frac{dM}{dx} = F + dF + \frac{wdx}{2} \quad (1.10.3)$$

式(1.10.2)がせん断力を求めるための微分方程式である。ただし、材料力学では、この式は使わず、図形から SFD を求めることが多いだろう。ただし、分布荷重 w が x の複雑な関数の場合、この微分方程式を解かないと SFD 自体も求まらない。また、式(1.10.3)においては、 dx は微小 ($dx \rightarrow 0$) であるから、 dF も微小 ($dF \rightarrow 0$) であり、

$$\frac{dM}{dx} = F \quad (1.10.4)$$

を得る。この式は使い甲斐のある式でありここで示した導出法も含めて覚えておいてほしい。

ちなみに、図 1.10.1 では、座標軸は物体に付着していて、物体が変形すれば、それに合わせて座標軸も変形するとした。このように物体そのものを追って系を記述することを Lagrange (ラグランジュ) 記述という。これに対して、流体力学のように、空気の分子一つ一つの動きを追うのではなく、座標系は空間に固定して、ある空間に流れてくる空気を見て、その部分で系を記述することを Euler (オイラー) 記述という。材料力学や工業力学と、流体力学との違いは、こういった物体の見方の違いにある。

1.11. 小テストについて

今回の小テストを解けなかった学生は、「材料力学Ⅱ」を受講するのは時期尚早と思われる。「材料力学Ⅰ」を復習し、来年度に「材料力学Ⅱ」を受講することを勧める。

なお、BMD や SFD を求める一般的な手順は、

- ① 支持点の反力を求める。
- ② 曲げモーメントやせん断力を求めたい断面と支持点との間の力、およびモーメントの釣り合い式をたてる。
- ③ たてた式を解いて曲げモーメントとせん断力を求める。

であるが、片持ち梁のように自由端がある問題では、自由端と断面との間の釣り合いを考えれば、反力を求めなくても曲げモーメントやせん断力を求めることができる。そして、支持点での曲げモーメントやせん断力が求めれば、支持点でのつり合いから反力・反モーメントが求まる。

念のため、BMD と SFD の例題をいくつか示しておく。

【例題 1.1】 BMD と SFD (1)

図 1.11.1 の梁の BMD と SFD を求めなさい。

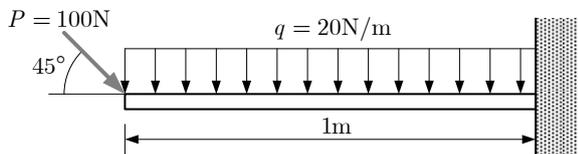


図 1.11.1 BMD と SFD の例題(1)

【例題 1.2】 BMD と SFD (2)

図 1.11.2 の梁の BMD と SFD を求めなさい。

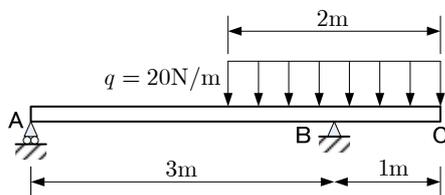


図 1.11.2 BMD と SFD の例題(2)

【例題 1.3】 BMD と SFD (3)

図 1.11.3 の片持ち梁の BMD と SFD を求めなさい。

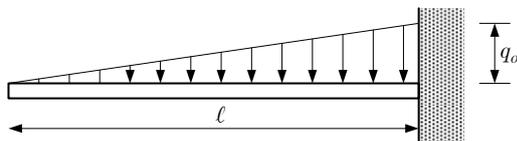


図 1.11.3 BMD と SFD の例題(3)

【例題 1.4】 BMD と SFD (4)

図 1.11.4 の両端単純支持梁の BMD と SFD を求めなさい。

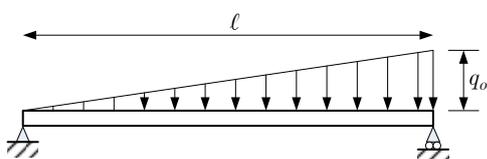


図 1.11.4 BMD と SFD の例題(4)

1.12. まとめ

今回は「材料力学Ⅰ」の復習を兼ねて、BMD と SFD の例題を解いた。また、材料力学を学んでいく上で必要となる基本的な考え方について確認した。

1.13. 次回までの宿題

- 1) 【例題 1.1】～【例題 1.4】を解きなさい(式だけでなく、図や説明が充実したレポートにしてください)。

第2章 丸棒のねじり

「材料力学Ⅱ」のメインは梁のたわみの計算法と座屈の計算法を理解することにあるが、メインの内容に入る前に、今回は丸棒のねじり (torsion) の基礎理論について解説する。丸棒のねじりに関する知識は「設計製図Ⅰ」で必要となるので、しっかり理解しておいてほしい。

2.1. ねじりによる丸棒のせん断応力分布

教科書の写真 (図 2.1.1) にある通り、棒をねじると、棒はせん断変形を起こす。

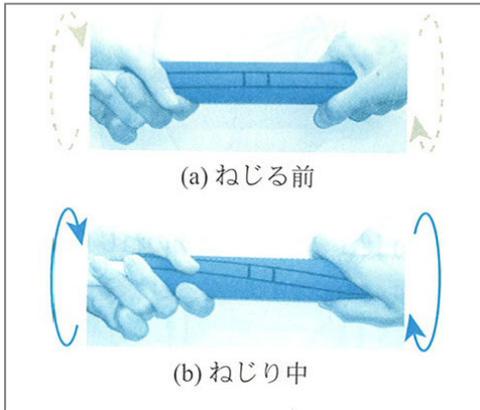


図 2.1.1 棒のねじり

このせん断変形は、棒の表面だけでなく、内部にも起こっていることは容易に想像がつくが、では、どれだけの大きさのせん断変形が起こっているのだろうか？

そもそも、せん断変形を起こしている時の「せん断歪」 γ は、図 2.1.2 のように、部材の微小部分を取り出してきたときの、変形後の角度変化 α と β を用いて次式で定義される。

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.1.1)$$

つまり、角度変化分の和がせん断歪ということになる。

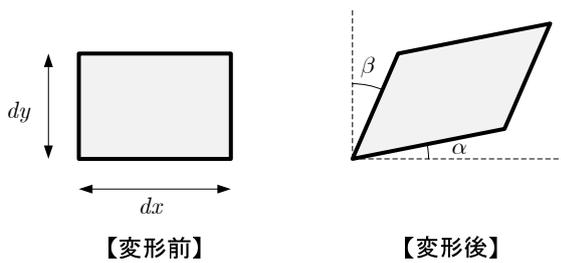


図 2.1.2 せん断歪の定義

これを丸棒のねじりに当てはめると、図 2.1.3 のようになる。すなわち、まず、棒の半径を R とし、棒の根元から距離 x の断面を考える。その断面上に点 A と、そこから弧長 dy だけ離れた点 B を考える。いま、ねじりにより、点 A は点 A' に、点 B は点 B' に変位し、ねじれ角は ϕ であったとする。次に、棒の根元からさらに距離 dx だけ離れた断面を考え、棒の長手方向に沿って、点 A の延長上に点 C を、点 B の延長上に点 D をとる。そして、ねじりにより、点 C は点 C' に、点 D は点 D' に変位し、ねじれ角は $\phi + d\phi$ であったとする。もし、棒が一樣にねじれていたとしたら、棒の長さを ℓ 、棒の先端でのねじれ角を ϕ_0 として、次式のような比例関係が成り立つことは明らかだろう。

$$\frac{\phi_0}{\ell} = \frac{\phi}{x} = \frac{\phi + d\phi}{x + dx} \quad (2.1.2)$$

すなわち、

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_0}{\ell} \quad (2.1.3)$$

また、図からわかる通り、

$$\widehat{AA'} = R\phi, \quad \widehat{CC'} = R(\phi + d\phi) \quad (2.1.4)$$

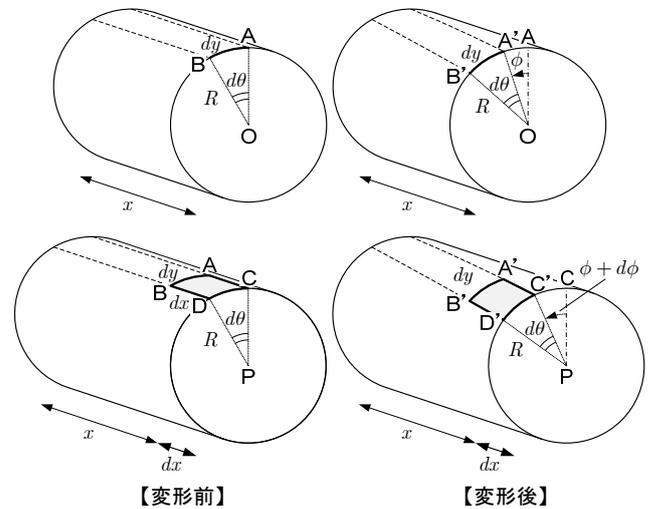


図 2.1.3 棒のねじれ角

このとき、四角形 $ABDC$ および $A'B'D'C'$ の展開図を考えると、図 2.1.4 のようになる。

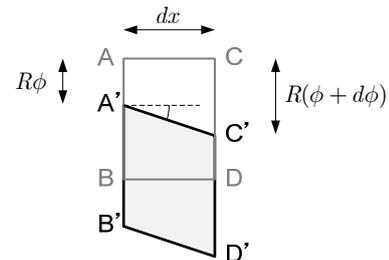


図 2.1.4 ねじりによるせん断変形

つまり、せん断歪を γ とすれば、

$$\tan \gamma = \frac{R(\phi + d\phi) - R\phi}{dx} = \frac{Rd\phi}{dx} \quad (2.1.5)$$

となる。ここで、せん断歪が微小であれば、 $\tan \gamma \approx \gamma$ であるから、

$$\gamma = \frac{Rd\phi}{dx} \quad (2.1.6)$$

となる。この式に式(2.1.3)を代入すると、

$$\gamma = \frac{R\phi_0}{\ell} \quad (2.1.7)$$

この式は、棒の表面、すなわち、半径が R のところでのせん断歪であるが、棒の内部でも同様の式が成り立ち、中心から半径 r (ただし、 $r < R$) のところでのせん断歪は次式で与えられることは明らかであろう。

$$\gamma = \frac{r\phi_o}{\ell} \quad (2.1.8)$$

一般に、せん断応力 τ はせん断歪に比例し、その比例定数 (縦弾性係数、あるいはせん断弾性係数と呼ばれる) を G とすれば、

$$\tau = G\gamma \quad (2.1.9)$$

となるので、断面内のせん断応力は次式で与えられることがわかる。

$$\tau = Gr \frac{\phi_o}{\ell} \quad (2.1.10)$$

つまり、せん断応力は半径 r に比例し、ねじり率 ϕ_o / ℓ に比例することがわかり、応力分布は図 2.1.5 のようになる。また、最大せん断応力は

$$\tau_{\max} = GR \frac{\phi_o}{\ell} \quad (2.1.11)$$

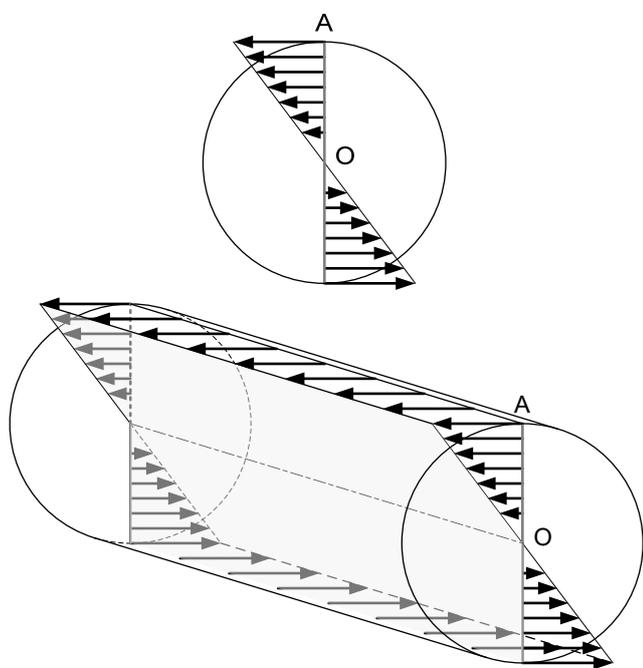


図 2.1.5 せん断応力分布

2.2. ねじりモーメント

図 2.1.5 のようにせん断応力が分布しているとき、これによるねじりモーメント (トルク) T は次式で計算することができる。

$$T = \iint_A r\tau dA \quad (2.2.1)$$

つまり、せん断応力 τ に微小部分の面積 dA を掛けたもの (微小部分に作用する力となる) に、中心からの距離 r を掛けたもの (微小部分にかかる力のモーメントとなる) を断面全体で積分する (和をとる) ことでねじりモーメントを求めることができる。式(2.2.1)に(2.1.10)を代入して計算すると、

$$T = \iint_A G \frac{\phi_o}{\ell} r^2 dA = GI_p \frac{\phi_o}{\ell} \quad (2.2.2)$$

ただし、 I_p は次式で定義され、断面極二次モーメント (polar

moment of inertia of area) と呼ばれる。

$$I_p \equiv \iint_A r^2 dA \quad (2.2.3)$$

いま、断面は円であるので、

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{2} \quad (2.2.4)$$

となる。最大せん断応力 (式(2.1.11)) を、ねじりモーメント T を用いて表すと、

$$\tau_{\max} = \frac{R}{I_p} T = \frac{2}{\pi R^3} T \quad (2.2.5)$$

丸棒の直径を d とすれば、

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} T \quad (2.2.6)$$

この式は、トルクが与えられた場合の回転軸の設計によく用いられるので、覚えている者もいるだろう。同様に、トルクが与えられた場合のねじれ角は式(2.2.2)より、

$$\phi_o = \frac{T\ell}{GI_p} \quad (2.2.7)$$

で求めることができる。

なお、断面が中空の場合も同様に計算ができて、外径を d_o 、内径を d_i とすれば、

$$I_p = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} \quad (2.2.8)$$

$$\tau_{\max} = \frac{d_o}{2I_p} T = \frac{16d_o}{\pi(d_o^4 - d_i^4)} T \quad (2.2.9)$$

断面が円以外の場合には、断面内の応力分布は非常に複雑なものになる。これについては、例えば、次の教科書を参考にするとよいだろう。

小林繁夫・近藤恭平、「弾性力学」、培風館

ここでは、結果だけ記載しておく。

【楕円断面】

最大せん断応力 (長軸の径が a 、短軸の径が b として)

$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2} \quad (2.2.10)$$

ねじれ角

$$\phi_o = \frac{T\ell}{GI_p} \quad (2.2.11)$$

断面極二次モーメント

$$I_p = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (2.2.12)$$

【矩形断面】

最大せん断応力 (長辺を a 、短辺を b として)

$$\tau_{\max} = \frac{\alpha T}{\beta ab^2} \quad (2.2.13)$$

ねじれ角

$$\phi_o = \frac{T\ell}{G\beta ab^3} \quad (2.2.14)$$

ただし、

$$\alpha = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \quad (2.2.15)$$

$$\beta = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \tanh \frac{(2n-1)\pi a}{2b}$$

【薄肉開断面】

厚さ b_k , 長さ a_k (ただし,) $k=1 \sim N$ の細長い帯状の断面 ($a_k \gg b_k$) が組み合わさった薄肉開断面の場合

厚さ b_i の部分の帯での最大せん断応力

$$\tau_{\max} = \frac{3b_i}{\sum_{k=1}^N a_k b_k^3} T \quad (2.2.16)$$

ねじれ角

$$\phi_o = \frac{3T\ell}{G \sum_{k=1}^N a_k b_k^3} \quad (2.2.17)$$

厚さが断面の中心線の弧長 s に沿って変化する場合には, 厚さを $t = t(s)$ として,

$$\tau_{\max} = \frac{3t}{\oint t^3 ds} T \quad (2.2.18)$$

$$\phi_o = \frac{3T\ell}{G \int_0^\ell t(s)^3 ds} \quad (2.2.19)$$

【薄肉閉断面】

厚さ t が断面の中心線の弧長 s に沿って変化するような薄肉閉断面の場合, 中心線で囲まれた部分の面積を A , 厚さの最小値を t_{\min} として,

せん断応力

$$\tau = \frac{1}{2At} T \quad (2.2.20)$$

最大せん断応力

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2At_{\min}} T \quad (2.2.21)$$

ねじれ角

$$\phi_o = \frac{T\ell}{4GA^2} \oint \frac{ds}{t(s)} \quad (2.2.22)$$

ちなみに, 直径 d_o , 厚さ t の薄肉円断面のねじれ角は, 式(2.2.22)より,

$$\phi_o = \frac{T\ell}{4G \left(\frac{\pi d_o^2}{4} \right)^2} \frac{\pi d_o}{t} = \frac{T\ell}{G} \frac{4\pi}{d_o^3 t} \quad (2.2.23)$$

であるのに対し, ほんの何か所, 切り込みを入れて開断面にしてしまうと, 式(2.2.17)より

$$\phi_o = \frac{3T\ell}{G \cdot \pi d_o t^3} = \frac{T\ell}{G} \frac{3}{\pi d_o t^3} \quad (2.2.24)$$

となつて, 式(2.2.23)と比べて非常に大きな値となる。つまり, 開断面にすると, 変形が非常に大きくなる (剛性が小さくなる)。

2.3. ねじり剛性

前節までにみてきた通り, 一般に, ねじりモーメントはねじり率に比例する。その比例係数をねじり剛性と呼び, 一般に, GJ と表現する。つまり,

$$T = GJ \frac{d\phi}{dx} \quad (2.3.1)$$

また, 一樣な棒であれば, 式(2.1.3)の通り,

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_o}{\ell} \quad (2.3.2)$$

であるので,

$$T = GJ \frac{\phi_o}{\ell} \quad (2.3.3)$$

と書いている文献も多いだろう。

実際に, 式(2.3.3)を前節までの結果と比較すると, 与えられた断面におけるねじり剛性を求めることができる。すなわち,

【円断面】

式(2.2.2)より,

$$GJ = GI_p = G \frac{\pi R^4}{2} \quad (2.3.4)$$

【円管断面】

式(2.2.8)より,

$$GJ = GI_p = G \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} \quad (2.3.5)$$

【楕円断面】

式(2.2.12)より,

$$GJ = GI_p = G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (2.3.6)$$

【矩形断面】

式(2.2.14)より, $a \geq b$ として,

$$GJ = G \frac{ab^3}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \tanh \frac{(2n-1)\pi a}{2b} \right] \quad (2.3.7)$$

【薄肉開断面】

式(2.2.17)より, $a_k \gg b_k$ として,

$$GJ = G \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N a_k b_k^3 \quad (2.3.8)$$

厚さが断面の中心線の弧長 s に沿って変化する場合には, 厚さを $t = t(s)$ として, 式(2.2.19)より,

$$GJ = G \frac{1}{3} \oint t(s)^3 ds \quad (2.3.9)$$

【薄肉閉断面】

厚さ t が断面の中心線の弧長 s に沿って変化するような薄肉閉断面の場合, 中心線で囲まれた部分の面積を A として, 式(2.2.22)より,

$$GJ = G \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad (2.3.10)$$

例えば, 航空機では, 曲げの比剛性 (EI と単位長さあたりの質量) を大きくしたいので, コの字型の断面や H 型断面, I 型断面, L 型断面といった特殊な薄肉開断面を用いること

が多いが、この場合、ねじり剛性が式(2.3.9)のように非常に小さな値となり、これが原因で様々な座屈モードが生じるので、設計ではねじりに対する対策をしっかりとっておく必要がある。

2.4. 簡単な例題

【例題 2.1】直径の設計

トルク T が作用する丸棒を、許容せん断応力が τ_0 である材料で作る場合、直径 d はいくら以上にすればよいか。ただし、安全率 2 倍で設計するものとする。

【例題 2.2】径の違う棒の連結

長さが l 、せん断弾性係数 G である、同じ材質の 2 本の棒が連結されていて、それぞれ、連結されていない側の断面は壁に固定されている。棒の直径はそれぞれ d_1 と d_2 である。いま、連結部にトルク T を作用させたとき、連結部のねじれ角 ϕ_0 を求めなさい。

【例題 2.3】径の違う棒の連結

長さが l 、せん断弾性係数 G である、同じ材質の 2 本の棒 A、B が連結されていて、A の他端は壁に固定され、B の他端は自由端となっている。いま、B の自由端にトルク T を作用させたとき、B の自由端のねじれ ϕ_B と、連結部のねじれ角 ϕ_0 を求めなさい。

2.5. まとめ

ねじりによるせん断応力分布、ならびに、ねじり角とねじりモーメント（トルク）との関係を確認した。この関係式は「設計製図 I」でも使うことになるので、よく理解しておいてほしい。

なお、現実の問題では、ねじりはワーピングなど複雑な変形を伴うが、それについては「航空機構造力学」学んでほしい。

2.6. 宿題

- 1) 【例題 2.3】を解きなさい。
- 2) 教科書の 5.1 節と 5.2 節を手書きでまとめなさい（ただ丸写しするのは×）。

第3章 梁の曲げ応力

今回は、梁のある断面に曲げモーメントが作用した場合に、その断面に生じる垂直応力、すなわち、曲げ応力について解説する。そして、垂直応力の分布から軸力や曲げモーメントを算出する手順を示し、軸力や曲げモーメントの物理的意味について考察する。

3.1. 曲率 (curvature)

詳細は3.5節で述べるが、結論として、ある断面における曲げモーメントは、梁が変形した時のその断面での曲率に比例する。そこで、この節では曲率について説明する。

曲線に沿って測ったある点 A までの弧長 (arc length) を s 、点 A での曲線の傾斜角を θ とする。ただし、図 3.1.1 のように、これまでの材料力学分野の慣習にしたがって、時計回り (z 軸の正の方向に向かって右ネジを回す向き) を正とする (曲げモーメントは反時計回りを正とするのに、角度は時計回りを正とするというのは、とてもわかりづらく、個人的には全て揃えるべきと考えるが、ここでは慣習に従うこととする)。点 A での曲率 κ は次式で定義される (つまり、曲率の単位は $1/m$)。この式の右辺の符号がマイナスなのは、曲率は反時計回りに曲がる向きを正としているためである (つまり、曲げモーメントや曲率は反時計回りを正とし、傾斜角は時計回りを正とするのが慣習になってしまっている。非常に残念である)。

$$\kappa \equiv -\frac{d\theta}{ds} \tag{3.1.1}$$

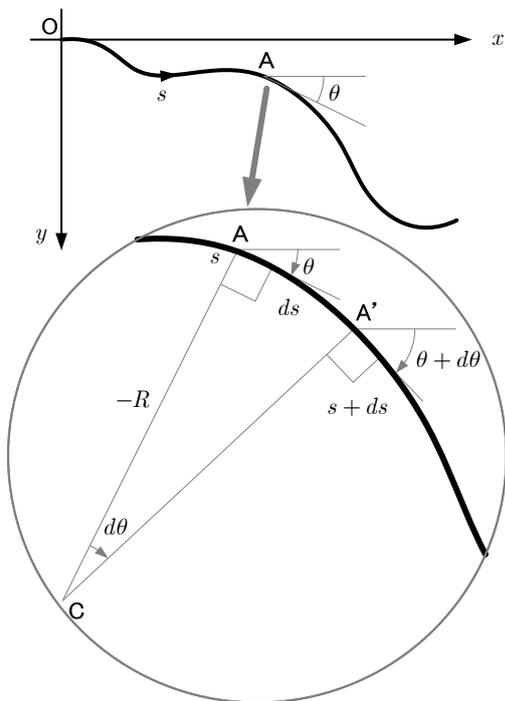


図 3.1.1 曲率

また、点 A での垂線と点 A' での垂線との交点を C とすると、 ds を限りなく小さくしていったとき、A' が A に限りなく近づいたときの線分 AC の長さを曲率半径 (radius of curvature) と呼ぶ。ただし、曲率と同様、曲率半径も、曲がり方が反時計回りのときに正とし、時計回りのときには負とするのが慣例であるため、図 3.1.1 では R は負の値である。したがって線分 AC の長さは $-R$ となる。言い換えると、厳密には $|R|$ を曲率半径と呼ぶ。この図から明らかな通り、

$$ds = -R d\theta \tag{3.1.2}$$

であるから、

$$R = -\frac{ds}{d\theta} \tag{3.1.3}$$

となり、式(3.1.1)と比較すると、

$$\kappa = \frac{1}{R} \tag{3.1.4}$$

であることがわかる。つまり、曲率とは曲率半径の逆数なのである。図 3.1.1 の円で囲った部分の絵のイメージは是非、頭に入れておいてほしい。

3.2. 歪の定義

例えば、図 3.2.1 のように、長さ L の棒が伸びて L' になったとき、「材料力学 I」では歪を次式で定義した。

$$\varepsilon \equiv \frac{L' - L}{L} \tag{3.2.1}$$

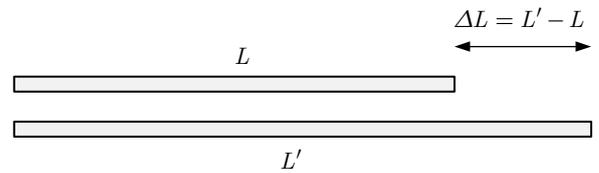


図 3.2.1 伸びと歪

しかし、実は、正確な歪の定義は以下の通りなのである。まず、変形前の棒の一端からある点 A までの長さを x とし、そこから微小部分 dx をとり、右端を B とする。変形後に A は長さ u だけ移動して A' に来たとする。また、B は長さ $u + du$ だけ移動して B' に来たとする。このとき、AB の長さを l 、A'B' の長さを l' とすれば、歪の定義は、

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} \tag{3.2.2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} l &= dx \\ l' &= (x + dx + u + du) - (x + u) \\ &= dx + du \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

であるから、

$$\varepsilon = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \tag{3.2.4}$$

となる。つまり、式(3.2.1)では棒全体がどれくらい伸びたかを考えたが、本来は、式(3.2.2)のように、ある点での微小部分がどれくらい伸びたかを考えるのである。式(3.2.1)では場所によって伸び方が違っていても、棒全体として歪を計算するので、場所による伸び方の違いはわからない。これに対して、式(3.2.2)では、その場所その場所で歪を計算するので、伸び方の違いがわかる。

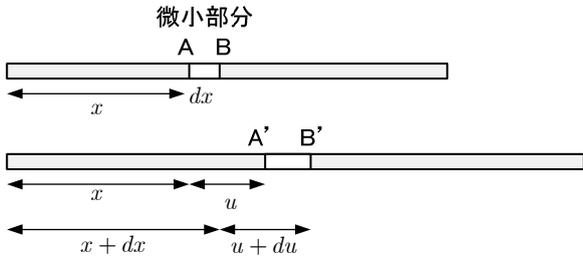


図 3.2.2 歪の定義

ちなみに、棒が一様に伸びているのであれば、式(3.2.1)で定義された歪は式(3.2.2)で定義された歪と同じ値になるので問題ない。「材料力学 I」では伸び方が一様な場合しか取り扱わなかったので、式(3.2.1)でも何も問題がなかった。しかし、実際の設計では場所によって伸び方が違うので、式(3.2.2)で考える必要がある。

なお、式(3.2.1)の右辺は「伸び率」と呼ばれる。実は、式(3.2.2)で定義された歪を棒全体で平均した値が式(3.2.1)の伸び率になることが数学的に証明できる。

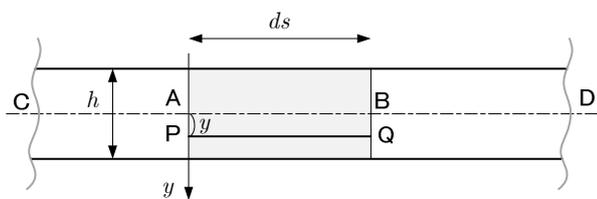
【例題 3.1】重力下での棒の伸び

天井から吊るされた、長さ l 、断面積 A 、ヤング率 E 、密度 ρ の棒がある。自重により棒はどれだけ伸びるか。ただし、重力加速度を g とする。

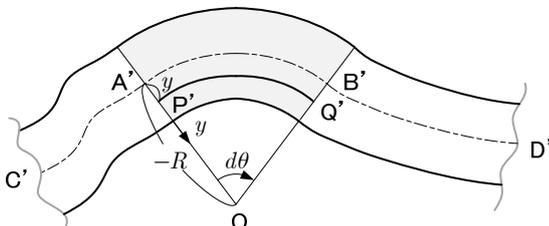
3.3. 純曲げによる垂直歪

図 3.3.1(a)のようにまっすぐだった梁のある長さ ds の微小部分 AB が、変形後、(b)のように曲率半径 R (反時計回りを正)、角度 $d\theta$ (時計回りを正) を持った円弧 A'B' になったとする。ただし、これらの図で直線 CD や曲線 C'D' は断面の図心を通るものとし、この線 (中心線) は伸び縮みしていないものとする。つまり、

$$-Rd\theta = ds \quad (3.3.1)$$



(a) 変形前



(b) 変形後

図 3.3.1 純曲げによる歪

このとき、図の(a)のように微小部分の中心線から断面方向に長さ y だけ離れた線分 PQ を考える。この PQ は、変形後は(b)のような円弧となるはずである (梁理論では、梁の厚さ方向は一切伸び縮みしないと仮定している)。すると、点 P (微小部分 PQ 間) での垂直歪は

$$\epsilon = \frac{\widehat{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{(-R - y)d\theta - ds}{ds} \quad (3.3.2)$$

ここで、中心線 AB は伸び縮みしていないと仮定している、すなわち、式(3.3.1)が成り立つので、これを式(3.3.2)に代入すると、次式を得る。

$$\epsilon = -\frac{yd\theta}{ds} = -\left(\frac{ds}{d\theta}\right) \quad (3.3.3)$$

式(3.3.1)からもわかる通り、 $ds/d\theta$ は曲率半径 $-R$ そのものであるから、結局、

$$\epsilon = \frac{y}{R} \quad (3.3.4)$$

となることがわかる。この式から次のことがわかる。

- ① 曲率半径が小さいほど歪 (歪の絶対値) は大きくなる
- ② 歪は y に比例し、 y が正では引張縮になり、負なら圧縮になる (ただし、 R が正の場合。図 3.3.1(b) は曲がり方が逆で、 R が負なので図 3.3.1(b) の場合であれば、 y が正だと歪は圧縮に、 y が負だと歪は引張になる)。
- ③ 梁の中心線から遠ざかる、すなわち、表面に近くなるほど歪 (の絶対値) は大きくなる。

3.4. 純曲げによる垂直応力

梁の材料のヤング率を E とすれば、応力-歪関係 (構成則 (constitutive relation)、あるいは、構成方程式 (constitutive equation) と呼ばれる) は

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.4.1)$$

式(3.3.4)や(3.1.4)を代入すると、応力は y の関数として次式で与えられる。

$$\sigma = \frac{E}{R}y = E\kappa y \quad (3.4.2)$$

したがって、断面 A' での応力分布は図 3.4.1 のようになる。

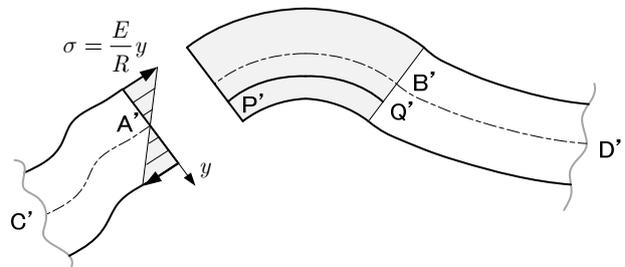


図 3.4.1 純曲げによる曲げ応力分布

3.5. 純曲げによる軸力と曲げモーメント

応力に、その応力が作用している部分の面積を掛けると、その部分に作用している力になるわけであるが (応力 × 面積 = 力)、これを式(3.4.2) (図 3.4.1) の応力に当てはめると、軸力 (合応力) は次式のように書ける。

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA \quad (3.5.1)$$

ここで、 A は断面の面積を表している。ここで、

$$I_1 \equiv \int_A y dA \quad (3.5.2)$$

は断面一次モーメント (geometrical moment of area) と呼ばれ、 y の原点が図心であれば 0 となる。したがって、 $N = 0$ 、すなわち、軸力は 0 となる。また、点 A' 回りの力のモーメント (= 曲げモーメント) は、

$$M = \int_A y \sigma dA \quad (3.5.3)$$

で表される。これは、微小面積に作用する力（＝応力×微小面積）が σdA で、その力による点 A 回りの力のモーメント（＝距離 $y \times$ 力 σdA ）を断面全体で積分する（＝和を取る）という意味である。この式に式(3.4.2)を代入すれば、

$$M = \int_A y \sigma dA = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA \quad (3.5.4)$$

ここで、

$$I = \int_A y^2 dA \quad (3.5.5)$$

は断面二次モーメント（moment of inertia of area）であり、これを式(3.5.3)に代入すると、

$$M = \frac{EI}{R} \quad (3.5.6)$$

式(3.1.4)も合わせて式(3.5.3)に代入すると、

$$M = EI\kappa \quad (3.5.7)$$

この式からわかる通り、同じ曲率で曲げるのに、 EI が大きい梁ほど大きな曲げモーメントを作用させる必要がある。それゆえ、 EI は曲げ剛性（bending rigidity）と呼ばれる。

なお、ここまでは、「曲率が κ の場合にどんな応力になって、曲げモーメントがどうなるか」という問題を考えてきたが、逆に、「曲げモーメントが M の場合に、曲率はどうなって、応力分布はどうか？」という問いには、式(3.5.7)や(3.4.2)を用いて答えることができ、以下ようになる。

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (3.5.8)$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (3.5.9)$$

特に、式(3.5.9)は「曲げモーメントにより発生する応力」を意味するので、「**曲げ応力**」（bending stress）と呼ばれる。

3.6. 純曲げ

これまで、「純曲げ」という言葉を特に定義せずに用いていたが、純曲げとは、せん断力や軸力が作用せず、曲げモーメントのみが作用する変形状態を指し、その応力状態はまさに式(3.5.9)によって表される。

3.7. 中立面

これまで見てきた通り、純曲げを受けると、梁の一方の側面は引っ張られ、他方は圧縮される。ということは、その間に伸び縮みしない面があるはずである。実際、3.5 節でみた通り、図心を通る面（ $y = 0$ の面）は伸び縮みしない。この面を「**中立面**」（neutral surface）と呼ぶ。

この講義では z 軸回りの曲げのみを考えるが、実際の梁では y 軸回りの曲げも考えることができ、この場合にも中立面が存在する。そして、これら二つの中立面の交線「**中立軸**」（neutral axis of the section）と呼ぶ。つまり、中立軸は断面の図心を梁に沿ってつなげていった軸である。

ちなみに、図心の求め方を確認しておく。まず、適当に座標軸をとる（図 3.7.1 のように y_1 軸および z_1 軸と呼ぶことにする）。いま、この座標系において、図心の y_1 座標を y_c 、 z_1 座標を z_c とすれば、図心の定義より、

$$\int_A y dA = \int_A (y_1 - y_c) dA = 0 \quad (3.7.1)$$

ここで、

$$\int_A dA = A \quad (3.7.2)$$

であるから、結局、

$$y_c = \frac{\int_A y_1 dA}{A} \quad (3.7.3)$$

同様に、

$$z_c = \frac{\int_A z_1 dA}{A} \quad (3.7.4)$$

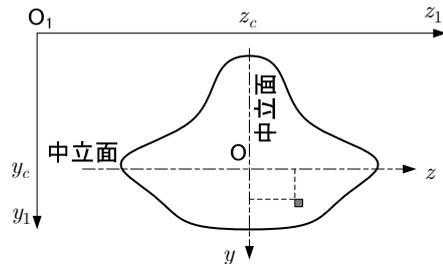


図 3.7.1 図心

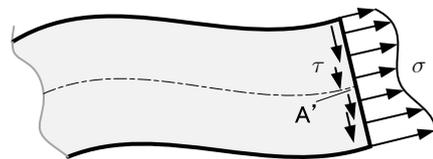
3.8. 合応力という発想

純曲げの応力状態（式(3.4.2)）はかなり特殊な状態であり、通常はもっと複雑な応力状態になる。別の言い方をすれば、曲げモーメントだけでなく、せん断力や軸力も作用すれば、もっと複雑な応力状態になる。

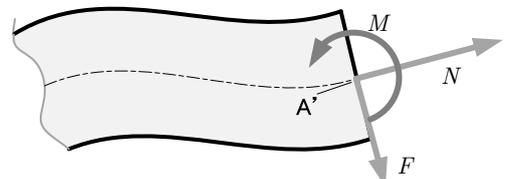
例えば、梁のある断面に、図 3.8.1(a) のように応力が分布している場合、合応力（stress resultant）、すなわち、軸力、せん断力、曲げモーメントは

$$N = \int_A \sigma dA, \quad F = \int_A \tau dA, \quad M = \int_A y \sigma dA \quad (3.8.1)$$

となり、この応力分布による変形と、図 3.8.1(b) のように点 A' に軸力 N とせん断力 F が、点 A' 回りに曲げモーメント M が作用する梁とは、梁の変形は等しい。つまり、梁の変形を計算する上で、両者は等価なものである。これは、1.6 節でも述べた通り、断面が変形しない（＝変形が微小で無視できる）と仮定しているからである。もし、断面内の変形も考慮すると、(a) と (b) では梁の変形は全く異なるものとなる。実際、消しゴムを曲げてみると、梁が曲がると同時に断面は反っていく、いわゆる鞍型（anticlastic）変形となり、断面が変形していることがよくわかる。と同時に、断面は垂直方向にも変形する（ワーピング（warping）と呼ばれる）。



(a) 断面内の応力分布



(b) 等価な合応力

図 3.8.1 合応力

3.9. 曲げ応力の最大値

梁のある断面に曲げモーメント M が作用しているときの曲げ応力は式(3.5.9)で求められる。この式から、曲げ応力が最大（引張側の最大）になるのは y が最大の時（ $y = e_1$ とする）、最小（圧縮側の最大）になるのは y が最小の時（負の最大値の時、 $y = e_2$ とする）であることがわかる。すなわち、

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{I} e_1, \quad \sigma_{\min}^- = \frac{M}{I} e_2 \quad (3.9.1)$$

なお、

$$Z_1 \equiv \frac{I}{e_1}, \quad Z_2 \equiv \frac{I}{e_2} \quad (3.9.2)$$

と定義すると、最大値および最小値は次のように書ける。

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_{\min}^- = \frac{M}{Z_2} \quad (3.9.3)$$

Z_1 および Z_2 は断面形状のみで決まる値であり、**断面係数** (section modulus) と呼ばれる。

では、断面形状と M の値が与えられているとき、曲げ応力の最大値と最小値を求めるにはどうすればよいだろうか？

そもそも、 y は断面の図心から測っているのだから、まず、図心を求めなければならない。そうすれば、 y の最大値 e_1 と最小値 e_2 はわかる。また、図心がわかれば、慣性モーメントは式(3.5.5)で求めることができる。

以下、断面二次モーメントの求め方の復習も含め、応力の最大値・最小値を求める例題を解いてみよう。これらの例題から、曲げ応力を小さくするためにはどのような断面にすればよいかという設計の感覚が少しつかめるようになるだろう。

【例題 3.2】 BMD と最大曲げ応力

長さ l 、幅が b 、厚さ h の梁がある。次の場合について、梁に作用する曲げ応力が最大になる箇所を示し、曲げ応力の最大値を求めなさい。

- (1) 片持ち梁の先端にせん断荷重 P が作用する場合
- (2) 片持ち梁に単位長さ当たり w の等分布荷重が作用する場合
- (3) 両端単純支持梁に単位長さ当たり w の等分布荷重が作用する場合

【例題 3.3】 断面二次モーメント

以下の断面の面積、断面二次モーメントを求めなさい。

- (1) 高さ a 、奥行き $2a$ の長方形
- (2) 高さ $2a$ 、奥行き a の長方形
- (3) 直径 d の円
- (4) 高さが a 、底辺（奥行方向）が a の二等辺三角形（底辺は下側）
- (5) 内径 d 、板厚 t の円筒で、 $d = 7t$
- (6) 板厚 t 、高さ $(H + 2t)$ 、奥行方向 b の I 型で、 $b = 10t$ 、 $H = 30t$
- (7) (6) の I 型の棒を横に倒した（90°回転した）もの
- (8) 縦材の板厚 $2t$ 、横材の板厚 t 、高さ $(H + 2t)$ 、奥行方向 b の I 型で、 $b = 6.5t$ 、 $H = 6t$
- (9) (8) の I 型の棒を横に倒した（90°回転した）もの

【例題 3.4】 最大曲げ応力

長さ 50cm のアルミ合金でできた片持ち梁の先端に 1kg のおもりを吊り下げた。BMD を求めなさい。また、断面積が 50mm^2 で、形状が【例題 3.3】の(1)~(9)の場合について、それぞれ曲げ応力の最大値を求めなさい。ただし、梁の自重は無視してよい。

ちなみに、上記の断面は、断面積が同じなので、梁の質量は全て等しい。同じ質量・長さで、どの断面形状が最も曲げ応力を小さくできるか、考えてみてほしい。

3.10. まとめ

曲率の定義を確認し、曲げ応力の理論式を導いた。また、それに付随して、断面二次モーメントや断面係数の定義を確認した。そして、曲げ応力の特徴や、曲げモーメントと曲げ応力との関係について考察した。最後に、断面形状と曲げ応力の最大値との関係について例題を交えて考察した。

3.11. 宿題

- 1) 【例題 3.3】と【例題 3.4】を解きなさい。
- 2) 教科書の 5.4 節を手書きでまとめなさい（ただ丸写しするのは×）。

第4章 梁の曲げによるたわみの算出(1)

今回から「材料力学Ⅱ」のメインとなる、はりのたわみ (deflection) の算出法の講義である。はりのたわみの算出法には様々なものがあるが、今回は、最も基本的で、かつ、あらゆる問題に対応できる、微分方程式を解いて算出する方法について解説する。

4.1. 梁の弾性曲線と曲率との関係

いま、変形後の梁の中立軸が、 $y = f(x)$ で表される曲線 (たわみ曲線、あるいは弾性曲線と呼ばれる) になったとしよう。この章は、このたわみ曲線を求めるのが目的であるが、そのためには、たわみ曲線と曲げモーメントとの関係が必要となる。では、両者はどのような関係にあるだろうか？

3.5節で、曲げモーメント M は曲率 κ に比例し、式(3.5.7) で与えられることを述べた。

$$M = EI\kappa \quad (3.5.7)$$

曲率は、たわみ曲線がわかれば求められるはずであるので、求められれば、上式を用いて曲げモーメントが求められる。そこで、この節ではたわみ曲線と曲率との関係を求める。

変形後の梁の微小長さを ds 、たわみ曲線の傾斜角 (たわみ角, angle of deflection と呼ばれる) を θ とすると、曲率は式(3.1.1)で定義されることを 3.1節で述べた。

$$\kappa \equiv -\frac{d\theta}{ds} \quad (3.1.1)$$

いま、たわみ曲線と ds 、 θ との関係は、それぞれ、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (4.1.1)$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (4.1.2)$$

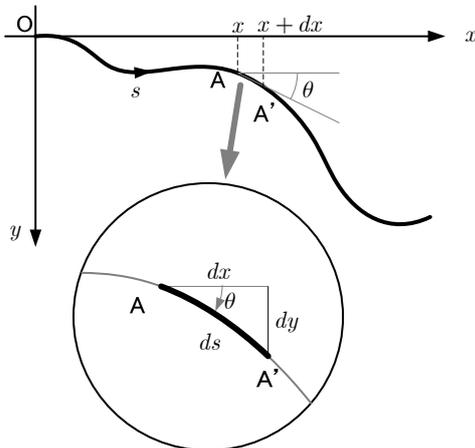


図 4.1.1 たわみ曲線微小部分とたわみ角

ここで、式(4.1.1)より、

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} \quad (4.1.3)$$

となるので、曲率は

$$\kappa = -\frac{d\theta}{dx\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{d\theta}{dx} \quad (4.1.4)$$

となる。ここで、式(4.1.2)を x で微分すると、

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} = y'' \quad (4.1.5)$$

となる。つまり、

$$\frac{d\theta}{dx} = y'' \cos^2 \theta = y'' \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = y'' \frac{1}{1+y'^2} \quad (4.1.6)$$

ので、結局、曲率とたわみ曲線との関係は次式のようになる。

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} y'' \frac{1}{1+y'^2} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (4.1.7)$$

いま、**梁の変形が微小であると仮定すると**、 $y' \approx 0$ とみなすことができ、

$$\kappa \approx -y'' \quad (4.1.8)$$

つまりは、

$$M = -EIy'' \quad (4.1.9)$$

あるいは、

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.1.10)$$

式(4.1.10)は、BMD が求められれば、たわみ曲線 (y の式) が求まることを意味している。

なお、たわみ y だけでなく、たわみ角 θ も求めたい場合がある。この場合には、式(4.1.2)より、

$$\theta = y' \quad (4.1.11)$$

であるから、式(4.1.10)を積分すれば求められる。すなわち、

$$\theta = y' = \theta_0 - \int_0^x \frac{M}{EI} dx \quad (4.1.12)$$

ただし、 θ_0 は $x=0$ のときのたわみ角である。

【例題 4.1】 先端荷重による片持ち梁のたわみ

先端に集中荷重が作用する片持ち梁のたわみ曲線を求めなさい。また、先端のたわみとたわみ角をそれぞれ求めなさい。

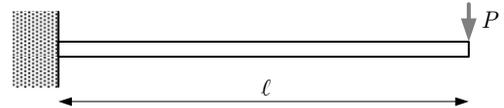


図 4.1.2 先端に荷重が作用する片持ち梁

【略解】

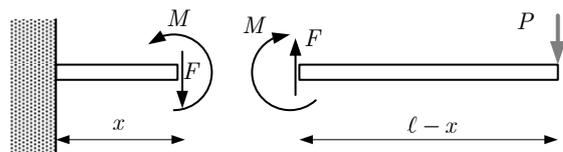


図 4.1.3 モーメントの釣り合い

まず、曲げモーメントは、図 4.1.3 より、

$$-M - P(l-x) = 0 \quad (4.1.13)$$

よって、

$$M = -P(\ell - x) \quad (4.1.14)$$

したがって、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(\ell - x) \quad (4.1.15)$$

ここで、式(4.1.15)が二階の常微分方程式なので、境界条件は二つ必要であるが、この例題では固定端で

$$x = 0: y = 0, \quad y' = 0 \quad (4.1.16)$$

という二つの条件があるので、これで解けるはずである。実際に解いてみよう。まず、式(4.1.15)を x で積分すると、

$$y' = \frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) + C_1 \quad (4.1.17)$$

ここで、式(4.1.16)より、 $x = 0$ で $y' = 0$ であるから、

$$C_1 = 0 \quad (4.1.18)$$

であり、

$$y' = \frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) \quad (4.1.19)$$

これをもう一度積分すると、

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} \ell x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) + C_2 \quad (4.1.20)$$

ここで、式(4.1.16)より、 $x = 0$ で $y = 0$ であるから、

$$C_2 = 0 \quad (4.1.21)$$

であり、

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} \ell x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \quad (4.1.22)$$

よって、先端のたわみは、

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} \ell^2 - \frac{1}{6} \ell^3 \right) = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (4.1.23)$$

また、先端のたわみ角は、式(4.1.19)より、

$$\theta = y' = \frac{P}{EI} \left(\ell - \frac{1}{2} \ell \right) = \frac{P\ell^2}{2EI} \quad (4.1.24)$$

なお、境界条件としては、式(4.1.16)だけでなく、梁の先端での条件、すなわち、

$$x = 0: M = 0, \quad F = P \quad (4.1.25)$$

もあるはずだが、実は、曲げモーメントの式(4.1.14)自体がこの境界条件を用いて得られたものであるので、この境界条件を用いても、式(4.1.15)を解くことはできない。

さて、梁の先端のたわみは式(4.1.23)で与えられることがわかった。例えば、厚さ h 、奥行き b の矩形断面梁の場合であれば、 $EI = bh^3 / 12$ であるから、

$$y = \frac{12P\ell^3}{3Ebh^3} = \frac{4P}{Eb} \left(\frac{\ell}{h} \right)^3 \quad (4.1.26)$$

となる。つまり、縦横比の三乗で効いてくるのである。長さが2倍になればたわみは8倍になってしまうし、厚さを半分にする、やはりたわみは8倍になってしまうのである。したがって、たわみを大きくしたくない梁を設計する場合には、長さや厚さ（特に、厚さ）には十分に注意する必要がある。

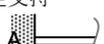
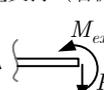
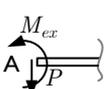
なお、式(4.1.23)は覚えておいて損はないと思う。

4.2. 境界条件

梁の端部の指示状態には様々なものがあるが、よく現れるものとして、「固定支持」、「単純支持」、そして、「荷重支持」（荷重が0の場合には「自由」）の三つであり、その境界条件は表 4.2.1 のように整理できる。

この表にある通り、境界条件は変位境界条件と荷重境界条件とに分類できる。ただし、BMDを求める段階で、既に荷重境界条件は使っているのだから、たわみ方程式(4.1.10)を解く際には変位境界条件を用いて解くことになるであろう。

表 4.2.1 梁の端部での境界条件

支持条件	変位境界条件	荷重境界条件
単純支持 	$y = 0$	$M = 0$
固定支持 	$y = 0, y' = 0$	
荷重支持 (右側) 		$\begin{cases} M = M_{ex} \\ F = P \end{cases}$
荷重支持 (左側) 		$\begin{cases} M = -M_{ex} \\ F = -P \end{cases}$

【例題 4.2】分布荷重による両端単純支持梁のたわみ

等分布荷重が作用する両端単純支持梁のたわみ曲線を求めなさい。また、中央点のたわみと両端のたわみ角をそれぞれ求めなさい。

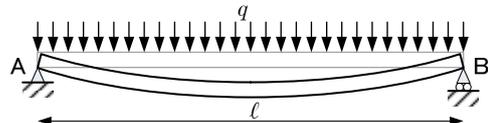


図 4.2.1 分布荷重を受ける両端単純支持梁

【例題 4.3】分布荷重による片持ち梁のたわみ

等分布荷重が作用する片持ち梁のたわみ曲線を求めなさい。また、先端のたわみとたわみ角をそれぞれ求めなさい。

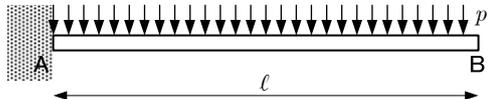


図 4.2.2 分布荷重を受ける片持ち梁

【例題 4.4】モーメントによる片持ち梁のたわみ

先端にモーメントが作用する片持ち梁のたわみ曲線を求めなさい。また、先端のたわみとたわみ角をそれぞれ求めなさい。

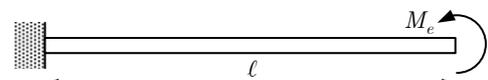


図 4.2.3 先端にモーメントを受ける片持ち梁

【例題 4.5】モーメントによる両端単純支持梁のたわみ

右端に集中モーメントが作用する両端単純支持梁のたわみ曲線を求めなさい。また、左端および右端のたわみ角をそれぞれ求めなさい。

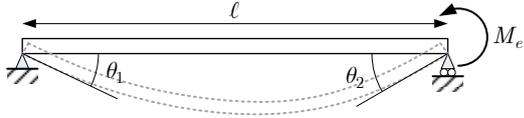


図 4.2.4 端部にモーメントを受ける両端単純支持梁

4.3. まとめ

BMD から梁のたわみを求める方法（微分方程式を解く方法）を確認した。

4.4. 宿題

【例題 4.3】を解きなさい（図や説明が充実したレポートにしてください）。

第5章 梁の曲げによるたわみの算出(2)

前回にひきつづき、たわみ方程式を積分してたわみおよびたわみ角を求める方法について解説する。

5.1. 対称性を利用する場合

次の例題を解いてみよう。

【例題 5.1】 集中荷重による両端単純支持梁のたわみ

図 5.3.2 のように、中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁のたわみ曲線を求めなさい。

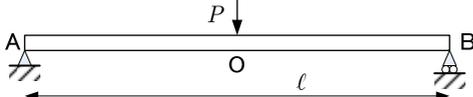


図 5.1.1 中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁

【略解 1】

この問題では、点 A を原点として左から右に x 軸をとると、曲げモーメントは次式で表される。

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \ell/2 : & M = \frac{P}{2}x \\ \ell/2 < x \leq \ell : & M = \frac{P}{2}(\ell - x) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

したがって、 $0 \leq x \leq \ell/2$ のとき、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{2EI}x \quad (5.1.2)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1 \\ y = -\frac{P}{12EI}x^3 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

ここで、 $0 \leq x \leq \ell/2$ の範囲内での境界条件は、

$$x = 0 : y = 0 \quad (5.1.4)$$

の一つだけであり、これと式(5.1.3)より、

$$C_2 = 0 \quad (5.1.5)$$

つまり、

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 + C_1x \quad (5.1.6)$$

となることがわかる。なお、境界条件としては、もう一つ、

$$x = \ell : y = 0 \quad (5.1.7)$$

があるが、式(5.1.6)は $0 \leq x \leq \ell/2$ の範囲でしか使えないので、式(5.1.7)を(5.1.6)に当てはめることはできない。

ではどうすればよいかというと、変形の対称性を利用することが考えられる。この問題では、たわみ形状は明らかに左右対称であり、この場合、

$$x = \ell/2 : y' = 0 \quad (5.1.8)$$

である。これを式(5.1.3)に当てはめると、

$$0 = -\frac{P}{4EI}(\ell/2)^2 + C_1 \quad (5.1.9)$$

つまり、

$$C_1 = \frac{P\ell^2}{16EI} \quad (5.1.10)$$

となる。したがって、式(5.1.6)より、

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P\ell^2}{16EI}x \quad (5.1.11)$$

そして、 $\ell/2 < x \leq \ell$ では、式(5.1.11)の右辺の x を $\ell - x$ に置き換えればよいので、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P}{12EI}(\ell - x)^3 + \frac{P\ell^2}{16EI}(\ell - x) \\ &= \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell}{4EI}x^2 + \frac{3P\ell^2}{16EI}x - \frac{P\ell^3}{48EI} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

【略解 2】

x 軸の原点を梁の中央点をとると、

$$\begin{cases} -\ell/2 \leq x < 0 : & M = \frac{P}{2}x + \frac{P\ell}{4} \\ 0 \leq x \leq \ell/2 : & M = -\frac{P}{2}x + \frac{P\ell}{4} \end{cases} \quad (5.1.13)$$

したがって、右半分 ($0 \leq x \leq \ell/2$ の範囲) で考えると、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{2EI}x - \frac{P\ell}{4EI} \quad (5.1.14)$$

積分すると、

$$y' = \frac{P}{4EI}x^2 - \frac{P\ell}{4EI}x + C_1 \quad (5.1.15)$$

$$y = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell}{8EI}x^2 + C_1x + C_2 \quad (5.1.16)$$

$0 \leq x \leq \ell/2$ の範囲の境界条件は、

$$\begin{cases} x = 0 & : y' = 0 \\ x = \ell/2 & : y = 0 \end{cases} \quad (5.1.17)$$

であるから、式(5.1.15)、(5.1.16)より、

$$C_1 = 0 \quad (5.1.18)$$

$$0 = \frac{P}{12EI}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \frac{P\ell}{8EI}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + C_2 \quad (5.1.19)$$

つまり、

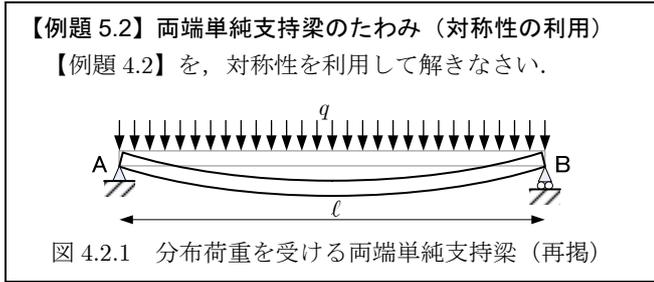
$$C_2 = \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (5.1.20)$$

したがって、たわみ曲線は、

$$y = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell}{8EI}x^2 + \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (5.1.21)$$

そして、左半分のたわみ曲線は、右半分と対称なので、この式の x に $-x$ を代入すればよく、以下のようになる。

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell}{8EI}x^2 + \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (5.1.22)$$



5.2. 梁の途中に荷重が作用する場合

図 5.2.1 のように, 梁の途中に荷重が作用する場合のたわみ曲線を考えてみよう. この場合, 曲げモーメントは

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} : & M = -P\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \\ \frac{\ell}{2} < x : & M = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

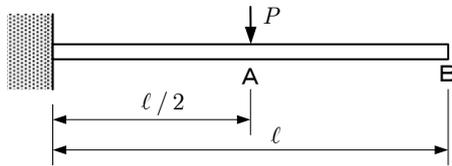


図 5.2.1 梁の途中に荷重が作用する場合

このとき, たわみ方程式は,

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} : & y'' = \frac{P}{EI}\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \\ \frac{\ell}{2} < x : & y'' = 0 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

となる. つまり, $\ell/2 < x$ のときには二階微分が 0 であるので, たわみ曲線は直線となる (図 5.2.2).

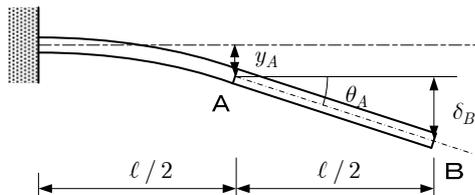


図 5.2.2 変形後の梁の形状 (図 5.2.1 の場合)

そこで, まず, $0 \leq x \leq \ell/2$ のときのたわみ曲線を求めてみよう. この場合, 式(5.2.2)より,

$$\begin{cases} y' = \frac{P}{EI}\left(\frac{\ell}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) + C_1 \\ y = \frac{P}{EI}\left(\frac{\ell}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (5.2.3)$$

境界条件は,

$$\begin{cases} x = 0 : & y' = 0 \\ x = 0 : & y = 0 \end{cases} \quad (5.2.4)$$

であるから, これを式(5.2.3)に代入して積分定数を求めると,

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (5.2.5)$$

となるので, 結局, たわみ曲線は次のようになる.

$$y = \frac{P}{EI}\left(\frac{\ell}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right), \quad y' = \frac{P}{EI}\left(\frac{\ell}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) \quad (5.2.6)$$

よって, 点 A ($x = \ell/2$) でのたわみ y_A とたわみ角 θ_A は

$$\begin{cases} y_A = \frac{P}{EI}\left[\frac{\ell}{4}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3\right] = \frac{P\ell^3}{24EI} \\ \theta_A = \frac{P}{EI}\left[\frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right] = \frac{P\ell^2}{8EI} \end{cases} \quad (5.2.7)$$

となる. したがって, 点 B でのたわみ角 θ_B は θ_A と同じく,

$$\theta_B = \frac{P\ell^2}{8EI} \quad (5.2.8)$$

となる. そして, 点 B でのたわみ y_B は

$$y_B = y_A + \theta_B \times \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{24EI} + \frac{P\ell^2}{8EI} \times \frac{\ell}{2} = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad (5.2.9)$$

【例題 5.3】 梁のたわみ (荷重が一部に作用する場合)

下図のように, 片持ち梁の根元側の半分だけに分布荷重 q が作用する場合の先端のたわみを求めなさい.

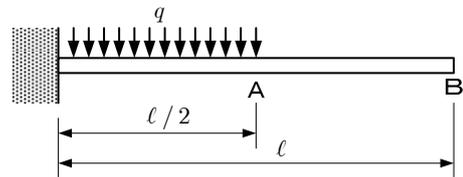


図 5.2.3 根元に分布荷重を受ける片持ち梁

5.3. その他の応用問題

国家公務員試験の過去問を解いてみよう.

【例題 5.4】 先端荷重による三角梁のたわみ

図 5.3.1 のような, 底辺 b_0 , 高さ l , 厚さ h の薄い三角柱の片持ち梁の先端に集中荷重 P が作用する際の先端のたわみを求めなさい.

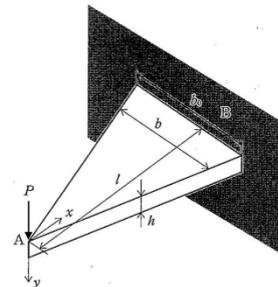


図 5.3.1 断面形状が変化する片持ち梁

【略解】

図 5.3.1 のように x 軸を梁の先端から固定端に向かう方向にとると, 曲げモーメントは

$$M = -Px \quad (5.3.1)$$

また, 断面二次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (5.3.2)$$

であるが, 図からわかる通り,

$$b = \frac{b_0}{l}x \quad (5.3.3)$$

となるので、

$$I = \frac{b_0 h^3}{12\ell} x \quad (5.3.4)$$

したがって、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Px}{b_0 h^3} = -\frac{12P\ell}{b_0 h^3} x \quad (5.3.5)$$

つまり、 y'' は定数となる。境界条件は

$$x = \ell : y = 0, y' = 0 \quad (5.3.6)$$

であるから、これらを解くと、

$$y = \frac{6P\ell}{b_0 h^3} (x - \ell)^2 \quad (5.3.7)$$

よって、先端 ($x = 0$) でのたわみは、

$$y = \frac{6P\ell^3}{b_0 h^3} \quad (5.3.8)$$

ちなみに、もし、梁が幅 b_0 の梁だったとしたら、

$$y = \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{P\ell^3}{3E b_0 h^3} = \frac{4P\ell^4}{b_0 h^3} \quad (5.3.9)$$

となるので、両者の比は3:2となる。

梁とバネを組み合わせた例を紹介しよう。

【例題 5.5】 梁とバネの連成(1)

図 5.3.2 のように、バネ定数 k のバネを長さ d だけ縮めて、片持ち梁の先端に取り付けた。このバネの復元力により、梁はたわむ。先端のたわみを求めなさい。

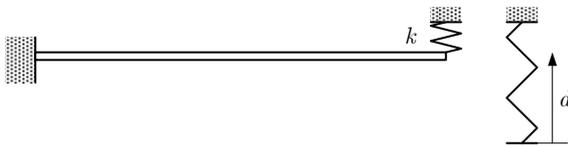


図 5.3.2 バネで押される片持ち梁

【略解】

この問題は、先端に注中荷重が作用する問題と本質的には同じである。つまり、先端のたわみを y_e とすれば、変形後は図 5.3.3 のようになるはずであるが、梁とバネとを分離し、バネが梁に与える力を P とすれば、先端に集中荷重 P を受ける梁の問題と、 $d - y_e$ だけ縮んで P の圧縮荷重を受けるバネの問題とに分けることができるのである。

ここで、梁の問題を解くと、式(4.1.23)より、

$$y_e = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (5.3.10)$$

また、バネの問題は、

$$P = k(d - y_e) \quad (5.3.11)$$

となる。式(5.3.10)と(5.3.11)は、 y_e と P を未知数とする連立方程式なので、これを解けば y_e を求めることができる。実際、式(5.3.11)を(5.3.10)に代入すると、

$$y_e = \frac{k(d - y_e)\ell^3}{3EI} \quad (5.3.12)$$

したがって、

$$y_e = \frac{k\ell^3}{1 + \frac{k\ell^3}{3EI}} d \quad (5.3.13)$$

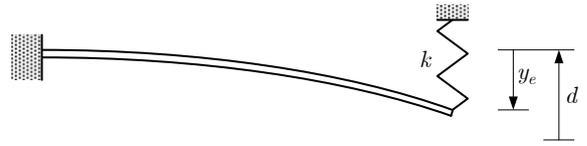


図 5.3.3 変形後の梁とバネの状態

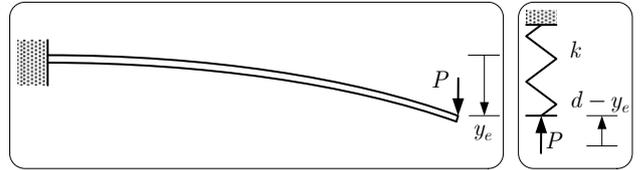


図 5.3.4 変形後の梁とバネの状態の分離

同様の例として国家公務員試験の過去問を解いてみよう。

【例題 5.6】 梁とバネの連成(2)

図 5.3.2 のように、左端 A を単純支持された梁にバネ定数 k のバネを取り付け、左端とバネ支持点 B との midpoint に荷重 P を作用させた。梁の先端 C のたわみを求めなさい。

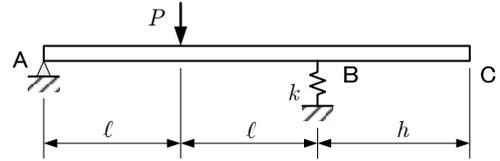


図 5.3.5 バネで押される単純支持梁

【ヒント】 点 B で梁に作用する上向きバネ力を F として、点 B のたわみ y_B と点 C のたわみ y_C を求める。バネ力とたわみとの関係は $F = ky_B$ になるはずであるので、この式から F が求まる。それを y_C の式に代入すれば、 y_C が求まる。

最後に、腕力勝負の例題を 2 つ解いてみよう。

【例題 5.7】 断面が不連続に変化する梁のたわみ

図 5.3.6 のように、曲げ剛性 EI 、長さ a の矩形断面梁と、同じ材質・長さで板厚が 2 倍の梁を連結し、先端にせん断荷重 P を作用させた。先端のたわみを求めなさい。

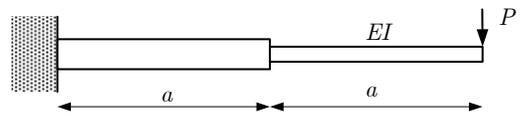


図 5.3.6 断面が不連続に変化する梁

【略解】

曲げモーメントは

$$M = -P(2a - x) \quad (5.3.14)$$

であり、板厚が 2 倍になると、曲げ剛性は 8 倍になるので、たわみ方程式は

$$y'' = \begin{cases} \frac{P(2a - x)}{8EI} & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{P(2a - x)}{EI} & (a \leq x \leq 2a) \end{cases} \quad (5.3.15)$$

境界条件は

$$x = 0 : y = 0, y' = 0 \quad (5.3.16)$$

よって、まず、 $0 \leq x \leq a$ のとき、

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{16EI}x^2 + \frac{Pa}{4EI}x \\ y = -\frac{P}{48EI}x^3 + \frac{Pa}{8EI}x^2 \end{cases} \quad (5.3.17)$$

であり、 $x = a$ でのたわみとたわみ角は

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{16EI}a^2 + \frac{Pa}{4EI}a = \frac{3Pa^2}{16EI} \\ y = -\frac{Pa^3}{48EI} + \frac{Pa}{8EI}a^2 = \frac{5Pa^3}{48EI} \end{cases} \quad (5.3.18)$$

次に、 $a \leq x \leq 2a$ では、この境界条件を考慮すると、

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{2Pa}{EI}x - \frac{21Pa^2}{16EI} \\ y = -\frac{P}{6EI}x^3 + \frac{Pa}{EI}x^2 - \frac{21Pa^2}{16EI}x + \frac{7Pa^3}{12EI} \end{cases} \quad (5.3.19)$$

したがって、先端 ($x = 2a$) のたわみは、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P}{6EI}(2a)^3 + \frac{Pa}{EI}(2a)^2 - \frac{21Pa^2}{16EI}2a + \frac{7Pa^3}{12EI} \\ &= \frac{5Pa^3}{8EI} \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

【例題 5.8】 途中に荷重が作用する梁のたわみ

下図のような両端単純支持梁のたわみ曲線の式を求めなさい。

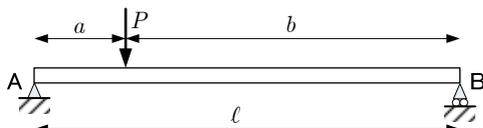


図 5.3.7 途中に荷重を受ける両端単純支持梁

【略解】

曲げモーメントは

$$M = \begin{cases} \frac{(\ell - a)P}{\ell}x & (0 \leq x \leq a) \\ -\frac{aP}{\ell}(x - \ell) & (a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (5.3.21)$$

たわみ方程式は、

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad (5.3.22)$$

であるから、左側の梁のたわみ方程式は

$$y'' = -\frac{(\ell - a)P}{\ell EI}x \quad (5.3.23)$$

境界条件は

$$x = 0 : y = 0 \quad (5.3.24)$$

よって、これを解くと、

$$y = \frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}(-x^3 + C_1x) \quad (5.3.25)$$

ただし、 C_1 は積分定数で、このあと、連結条件から求めていくことになる。連結部でのたわみとたわみ角は

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}(-a^3 + C_1a) \\ y_1' = \frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}(-3a^2 + C_1) \end{cases} \quad (5.3.26)$$

同様に、右側の梁のたわみ方程式は、

$$y'' = \frac{aP}{\ell EI}(x - \ell) \quad (5.3.27)$$

境界条件は

$$x = \ell : y = 0 \quad (5.3.28)$$

よって、これを解くと、

$$y = \frac{aP}{6\ell EI}[(x - \ell)^3 + C_2(x - \ell)] \quad (5.3.29)$$

連結部でのたわみとたわみ角は

$$y_2 = \frac{aP}{6\ell EI}[(a - \ell)^3 + C_2(a - \ell)] \quad (5.3.30)$$

$$y_2' = \frac{aP}{6\ell EI}[3(a - \ell)^2 + C_2]$$

よって、連結条件より、

$$\frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}(-a^3 + C_1a) = \frac{aP}{6\ell EI}[(a - \ell)^3 + C_2(a - \ell)] \quad (5.3.31)$$

$$\frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}(-3a^2 + C_1) = \frac{aP}{6\ell EI}[3(a - \ell)^2 + C_2] \quad (5.3.32)$$

式(5.3.31)、(5.3.32)は C_1 と C_2 に関する連立方程式なので解くことができ、

$$C_1 = 2a\ell - a^2, \quad C_2 = a^2 - \ell^2 \quad (5.3.33)$$

したがって、たわみ曲線は

$$\begin{cases} y = \frac{(\ell - a)P}{6\ell EI}[-x^3 + (2a\ell - a^2)x] & (0 \leq x \leq a) \\ y = \frac{aP}{6\ell EI}[-(\ell - x)^3 + (\ell^2 - a^2)(\ell - x)] & (a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (5.3.34)$$

この問題は、簡単そうで、なかなかの計算力を要する。実際、式(5.3.30)のように、積分定数をカッコの中に入れて、式(5.3.29)のように $(x - \ell)$ でくくるような形で解を表現したりするのは、かなりトリッキーであるし、そういった工夫をしたとしても、連立方程式(5.3.31)、(5.3.32)は上手に解かないと、結構、手間がかかる。

実は、この問題は第 6 章の「特異関数法」を用いれば、簡単に解くことができる。ただし、できれば、ここで示した、微分方程式を“腕力で解く”方法を身に付けてほしい。

【例題 5.9】 途中に荷重が作用する梁のたわみ

下図のような片持ち梁の先端のたわみを求めなさい。

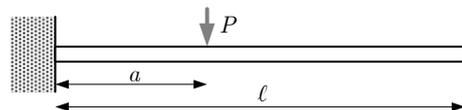


図 5.3.8 途中に荷重を受ける片持ち梁

5.4. まとめ

対称性を利用した解法や、梁の一部にのみ荷重が作用した場合のたわみの求め方などについて確認した。

5.5. 宿題

- 1) 【例題 5.6】を解きなさい。
- 2) 【例題 5.9】を解きなさい。

第6章 特異関数法によるたわみの算出

梁の領域によって曲げモーメントの式が異なる場合、たわみ方程式もそれぞれの領域によって異なることになり、計算に手間がかかる。そこで、ある特異関数を用いることで、前回までと同様な計算でたわみを算出する方法について解説する。

6.1. 複数荷重が作用する問題

次の例題を解いてみよう。

【例題 6.1】特異関数による解法(1)

先端で下向きの荷重 P を受け、中点で上向きの荷重 R を受ける片持ち梁の先端のたわみとたわみ角を求めなさい。

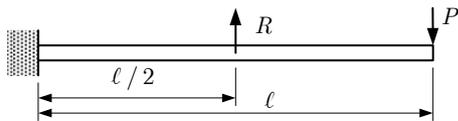


図 6.1.1 複数荷重を受ける片持ち梁

【略解 1】

この問題では $0 \leq x \leq l/2$ のときと $l/2 < x \leq l$ のときとでモーメントの式が異なる。すなわち、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq l/2 : M = R(l/2 - x) - P(l - x) \\ l/2 < x \leq l : M = -P(l - x) \end{cases} \quad (6.1.1)$$

この場合、 $0 \leq x \leq l/2$ のときと $l/2 < x \leq l$ のときとでそれぞれたわみ方程式を積分してたわみを求め、それらが $x = l/2$ で連結されるよう、積分定数を決定する。

まず、 $0 \leq x \leq l/2$ のときのたわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{R}{EI}\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{P}{EI}(l - x) \quad (6.1.2)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = -\frac{R}{EI}\left(\frac{l}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + C_1 \\ y = -\frac{R}{EI}\left(\frac{l}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.3)$$

境界条件は、

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6.1.4)$$

であるから、式(6.1.3)より、

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 0 \quad (6.1.5)$$

を得る。よって、

$$\begin{cases} y' = -\frac{R}{EI}\left(\frac{l}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) \\ y = -\frac{R}{EI}\left(\frac{l}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) \end{cases} \quad (6.1.6)$$

次に、 $l/2 < x \leq l$ でのたわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(l - x) \quad (6.1.7)$$

となるので、積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + C_3 \\ y = \frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + C_3x + C_4 \end{cases} \quad (6.1.8)$$

ここで、 $l/2 < x \leq l$ の範囲では特に境界条件はないが、式(6.1.6)と(6.1.8)とは $x = l/2$ で連結されないといけない。つまり、両者の y' の値ならびに y の値は $x = l/2$ で一致しないといけない。したがって、

$$\begin{cases} -\frac{R}{EI}\left[\frac{l}{2}\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] + \frac{P}{EI}\left[l\cdot\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] \\ = \frac{P}{EI}\left[l\cdot\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] + C_3 \\ -\frac{R}{EI}\left[\frac{l}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3\right] + \frac{P}{EI}\left[\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3\right] \\ = \frac{P}{EI}\left[\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3\right] + C_3\frac{l}{2} + C_4 \end{cases} \quad (6.1.9)$$

よって、積分定数の値は次のようになる。

$$C_3 = -\frac{Rl^2}{8EI}, \quad C_4 = \frac{Rl^3}{48EI} \quad (6.1.10)$$

そして、 $l/2 < x \leq l$ でのたわみとたわみ角は

$$\begin{cases} y = \frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{Rl^2}{8EI}x + \frac{Rl^3}{48EI} \\ y' = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{Rl^2}{8EI} \end{cases} \quad (6.1.11)$$

したがって、先端でのたわみ δ とたわみ角 θ は

$$\begin{cases} \delta = y(l) = \frac{P}{EI}\left(\frac{l}{2}l^2 - \frac{1}{6}l^3\right) - \frac{Rl^2}{8EI}l + \frac{Rl^3}{48EI} \\ = \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{5Rl^3}{48EI} \\ \theta = y'(l) = \frac{P}{EI}\left(l\cdot l - \frac{1}{2}l^2\right) - \frac{Rl^2}{8EI} \\ = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Rl^2}{8EI} \end{cases} \quad (6.1.12)$$

この問題では、 $0 \leq x \leq l/2$ のときと $l/2 < x \leq l$ のときとでモーメントの式が異なるために、たわみ方程式を 2 度解かなくてはならない。もし、荷重の数が 3 つになれば 3 度、4 つなら 4 度と、どんどん計算量が多くなる。そこで、次式で定義される特異関数 $\langle z \rangle$ を用いた解法を紹介しよう。

$$\langle z \rangle = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ z & (0 \leq z) \end{cases} \quad (6.1.13)$$

つまり、カッコの中が負の値であれば 0 となり、0 以上であればその値そのものになる関数である。この関数については、次式が成り立つ(実際に計算して確認してほしい)。

$$\langle z \rangle^n = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ z^n & (0 \leq z) \end{cases} \quad (6.1.14)$$

$$\begin{cases} \int \langle z - a \rangle^n dz = \frac{1}{n+1} \langle z - a \rangle^{n+1} + C \\ \int \langle a - z \rangle^n dz = -\frac{1}{n+1} \langle a - z \rangle^{n+1} + C \end{cases} \quad (6.1.15)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \langle z-a \rangle^n = n \langle z-a \rangle^{n-1} \\ \frac{d}{dz} \langle a-z \rangle^n = -n \langle a-z \rangle^{n-1} \end{cases} \quad (6.1.16)$$

これらを使って計算をしてみたのが次の【略解2】である。

【略解2】

関数 $\langle z \rangle$ を用いると、曲げモーメントは次のように書ける。

$$M = R \langle \ell/2 - x \rangle - P(\ell - x) \quad (6.1.17)$$

したがって、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{R}{EI} \langle \frac{\ell}{2} - x \rangle + \frac{P}{EI} (\ell - x) \quad (6.1.18)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{R}{2EI} \langle \frac{\ell}{2} - x \rangle^2 - \frac{P}{2EI} (\ell - x)^2 + C_1 \\ y = -\frac{R}{6EI} \langle \frac{\ell}{2} - x \rangle^3 + \frac{P}{6EI} (\ell - x)^2 + C_1 x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.19)$$

境界条件は

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6.1.20)$$

であるから、式(6.1.19)より、

$$\begin{cases} -\frac{R}{6EI} \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 + \frac{P}{6EI} \ell^3 + C_2 = 0 \\ \frac{R}{2EI} \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{P}{2EI} \ell^2 + C_1 = 0 \end{cases} \quad (6.1.21)$$

したがって、

$$C_1 = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI}, \quad C_2 = \frac{R\ell^3}{48EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} \quad (6.1.22)$$

となり、たわみおよびたわみ角は

$$\begin{cases} y = -\frac{R}{6EI} \langle \frac{\ell}{2} - x \rangle^3 - \frac{P}{6EI} (\ell - x)^2 \\ \quad + \left(\frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \right) x + \frac{R\ell^3}{48EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} \\ y' = \frac{R}{2EI} \langle \frac{\ell}{2} - x \rangle^2 + \frac{P}{2EI} (\ell - x)^2 + \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \end{cases} \quad (6.1.23)$$

よって、先端でのたわみ δ とたわみ角 θ は

$$\begin{aligned} \delta = y(\ell) &= -\frac{R}{6EI} \langle \frac{\ell}{2} - \ell \rangle^3 - \frac{P}{6EI} (\ell - \ell)^2 \\ &\quad + \left(\frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \right) \ell + \frac{R\ell^3}{48EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} \\ &= 0 - 0 + \left(\frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \right) \ell + \frac{R\ell^3}{48EI} - \frac{P\ell^3}{6EI} \\ &= \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{5R\ell^3}{48EI} \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

$$\begin{aligned} \theta = y'(\ell) &= \frac{R}{2EI} \langle \frac{\ell}{2} - \ell \rangle^2 + \frac{P}{2EI} (\ell - \ell)^2 + \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \\ &= \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{R\ell^2}{8EI} \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

これらは式(6.1.12)と一致する。

特異関数法のポイントは、一つの数式でモーメントを表現することである。関数 $\langle z \rangle$ を使えば必ずできるし、多くの場合、機械的に導ける。ただし、いくつかの場合にはち

よつとした工夫が必要となる。そこで、以下では関数 $\langle z \rangle$ を用いたモーメントの表現についてみてみよう。

【例題 6.2】 特異関数による解法(2)

中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁に生じる曲げモーメントの式を導きなさい (【例題 5.1】)。

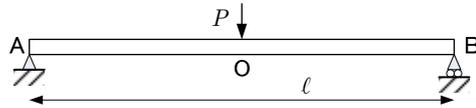


図 5.1.1 中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁 (再掲)

【略解】

図をみて、式をパッと思いつけば楽であるが、それには経験が必要だろう。そこで、ここでは、やや手間はかかるが確実に答えを出す手順を紹介しておこう。

まず、反力を計算する。この問題の場合には、点 A、点 B ともに $P/2$ となることは自明だろう。

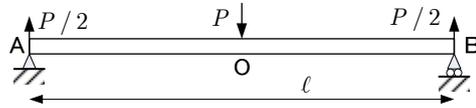


図 6.1.2 反力 (【例題 5.1】)

次に、左から、順を追って反力や外部荷重によるモーメントを計算してゆく。その際、左から距離 x のところで梁を切って、左側の部分についてのみ考える。この問題の場合、

- 1) 点 A の反力によるモーメントは $Px/2$ 。これは梁のどの場所でも作用する。
- 2) 点 O の外力 P によるモーメントは $-P(x - \ell/2)$ 。これは $\ell/2 < x$ の範囲にしか作用しない。したがって、このモーメントは $-P(x - \ell/2)$ と書ける。
- 3) 点 B での反力によるモーメントは、梁を切ったときの左側部分には効かない。

以上より、モーメントは次式のように書けることがわかる。

$$M = \frac{P}{2} x - P \left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle \quad (6.1.26)$$

【例題 6.3】 特異関数による解法(3)

先端の長さ a の部分だけ単位長さあたり q の分布荷重を受ける片持ち梁の曲げモーメントの式を導きなさい。

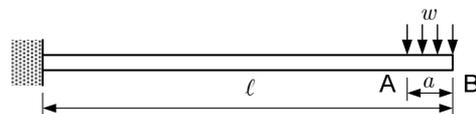


図 6.1.3 先端側に分布荷重を受ける片持ち梁

【略解】

壁からの反力・反モーメントは図 6.1.4 のようになり、それらによる曲げモーメント M_1 は、

$$M_1 = wx - wa \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \quad (6.1.27)$$

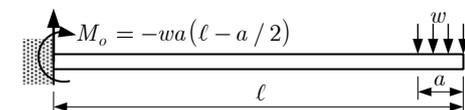


図 6.1.4 反力 (【例題 5.1】)

また、分布荷重によるモーメント M_2 は、 $\ell - a \leq x$ のときのみ生じ、その値は

$$M_2 = -w[x - (\ell - a)] \times \frac{[x - (\ell - a)]}{2} \quad (6.1.28)$$

$$= -\frac{w}{2}[x - (\ell - a)]^2$$

したがって、特殊関数を使うと、次のように書ける。

$$M_2 = -\frac{w}{2}\langle x - (\ell - a) \rangle^2 \quad (6.1.29)$$

よって、全体の曲げモーメントは

$$M = M_1 + M_2$$

$$= M_1 = wax - wa\left(\ell - \frac{a}{2}\right) - \frac{w}{2}\langle x - (\ell - a) \rangle^2 \quad (6.1.30)$$

【例題 6.4】 特異関数による解法(4)

下図の場合の曲げモーメントの式を導きなさい（【例題 5.3】）。

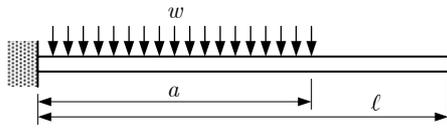


図 5.2.3 根元に分布荷重を受ける片持ち梁（再掲）

【略解】

壁からの反力・反モーメントは図 6.1.5 のようになり、それらによる曲げモーメント M_1 は、

$$M_1 = wax - \frac{wa^2}{2} \quad (6.1.31)$$

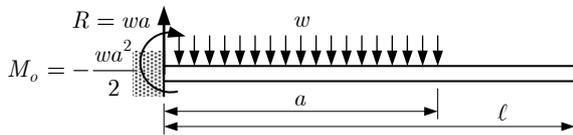


図 6.1.5 反力（【例題 6.4】）

また、分布荷重によるモーメント M_2 は、 $x \leq a$ のときには

$$M_2 = -\frac{w}{2}x^2 = -\frac{w}{2}[(a-x)^2 + 2ax - a^2] \quad (6.1.32)$$

$$= -\frac{w}{2}(a-x)^2 - wa\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

であり、 $a < x$ では

$$M_2 = -wa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (6.1.33)$$

したがって、 M_2 は次のように書けることがわかる。

$$M_2 = -\frac{w}{2}\langle a - x \rangle^2 - wa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (6.1.34)$$

よって、全体での曲げモーメントは

$$M = M_1 + M_2$$

$$= wax - \frac{wa^2}{2} - \frac{w}{2}\langle a - x \rangle^2 - wa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (6.1.35)$$

$$= -\frac{w}{2}\langle a - x \rangle^2$$

と、いたってシンプルな式になることがわかる。実は、この式は、梁を x 断面で切った時の右側部分でのモーメントの釣り合いを考えると簡単に求めることができる。

【例題 6.5】 特異関数による解法(5)

下図の場合の曲げモーメントの式を導きなさい。

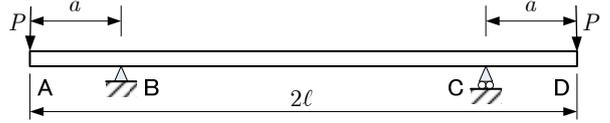


図 6.1.6 両端に荷重を受ける単純支持梁

【略解】

点 B、C の反力は P であるので、曲げモーメントは

$$M = -Px + P\langle x - a \rangle + P\langle x - (2\ell - a) \rangle \quad (6.1.36)$$

【例題 6.6】 特異関数による解法(6)

下図の場合の曲げモーメントの式を導きなさい。

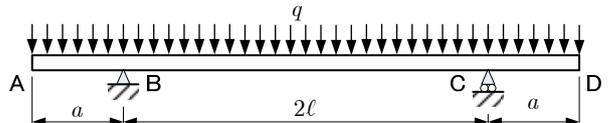


図 6.1.7 分布荷重を受ける単純支持梁

【略解】

点 B、点 C の反力はどちらも $q(\ell + a)$ であるから、

$$M = -\frac{q}{2}x^2 + q(\ell + a)\langle x - a \rangle + q(\ell + a)\langle x - (2\ell + a) \rangle \quad (6.1.37)$$

【例題 6.7】 特異関数による解法(7)

下図の場合の曲げモーメントの式を導きなさい。

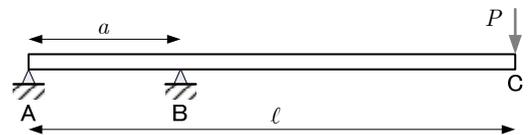


図 6.1.8 先端に荷重を受ける単純支持梁

【略解】

点 A、点 B の反力はそれぞれ、

$$R_A = -\frac{\ell - a}{a}P, \quad R_B = \frac{\ell}{a}P \quad (6.1.38)$$

であるから、曲げモーメントは

$$M = -\frac{\ell - a}{a}Px + \frac{\ell}{a}P\langle x - a \rangle \quad (6.1.39)$$

【例題 6.8】 特異関数による解法(8)

下図の場合の曲げモーメントの式を導きなさい。

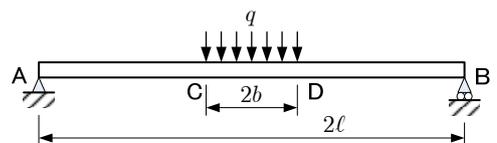


図 6.1.9 中央に分布荷重を受ける両端単純支持梁

【略解】

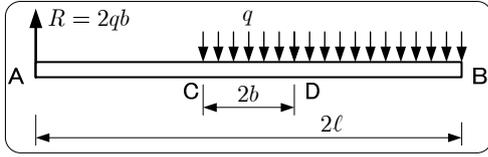
点 A での反力は qb となるので、対称性を考慮して、梁の半分だけ計算するのであれば、

$$M = qbx - \frac{q}{2}\langle x - (\ell - b) \rangle^2 \quad (6.1.40)$$

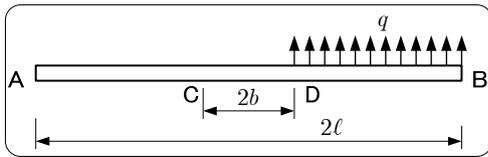
でよい。しかし、もし、対称性を考慮せず、 $0 \leq x \leq 2\ell$ の範囲で考えるとすると、どうすればよいだろうか？

実は、これは結構、難しい。やり方を知らないと、答えを導くのにかなり苦勞するだろう。

この問題は、図 6.1.10 のように 2 つの問題の和（重ね合わせ）と考えると容易に答えを導き出せる。



(a) 問題 1



(a) 問題 2

図 6.1.10 モーメントの重ね合わせ（【例題 6.8】）

このとき、二つの問題における曲げモーメントは、

$$\begin{cases} M_1 = qbx - \frac{q}{2}\langle x - (\ell - b) \rangle^2 \\ M_2 = \frac{q}{2}\langle x - (\ell + b) \rangle^2 \end{cases} \quad (6.1.41)$$

であるから、全体の曲げモーメントは

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 \\ &= qbx - \frac{q}{2}\langle x - (\ell - b) \rangle^2 + \frac{q}{2}\langle x - (\ell + b) \rangle^2 \end{aligned} \quad (6.1.42)$$

【例題 6.9】 特異関数による解法(9)

【例題 6.2】の結果を利用して、下図の両端単純支持梁のたわみ曲線を求めなさい（【例題 5.1】）。

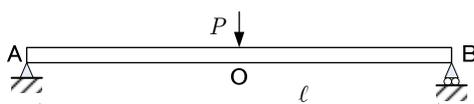


図 5.1.1 中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁（再掲）

【略解】

式(6.1.26)より、

$$M = \frac{P}{2}x - P\left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle \quad (6.1.26)$$

したがって、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{2EI}x + \frac{P}{EI}\left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle \quad (6.1.43)$$

となるので、積分すると、

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + \frac{P}{2EI}\left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle^2 + C_1 \\ y = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P}{6EI}\left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle^3 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.44)$$

境界条件は、

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0 \quad (6.1.45)$$

であるから、

$$\begin{cases} -\frac{P}{12EI}0^3 + \frac{P}{6EI}\left\langle 0 - \frac{\ell}{2} \right\rangle^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ -\frac{P}{12EI}\ell^3 + \frac{P}{6EI}\left\langle \ell - \frac{\ell}{2} \right\rangle^3 + C_1 \cdot \ell + C_2 = 0 \end{cases} \quad (6.1.46)$$

すなわち、

$$C_2 = 0, \quad -\frac{P\ell^3}{12EI} + \frac{P\ell^3}{48EI} + C_1\ell + C_2 = 0 \quad (6.1.47)$$

となって、

$$C_1 = -\frac{P\ell^2}{16EI} \quad (6.1.48)$$

を得る。したがって、たわみ曲線は

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P}{6EI}\left\langle x - \frac{\ell}{2} \right\rangle^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x \quad (6.1.49)$$

特殊関数を通常関数に書き直すと、 $0 \leq x \leq \ell/2$ のとき、

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x \quad (6.1.50)$$

であり、 $\ell/2 < x \leq \ell$ のときには、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{P}{6EI}\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^3 - \frac{P\ell^2}{16EI}x \\ &= \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{P\ell}{4EI}x^2 + \frac{P\ell^2}{16EI}x - \frac{P\ell^3}{48EI} \end{aligned} \quad (6.1.51)$$

となって、式(5.1.11)と一致する。

【例題 6.10】 特異関数による解法(10)

【例題 6.3】の結果を利用して、先端の長さ a の部分だけ単位長さあたり q の分布荷重を受ける片持ち梁のセンタのたわみとたわみ角を求めなさい。

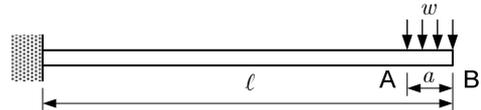


図 6.1.3 先端側に分布荷重を受ける片持ち梁（再掲）

【略解】

式(6.1.30)より、モーメントは

$$M = wax - wa\left(\ell - \frac{a}{2}\right) - \frac{w}{2}\langle x - \ell + a \rangle^2 \quad (6.1.52)$$

であるから、たわみ方程式は

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{M}{EI} \\ &= -\frac{wa}{EI}x + \frac{wa}{EI}\left(\ell - \frac{a}{2}\right) + \frac{w}{2EI}\langle x - \ell + a \rangle^2 \end{aligned} \quad (6.1.53)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = -\frac{wa}{2EI}x^2 + \frac{wa}{EI}\left(\ell - \frac{a}{2}\right)x + \frac{w}{6EI}\langle x - \ell + a \rangle^3 + C_1 \\ y = -\frac{wa}{6EI}x^3 + \frac{wa}{2EI}\left(\ell - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{w}{24EI}\langle x - \ell + a \rangle^4 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.54)$$

境界条件は、

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6.1.55)$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = -\frac{wa}{2EI} \cdot 0^2 + \frac{wa}{EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \cdot 0 + \frac{w}{6EI} \langle 0 - \ell + a \rangle^3 + C_1 \\ 0 = -\frac{wa}{6EI} \cdot 0^3 + \frac{wa}{2EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \cdot 0^2 + \frac{w}{24EI} \langle 0 - \ell + a \rangle^4 + C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases} \quad (6.1.56)$$

これより,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (6.1.57)$$

を得る. したがって, たわみ曲線は

$$\begin{cases} y' = -\frac{wa}{2EI} x^2 + \frac{wa}{EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) x + \frac{w}{6EI} \langle x - \ell + a \rangle^3 \\ y = -\frac{wa}{6EI} x^3 + \frac{wa}{2EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{w}{24EI} \langle x - \ell + a \rangle^4 \end{cases} \quad (6.1.58)$$

であり, 先端のたわみ y_B およびたわみ角 θ_B は,

$$\begin{aligned} y_B &= y(\ell) \\ &= -\frac{wa}{6EI} \ell^3 + \frac{wa}{2EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \ell^2 + \frac{w}{24EI} \langle \ell - \ell + a \rangle^4 \\ &= -\frac{wa}{6EI} \ell^3 + \frac{wa}{2EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \ell^2 + \frac{w}{24EI} a^4 \\ &= \frac{wa}{24EI} (8\ell^3 - 6\ell^2 a + a^3) \end{aligned} \quad (6.1.59)$$

$$\begin{aligned} \theta_B &= y'(\ell) \\ &= -\frac{wa}{2EI} \ell^2 + \frac{wa}{EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \ell + \frac{w}{6EI} \langle \ell - \ell + a \rangle^3 \\ &= -\frac{wa}{2EI} \ell^2 + \frac{wa}{EI} \left(\ell - \frac{a}{2} \right) \ell + \frac{w}{6EI} a^2 \\ &= \frac{wa}{6EI} (3\ell^2 - 3\ell a + a^2) \end{aligned} \quad (6.1.60)$$

【例題 6.11】 特異関数による解法(11)

【例題 6.11】の結果を用いて, 下図のような片持ち梁の先端のたわみとたわみ角を求めなさい (【例題 5.3】).

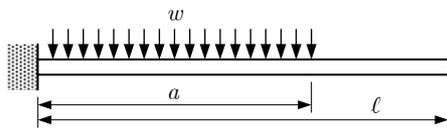


図 5.2.3 根元に分布荷重を受ける片持ち梁 (再掲)

【略解】

式(6.1.35)より, 曲げモーメントは

$$M = -\frac{w}{2} \langle a - x \rangle^2 \quad (6.1.61)$$

であるから, たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI} \langle a - x \rangle^2 \quad (6.1.62)$$

積分すると,

$$\begin{cases} y' = -\frac{w}{6EI} \langle a - x \rangle^3 + C_1 \\ y = \frac{w}{24EI} \langle a - x \rangle^4 + C_1 x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.63)$$

境界条件は,

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (6.1.64)$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = -\frac{w}{6EI} \langle a - 0 \rangle^3 + C_1 \\ 0 = \frac{w}{24EI} \langle a - 0 \rangle^4 + C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases} \quad (6.1.65)$$

これより,

$$C_1 = \frac{wa^3}{6EI}, \quad C_2 = -\frac{wa^4}{24EI} \quad (6.1.66)$$

を得る. したがって, たわみ曲線は

$$\begin{cases} y' = -\frac{w}{6EI} \langle a - x \rangle^3 + \frac{wa^3}{6EI} \\ y = \frac{w}{24EI} \langle a - x \rangle^4 + \frac{wa^3}{6EI} x - \frac{wa^4}{24EI} \end{cases} \quad (6.1.67)$$

であり, 先端のたわみ y_B およびたわみ角 θ_B は,

$$\begin{cases} y_B = y(\ell) = \frac{w}{24EI} \langle a - \ell \rangle^4 + \frac{wa^3}{6EI} \cdot \ell - \frac{wa^4}{24EI} \\ \quad = \frac{wa^3}{24EI} (4\ell - a) \\ \theta_B = y'(\ell) = -\frac{w}{6EI} \langle a - \ell \rangle^3 + \frac{wa^3}{6EI} = \frac{wa^3}{6EI} \end{cases} \quad (6.1.68)$$

【例題 6.12】 特異関数による解法(12)

【例題 6.5】の結果を用いて, 下図の場合の梁の先端および中央のたわみをそれぞれ求めなさい.

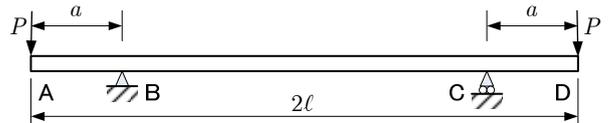


図 6.1.6 両端に荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解】

式(6.1.36)より, 曲げモーメントは

$$M = -Px + P \langle x - a \rangle + P \langle x - 2\ell + a \rangle \quad (6.1.69)$$

したがって, たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} x - \frac{P}{EI} \langle x - a \rangle - \frac{P}{EI} \langle x - 2\ell + a \rangle \quad (6.1.70)$$

積分すると,

$$\begin{cases} y' = \frac{P}{2EI} x^2 - \frac{P}{2EI} \langle x - a \rangle^2 - \frac{P}{2EI} \langle x - 2\ell + a \rangle^2 + C_1 \\ y = \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{P}{6EI} \langle x - a \rangle^3 - \frac{P}{6EI} \langle x - 2\ell + a \rangle^3 + C_1 x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.71)$$

境界条件は,

$$y(a) = 0, \quad y'(\ell) = 0 \quad (6.1.72)$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = \frac{P}{6EI} \cdot a^3 - \frac{P}{6EI} \langle a - a \rangle^3 - \frac{P}{6EI} \langle a - 2\ell + a \rangle^3 + C_1 \cdot a + C_2 \\ 0 = \frac{P}{2EI} \ell^2 - \frac{P}{2EI} \langle \ell - a \rangle^2 - \frac{P}{2EI} \langle \ell - 2\ell + a \rangle^2 + C_1 \end{cases} \quad (6.1.73)$$

これより,

$$C_1 = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa\ell}{EI}, \quad C_2 = \frac{Pa^2\ell}{EI} - \frac{2Pa^3}{3EI} \quad (6.1.74)$$

を得る. したがって, たわみ曲線は

$$y = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{P}{6EI}\langle x-a \rangle^3 - \frac{P}{6EI}\langle x-2l+a \rangle^3 + \left(\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pal}{EI}\right)x + \frac{Pa^2l}{EI} - \frac{2Pa^3}{3EI} \quad (6.1.75)$$

であり、先端のたわみ y_A および中央のたわみ y_O は、

$$\left\{ \begin{aligned} y_A &= y(0) \\ &= \frac{P}{6EI} \cdot 0^3 - \frac{P}{6EI}\langle 0-a \rangle^3 - \frac{P}{6EI}\langle 0-2l+a \rangle^3 \\ &\quad + \left(\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pal}{EI}\right)0 + \frac{Pa^2l}{EI} - \frac{2Pa^3}{3EI} \\ &= \frac{Pa^2l}{EI} - \frac{2Pa^3}{3EI} \\ y_O &= y(l) \\ &= \frac{P}{6EI}l^3 - \frac{P}{6EI}\langle l-a \rangle^3 - \frac{P}{6EI}\langle l-2l+a \rangle^3 \\ &\quad + \left(\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pal}{EI}\right)l + \frac{Pa^2l}{EI} - \frac{2Pa^3}{3EI} \\ &= -\frac{Pa}{2EI}(l^2 - 2al + a^2) = -\frac{Pa}{2EI}(l-a)^2 \end{aligned} \right. \quad (6.1.76)$$

【例題 6.13】 特異関数による解法(13)

【例題 6.6】の結果を用いて、下図の場合の先端と中央のたわみを求めなさい。

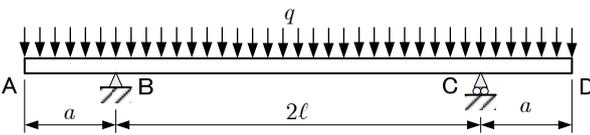


図 6.1.7 分布荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解】

式(6.1.37)より、曲げモーメントは

$$M = -\frac{q}{2}x^2 + q(l+a)\langle x-a \rangle + q(l+a)\langle x-(2l+a) \rangle \quad (6.1.77)$$

であるから、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{q(l+a)}{EI}\langle x-a \rangle - \frac{q(l+a)}{EI}\langle x-(2l+a) \rangle \quad (6.1.78)$$

積分すると、

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{q(l+a)}{2EI}\langle x-a \rangle^2 \\ &\quad - \frac{q(l+a)}{2EI}\langle x-(2l+a) \rangle^2 + C_1 \\ y &= \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle x-a \rangle^3 \\ &\quad - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle x-(2l+a) \rangle^3 + C_1x + C_2 \end{aligned} \right. \quad (6.1.79)$$

境界条件は、

$$y(a) = 0, \quad y'(l+a) = 0 \quad (6.1.80)$$

であるから、

$$0 = \frac{q}{24EI}a^4 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle a-a \rangle^3 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle a-(2l+a) \rangle^3 + C_1 \cdot a + C_2 \quad (6.1.81)$$

$$0 = \frac{q}{6EI}(l+a)^3 - \frac{q(l+a)}{2EI}\langle l+a-a \rangle^2 - \frac{q(l+a)}{2EI}\langle l+a-(2l+a) \rangle^2 + C_1 \quad (6.1.82)$$

これより、

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{ql^3}{3EI} - \frac{qa^2l}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI} \\ C_2 &= -\frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \end{aligned} \right. \quad (6.1.83)$$

を得る。したがって、たわみ曲線は

$$y = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle x-a \rangle^3 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle x-(2l+a) \rangle^3 + \left(\frac{ql^3}{3EI} - \frac{qa^2l}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI}\right)x - \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \quad (6.1.84)$$

であり、先端のたわみ y_A および中央のたわみ y_O は、

$$\left\{ \begin{aligned} y_A &= y(0) \\ &= \frac{q}{24EI} \cdot 0^4 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle 0-a \rangle^3 \\ &\quad - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle 0-(2l+a) \rangle^3 \\ &\quad + \left(\frac{ql^3}{3EI} - \frac{qa^2l}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI}\right) \cdot 0 - \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \\ &= -\frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \\ y_O &= y(l+a) \\ &= \frac{q}{24EI}(l+a)^4 - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle l+a-a \rangle^3 \\ &\quad - \frac{q(l+a)}{6EI}\langle l+a-(2l+a) \rangle^3 \\ &\quad + \left(\frac{ql^3}{3EI} - \frac{qa^2l}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI}\right)(l+a) \\ &\quad - \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{q}{24EI}(5l^4 - 6a^2l^2) \end{aligned} \right. \quad (6.1.85)$$

【例題 6.14】 特異関数による解法(14)

【例題 6.7】の結果を用いて、下図の場合の梁の先端 C のたわみを求めなさい。

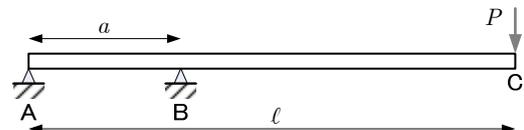


図 6.1.8 先端に荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解】

式(6.1.39)より、曲げモーメントは

$$M = -\frac{l-a}{a}Px + \frac{l}{a}P\langle x-a \rangle \quad (6.1.86)$$

であるから、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P(l-a)}{EIa}x - \frac{Pl}{a}\langle x-a \rangle \quad (6.1.87)$$

積分すると、

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{P(l-a)}{2EIa}x^2 - \frac{Pl}{2a}\langle x-a \rangle^2 + C_1 \\ y &= \frac{P(l-a)}{6EIa}x^3 - \frac{Pl}{6a}\langle x-a \rangle^3 + C_1x + C_2 \end{aligned} \right. \quad (6.1.88)$$

境界条件は,

$$y(0) = 0, \quad y(a) = 0 \quad (6.1.89)$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = \frac{P(\ell - a)}{6EIa} \cdot 0^3 - \frac{P\ell}{6a} \langle 0 - a \rangle^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 0 = \frac{P(\ell - a)}{6EIa} a^3 - \frac{P\ell}{6a} \langle a - a \rangle^3 + C_1 a + C_2 \end{cases} \quad (6.1.90)$$

これより,

$$C_1 = -\frac{Pa(\ell - a)}{6EI}, \quad C_2 = 0 \quad (6.1.91)$$

を得る. したがって, たわみ曲線は

$$y = \frac{P(\ell - a)}{6EIa} x^3 - \frac{P\ell}{6a} \langle x - a \rangle^3 - \frac{Pa(\ell - a)}{6EI} x \quad (6.1.92)$$

であり, 先端のたわみ y_A および中央のたわみ y_O は,

$$\begin{cases} y_A = y(0) \\ = \frac{q}{24EI} \cdot 0^4 - \frac{q(\ell + a)}{6EI} \langle 0 - a \rangle^3 \\ - \frac{q(\ell + a)}{6EI} \langle 0 - (2\ell + a) \rangle^3 \\ + \left(\frac{q\ell^3}{3EI} - \frac{qa^2\ell}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI} \right) \cdot 0 - \frac{qa\ell^3}{3EI} + \frac{qa^3\ell}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \\ = -\frac{qa\ell^3}{3EI} + \frac{qa^3\ell}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \\ y_O = y(\ell + a) \\ = \frac{q}{24EI} (\ell + a)^4 - \frac{q(\ell + a)}{6EI} \langle \ell + a - a \rangle^3 \\ - \frac{q(\ell + a)}{6EI} \langle \ell + a - (2\ell + a) \rangle^3 \\ + \left(\frac{q\ell^3}{3EI} - \frac{qa^2\ell}{2EI} - \frac{qa^3}{6EI} \right) (\ell + a) \\ - \frac{qa\ell^3}{3EI} + \frac{qa^3\ell}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{q}{24EI} (5\ell^4 - 6a^2\ell^2) \end{cases} \quad (6.1.93)$$

【例題 6.15】 特異関数による解法(15)

【例題 6.8】の結果を用いて, 下図の場合の中央点のたわみを求めなさい.

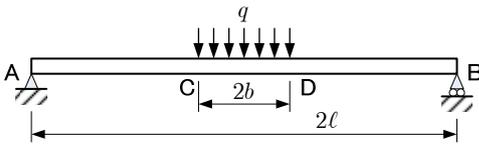


図 6.1.9 中央に分布荷重を受ける両端単純支持梁 (再掲)

【略解】

左半分だけで考えると, 式(6.1.40)より,

$$M = qbx - \frac{q}{2} \langle x - (\ell - b) \rangle^2 \quad (6.1.94)$$

であるから, たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{qb}{EI} x + \frac{q}{2EI} \langle x - \ell + b \rangle^2 \quad (6.1.95)$$

積分すると,

$$\begin{cases} y' = -\frac{qb}{2EI} x^2 + \frac{q}{6EI} \langle x - \ell + b \rangle^3 + C_1 \\ y = -\frac{qb}{6EI} x^3 + \frac{q}{24EI} \langle x - \ell + b \rangle^4 + C_1 x + C_2 \end{cases} \quad (6.1.96)$$

境界条件は,

$$y(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0 \quad (6.1.97)$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = -\frac{qb}{6EI} \cdot 0^3 + \frac{q}{24EI} \langle 0 - (\ell - b) \rangle^4 + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 0 = -\frac{qb}{2EI} \cdot \ell^2 + \frac{q}{6EI} \langle \ell - \ell + b \rangle^3 + C_1 \end{cases} \quad (6.1.98)$$

これより,

$$C_1 = \frac{qb\ell^2}{2EI} - \frac{qb^3}{6EI}, \quad C_2 = 0 \quad (6.1.99)$$

を得る. したがって, たわみ曲線は

$$y = -\frac{qb}{6EI} x^3 + \frac{q}{24EI} \langle x - \ell + b \rangle^4 + \left(\frac{qb\ell^2}{2EI} - \frac{qb^3}{6EI} \right) x \quad (6.1.100)$$

であり, 中央のたわみ y_O は,

$$\begin{aligned} y_O &= y(\ell) \\ &= -\frac{qb}{6EI} \ell^3 + \frac{q}{24EI} \langle \ell - \ell + b \rangle^4 + \left(\frac{qb\ell^2}{2EI} - \frac{qb^3}{6EI} \right) \ell \quad (6.1.101) \\ &= \frac{qb\ell^3}{3EI} + \frac{qb^4}{24EI} - \frac{qb^3\ell}{6EI} \end{aligned}$$

【例題 6.16】 特異関数による解法(16)

【例題 5.8】を特異関数法で解き, 荷重点のたわみを求めなさい.

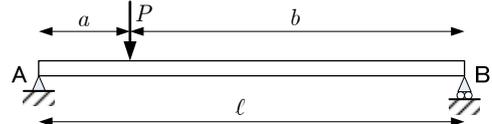


図 5.3.7 途中に荷重を受ける両端単純支持梁 (再掲)

6.2. まとめ

特異関数法によるたわみの求め方を確認した. 特異関数法をマスターすれば, あらゆる問題を比較的短時間に解くことができる. 単に問題を解くことだけが目的であれば, この解法はかなり威力があつてお勧めしたいところである. ただ, 特異関数を用いてモーメントの式を表すのにコツが要る問題もあり, そのような問題の場合には別の方法の方が早く解けることが多い.

また, 特異関数法は, あまりにも解き方が機械的過ぎて, 物理的な感覚を身に付けにくいかもしれない.

設計には, 物理的な感覚が必要となってくるので, その意味では, 第 7 章以降の重ね合わせ法をマスターすることをお勧めしたい.

6.3. 宿題

【例題 6.16】を解きなさい (式だけでなく, 図や説明が充実した, 「読む人にやさしい」レポートにしてください).

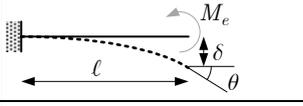
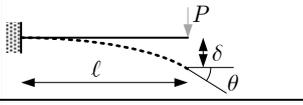
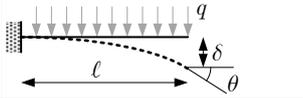
第7章 重ね合わせ法によるたわみの算出(1)

今回の講義では梁に複数の荷重が作用する場合の解を「重ね合わせ法」で求める方法を解説する。重ね合わせ法はとても有効な解法であるので、必ずマスターしてほしい。

7.1. 基本解

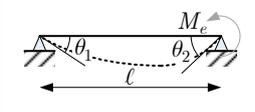
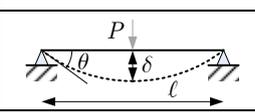
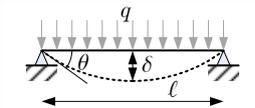
必要となるであろう基本解とは、片持ち梁に荷重を作用させたときの自由端のたわみおよびたわみ角であり、具体的には表 7.1.1 の通りである。

表 7.1.1 重ね合わせ法の基本解

梁の種類	たわみ δ	たわみ角 θ
	$-\frac{M_c l^2}{2EI}$	$-\frac{M_c l}{EI}$
	$\frac{Pl^3}{3EI}$	$\frac{Pl^2}{2EI}$
	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$

また、これに加えて、表 7.1.2 も知っておくと、効率的に解を求めることができることが多い【注：この表で、 θ_2 については反時計回りを正とした】。

表 7.1.2 重ね合わせ法の基本解(2)

梁の種類	たわみ δ	たわみ角 θ
		$\theta_1 = \frac{M_c l}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{M_c l}{3EI}$
	$\frac{Pl^3}{48EI}$	$\frac{Pl^2}{16EI}$
	$\frac{5ql^4}{384EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$

7.2. 複数荷重の組み合わせ問題

まずは、複数種類の荷重を受ける梁の変形を重ね合わせ法で求めてみよう。

【例題 7.1】重ね合わせ法(1)

図 7.2.1 のように、分布荷重 q と先端に集中荷重 P を受ける片持ち梁の先端のたわみとたわみ角を求めなさい。

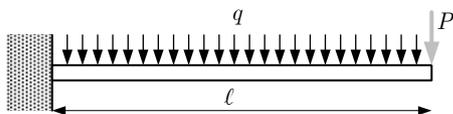


図 7.2.1 複数荷重を受ける静定梁

【略解 1】

この問題はまさに重ね合わせ法のためにある問題、といえよう。この問題は図 7.2.1 の 2 つの問題の重ね合わせである。それぞれの場合の先端のたわみおよびたわみ角は

$$\delta_1 = \frac{ql^4}{8EI}, \quad \theta_1 = \frac{ql^3}{6EI}, \quad \delta_2 = \frac{Pl^3}{3EI}, \quad \theta_2 = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (7.2.1)$$

であるから、この問題における先端のたわみとたわみ角は

$$\begin{cases} \delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI} \end{cases} \quad (7.2.2)$$

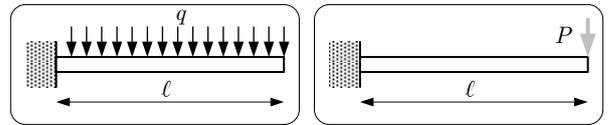


図 7.2.2 解の重ね合わせ【例題 7.1】

【略解 2】

この問題を積分法で解いてみよう。曲げモーメントは

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2 - P(l-x) \quad (7.2.3)$$

であるから、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{q}{2EI}(x-l)^2 - \frac{P}{EI}(x-l) \quad (7.2.4)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{q}{6EI}(x-l)^3 - \frac{P}{2EI}(x-l)^2 + C_1 \\ y = \frac{q}{24EI}(x-l)^4 - \frac{P}{6EI}(x-l)^3 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (7.2.5)$$

境界条件は

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (7.2.6)$$

であるから、

$$\begin{cases} 0 = \frac{q}{24EI}l^4 + \frac{P}{6EI}l^3 + C_2 \\ 0 = -\frac{q}{6EI}l^3 - \frac{P}{2EI}l^2 + C_1 \end{cases} \quad (7.2.7)$$

したがって、

$$C_1 = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI}, \quad C_2 = -\frac{ql^4}{24EI} - \frac{Pl^3}{6EI} \quad (7.2.8)$$

である。このとき、式(7.2.5)より、先端でのたわみおよびたわみ角は、

$$\begin{cases} \delta = C_1l + C_2 = \left(\frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI}\right)l - \frac{ql^4}{24EI} - \frac{Pl^3}{6EI} \\ = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \\ \theta = C_1 = \frac{ql^3}{6EI} + \frac{Pl^2}{2EI} \end{cases} \quad (7.2.9)$$

となって、式(7.2.2)と確かに一致する。

【例題 7.2】重ね合わせ法(2)

先端で下向きのせん断荷重 P を受け、中点で上向きのせん断荷重 R を受ける片持ち梁の先端のたわみとたわみ角を求めなさい (【例題 6.1】)。

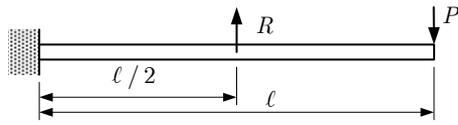


図 6.1.1 複数荷重を受ける片持ち梁 (再掲)

【略解】

【例題 6.1】では特異関数法を用いて解いたが、ここでは重ね合わせ法で解いてみよう。この問題は図 7.2.3 の 2 つの問題の解の和で表せる。

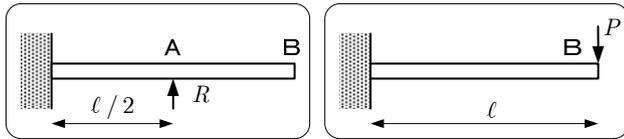


図 7.2.3 解の重ね合わせ【例題 7.2】

問題 1 では、モーメントは $0 \leq x \leq l/2$ の範囲にしか作用していないので、図 7.2.4 のように、梁は $0 \leq x \leq l/2$ までたわみ、 $l/2 \leq x$ では直線になる。

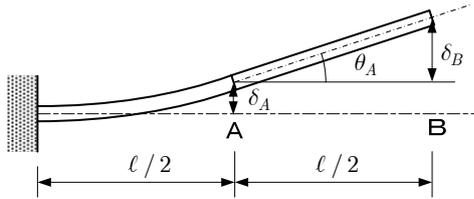


図 7.2.4 先端のたわみ【例題 7.2】

このことを踏まえると、問題 1 における先端 B のたわみは

$$y_B^1 = \delta_A + \frac{l}{2}\theta_A = -\frac{R(l/2)^3}{3EI} - \frac{l}{2} \frac{R(l/2)^2}{2EI} = -\frac{5Rl^3}{48EI} \quad (7.2.10)$$

また、問題 2 における先端のたわみは

$$y_B^2 = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (7.2.11)$$

したがって、もともとの問題における先端のたわみは、

$$y_B = y_B^1 + y_B^2 = -\frac{5Rl^3}{48EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \quad (7.2.12)$$

同様に、先端のたわみ角は、

$$\theta_B = \theta_B^1 + \theta_B^2 = -\frac{R(l/2)^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Rl^2}{8EI} \quad (7.2.13)$$

となり、確かに式(6.1.24)や(6.1.25)と一致する。

7.3. 組み合わせ問題の応用

複数種類の荷重が作用しない場合でも、モーメントの式が場所によって異なる場合、たわみ方程式を複数回解かなくてはならなくなり、解くのがやや面倒である。そこで、そのような問題の場合にも、基本解の組み合わせで解くとよいだろう。まずは次の例題を考えてみよう。

【例題 7.3】重ね合わせ法(3)

下図において、先端のたわみとたわみ角を求めなさい (【例題 6.10】)。

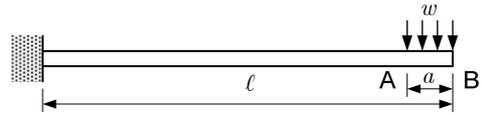


図 6.1.3 先端側に分布荷重を受ける片持ち梁 (再掲)

【略解】

この問題は図 7.2.3 の 2 つの問題の解の和で表せる。

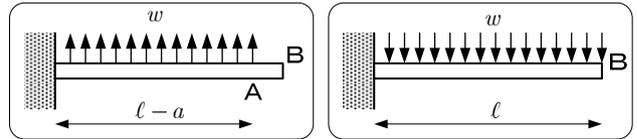


図 7.3.1 解の重ね合わせ【例題 7.3】

問題 1 では、分布荷重は $0 \leq x \leq l-a$ の範囲にしか作用していないので、図 7.3.2 のように、梁は $0 \leq x \leq l-a$ までたわみ、 $l-a \leq x$ では直線になっている。

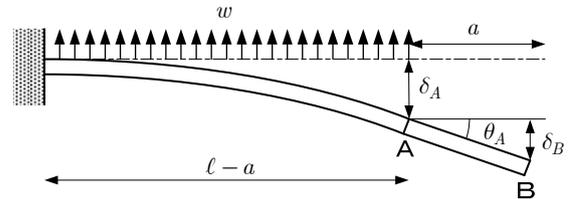


図 7.3.2 先端のたわみ【例題 7.3】

このことを踏まえると、問題 1 における先端 B のたわみは

$$\delta_1 = \delta_A + a\theta_A = -\frac{w(l-a)^4}{8EI} - a \frac{w(l-a)^3}{6EI} = -\frac{w(l-a)^3(3l+a)}{24EI} \quad (7.3.1)$$

また、問題 2 における先端のたわみは

$$\delta_2 = \frac{wl^4}{8EI} \quad (7.3.2)$$

したがって、もともとの問題における先端のたわみは、

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = -\frac{w(l-a)^3(3l+a)}{24EI} + \frac{wl^4}{8EI} = \frac{wa}{24EI}(8l^3 - 6l^2a + a^3) \quad (7.3.3)$$

同様に、先端のたわみ角は

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = -\frac{w(l-a)^3}{6EI} + \frac{wl^3}{6EI} = \frac{wa}{6EI}(3l^2 - 3la + a^2) \quad (7.3.4)$$

【例題 7.4】重ね合わせ法(4)

先端に集中せん断荷重 P を受ける長さ l 、曲げ剛性 EI の梁の中央点でのたわみを求めなさい。

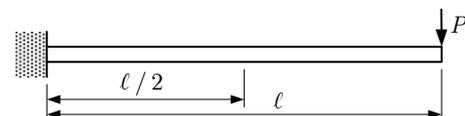


図 7.3.3 先端に荷重を受ける片持ち梁の中央のたわみ

【略解】

上述の通り，本来なら，この問題はたわみ方程式を解くことでたわみ曲線の式を求めればよい．実際，式(4.1.22)より，中央点 A でのたわみは

$$y_A = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{2} \ell \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\ell}{2} \right)^3 \right] = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad (7.3.5)$$

であるが，ここではあえて基本解の重ね合わせで解いてみる．ポイントは，「梁に作用するせん断力と曲げモーメントが与えられれば，梁の形状が決まる」ということである．

中央点でのせん断力と曲げモーメントはそれぞれ，

$$F = P, \quad M = -\frac{P\ell}{2} \quad (7.3.6)$$

であるので，固定点から点 A までの梁のたわみは図 7.3.4 の梁のたわみと同じになるはずである．

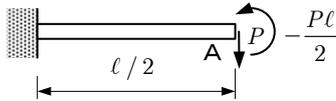


図 7.3.4 梁のたわみ【例題 7.4】

したがって，点 A でのたわみは，

$$y_A = \frac{P(\ell/2)^3}{3EI} - \frac{(-P\ell/2)(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad (7.3.7)$$

となって，式(7.3.5)と一致する．

【例題 7.5】重ね合わせ法(5)

単位長さあたり q の分布せん断荷重を受ける片持ち梁の中央点のたわみを求めなさい．

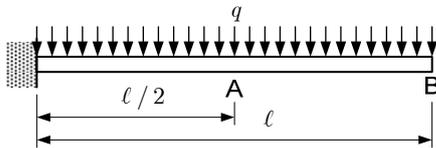


図 7.3.5 分布荷重を受ける片持ち梁の中央のたわみ

【略解】

この問題は，わざわざ重ね合わせ法を使わずとも，積分法で解くと，たわみ曲線は

$$y = \frac{q}{EI} \left(\frac{1}{24} x^4 - \frac{\ell}{6} x^3 + \frac{\ell^2}{4} x^2 \right) \quad (7.3.8)$$

となり，中央点 A でのたわみは

$$y_A = \frac{q}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{\ell}{2} \right)^4 - \frac{\ell}{6} \left(\frac{\ell}{2} \right)^3 + \frac{\ell^2}{4} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right] = \frac{17q\ell^4}{384EI} \quad (7.3.9)$$

と求まる．しかし，重ね合わせの感覚をつかむ練習だと思つて，重ね合わせ法で解いてみよう．この問題では，点 A でのせん断力と曲げモーメントはそれぞれ

$$F = \frac{q\ell}{2}, \quad M = -\frac{q\ell^2}{8} \quad (7.3.10)$$

となるので，固定点から点 A までの梁のたわみは図 7.3.6 の梁のたわみと同じになるはずである．よつて，点 A のたわみは，

$$y_A = \frac{q(\ell/2)^4}{8EI} + \frac{(q\ell/2)(\ell/2)^3}{3EI} - \frac{(-q\ell^2/8)(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{17q\ell^4}{384EI} \quad (7.3.11)$$

となって，確かに式(7.3.9)と一致する．

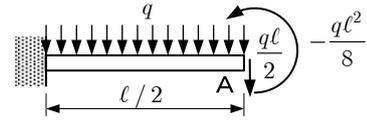


図 7.3.6 梁のたわみ【例題 7.5】

重ね合わせ法で大事なことは，与えられた問題をどう“分解”して基本問題の組み合わせで表すかである．これにはある程度の経験が必要となると思われるので，この授業や演習でしっかり経験を積んでほしい．

さて，次の問題はモーメントの式は 1 つで，たわみ方程式を解けばすぐに答えがでる問題であるが，これも，実は重ね合わせ法で解くことが可能である．

【例題 7.6】重ね合わせ法(6)

単位長さあたり q の分布せん断荷重を受ける片持ち梁において，先端から距離 a の点のたわみを求めなさい．

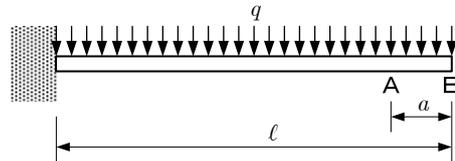


図 7.3.7 分布荷重を受ける片持ち梁の途中のたわみ

【例題 7.7】重ね合わせ法(7)

【例題 7.3】において，梁の中央点のたわみを求めなさい (【例題 6.10】) ．

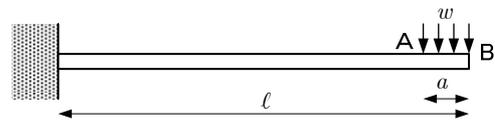


図 6.1.3 先端側に分布荷重を受ける片持ち梁 (再掲)

【例題 7.8】重ね合わせ法(8)

【例題 7.2】において，梁の中央点のたわみを求めなさい (【例題 6.1】) ．

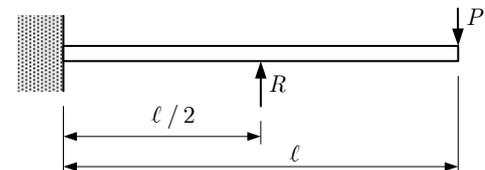


図 6.1.1 複数荷重を受ける片持ち梁 (再掲)

7.4. まとめ

重ね合わせ法を学んだ．重ね合わせ法を使うと，複数荷重が作用する複雑な問題はもちろん，単純な問題をより早く解くことも可能となるので，是非，マスターしてほしい．

7.5. 宿題

- 1) 【例題 7.7】と【例題 7.8】を解きなさい．
- 2) 【例題 7.2】において，先端のたわみが 0 になるとき， P を R の式で表しなさい．

第8章 重ね合わせ法によるたわみの算出(2)

今回の講義は重ね合わせ法の応用編である。計算が煩雑になりそうな問題も基本解をうまく組み合わせれば短時間で解を導けることを実感してほしい。

8.1. 対称性の利用

次の例題を考えてみよう。

【例題 8.1】 対称性の利用(1)

下図の梁の中央点のたわみを求めなさい(【例題 6.15】)。

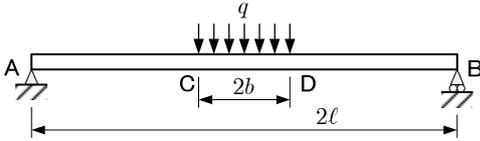


図 6.1.9 中央に分布荷重を受ける両端単純支持梁 (再掲)

【略解】

この問題は左右対称なので、右半分だけで考えてみよう。計算すればわかる通り、点 B での反力 R_B は $R_B = ql$ となるので、この問題は図 8.1.1 のように書けるが、実は、この問題は、図 8.1.2 の問題と等価である。図 8.1.2 での点 B のたわみを δ_B とすれば、図 8.1.1 での中央点 O のたわみ δ は $\delta = -\delta_B$ となる (ちなみに、明らかに δ_B は負の値をとる)。

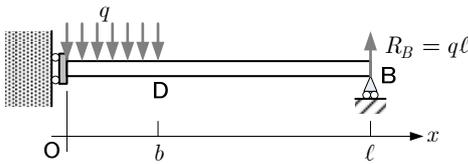


図 8.1.1 【例題 8.1】の梁

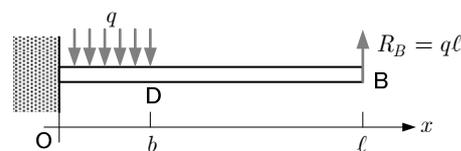


図 8.1.2 【例題 8.1】と等価な梁

そこで、図 8.1.2 における点 B のたわみを求めてみる。この問題は図 8.1.3 の 2 つの問題の重ね合わせとみることができる。

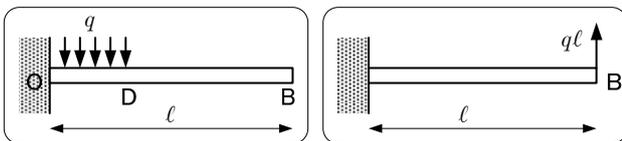


図 8.1.3 解の重ね合わせ (図 8.1.2)

問題 1 では、点 D のたわみおよびたわみ角は

$$y_D^1 = \frac{qb^4}{8EI}, \quad \theta_D^1 = \frac{qb^3}{6EI} \quad (8.1.1)$$

となるので、点 B のたわみは

$$y_B^1 = y_D^1 + \theta_D^1(\ell - b) = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{qb^3}{6EI}(\ell - b) \quad (8.1.2)$$

次に、問題 2 での点 B のたわみは

$$y_B^2 = -\frac{qb \cdot \ell^3}{3EI} = -\frac{qb\ell^3}{3EI} \quad (8.1.3)$$

したがって、図 8.1.2 における点 B のたわみ δ_B は

$$\delta_B = y_B^1 + y_B^2 = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{qb^3}{6EI}(\ell - b) - \frac{qb\ell^3}{3EI} \quad (8.1.4)$$

となり、図 8.1.1 での中央点のたわみ δ は

$$\begin{aligned} \delta = -\delta_B &= \frac{qb\ell^3}{3EI} - \frac{qb^4}{8EI} - \frac{qb^3}{6EI}(\ell - b) \\ &= \frac{qb\ell^3}{3EI} + \frac{qb^4}{24EI} - \frac{qb^3\ell}{6EI} \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

【例題 8.2】 対称性の利用(2)

下図の梁の先端および中央のたわみをそれぞれ求めなさい(【例題 6.12】)。

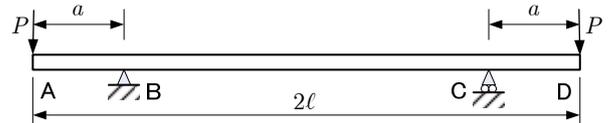


図 6.1.6 両端に荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解 1】

この問題は左右対称なので、図 8.1.4 と等価である。

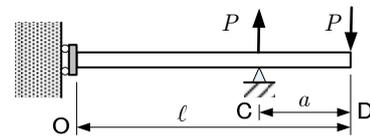


図 8.1.4 対称性の利用【例題 8.2】

曲げモーメントは、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq (\ell - a) : & M = -Pa \\ (\ell - a) < x \leq \ell : & M = -P(\ell - x) \end{cases} \quad (8.1.6)$$

したがって、 $0 \leq x \leq (\ell - a)$ でのたわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{Pa}{EI} \quad (8.1.7)$$

となり、積分すると、次式を得る。

$$\begin{cases} y' = \frac{Pa}{EI}x + C_1 \\ y = \frac{Pa}{2EI}x^2 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (8.1.8)$$

ここで、境界条件は

$$\begin{cases} x = 0 & : & y' = 0 \\ x = (\ell - a) & : & y = 0 \end{cases} \quad (8.1.9)$$

これらを式(8.1.8)に代入して積分定数を求めると、

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \quad (8.1.10)$$

中央点のたわみ δ_0 は、式(8.1.8)で $y(0)$ であるから、

$$\delta_0 = C_2 = -\frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \quad (8.1.11)$$

また、点 C のたわみ角は、式(8.1.8)で $y'(\ell - a)$ であるから、

$$\theta_C = \frac{Pa(\ell - a)}{EI} \quad (8.1.12)$$

次に、 $(\ell - a) < x \leq \ell$ については、原点を点 C にずらすと、曲げモーメントが

$$M = -P(a - x) \quad (8.1.13)$$

と書けて、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(a - x) \quad (8.1.14)$$

これを積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{P}{EI}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + C_3 \\ y = \frac{P}{EI}\left(\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + C_3x + C_4 \end{cases} \quad (8.1.15)$$

境界条件は、

$$y'(0) = \theta_C = \frac{Pa(\ell - a)}{EI}, \quad y(0) = 0 \quad (8.1.16)$$

したがって、

$$C_3 = \theta_C = \frac{Pa(\ell - a)}{EI}, \quad C_4 = 0 \quad (8.1.17)$$

よって、先端でのたわみ δ_D は、

$$\begin{aligned} \delta_D &= \frac{P}{EI}\left(\frac{a}{2} \times a^2 - \frac{1}{6}a^3\right) + \frac{Pa(\ell - a)}{EI}a \\ &= \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2(\ell - a)}{EI} = \frac{Pa^2(3\ell - 2a)}{3EI} \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

この問題では、式(8.1.6)からわかる通り、点 BC 間は曲げモーメントが一定である。つまり、この問題での中央点のたわみ δ_0 は純曲げ状態でのたわみである。いま、この問題のような実験装置をつくり、曲げ剛性 EI がわからない梁に荷重 P を与えて曲げていったとしよう。 P を変えればたわみも変わるので、その都度、 δ_0 を計測し、横軸を P 、縦軸を δ_0 として、図 8.1.5 のようなグラフを得たとしよう。このとき、データを直線近似して、傾き α を得たとしたら、式(8.1.11)より、曲げ剛性 EI が次式で求められる。これが、「4点曲げ試験法」と呼ばれる曲げ剛性の測定法の原理である。

$$EI = -\frac{Pa(\ell - a)^2}{2\delta_0} = -\frac{a(\ell - a)^2}{2\alpha} \quad (8.1.19)$$

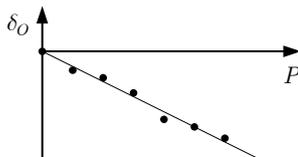


図 8.1.5 4点曲げ試験による曲げ剛性の算出

【略解 2】

この問題を重ね合わせ法で解いてみよう。図 8.1.4 は図 8.1.6 の 2 つの問題の重ね合わせと等価であり、これらの問題の重ね合わせで求めた点 C のたわみ y_C および点 D のたわみ y_D から、元の問題における梁の先端のたわみ δ_D および中

央のたわみ δ_0 を次式で求めることができる。

$$\delta_D = y_D - y_C, \quad \delta_0 = -y_C \quad (8.1.20)$$

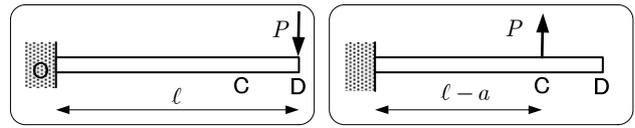


図 8.1.6 解の重ね合わせ【例題 8.2】

実際にそれぞれの問題を解いてみよう。問題 1 における点 D のたわみは次の取りである。

$$y_D^1 = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (8.1.21)$$

また、点 C のたわみを求めるには、点 C でのせん断力 F と曲げモーメント M を求めればよく、それらはそれぞれ

$$F = P, \quad M = -Pa \quad (8.1.22)$$

となるので、点 C のたわみは、

$$\begin{aligned} y_C^1 &= \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} - \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \\ &= \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} + \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.23)$$

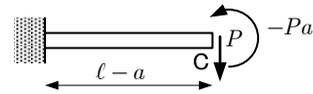


図 8.1.7 解の重ね合わせ【例題 8.2】の問題 1

次に、問題 2 における点 C のたわみとたわみ角は

$$y_C^2 = -\frac{P(\ell - a)^3}{3EI}, \quad \theta_C^2 = -\frac{P(\ell - a)^2}{2EI} \quad (8.1.24)$$

したがって、点 D でのたわみは

$$\begin{aligned} y_D^2 &= y_C^2 + \theta_C^2 \times a \\ &= -\frac{P(\ell - a)^3}{3EI} - \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.25)$$

これらを重ね合わせると、点 C および点 D でのたわみは

$$\begin{aligned} y_C &= y_C^1 + y_C^2 \\ &= \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} + \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} - \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} \\ &= \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.26)$$

$$\begin{aligned} y_D &= y_D^1 + y_D^2 \\ &= \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} - \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.27)$$

したがって、式(8.1.20)より、元の問題における中央点のたわみ δ_0 および先端のたわみ δ_D は

$$\delta_0 = -y_C = -\frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} \quad (8.1.28)$$

$$\begin{aligned} \delta_D &= y_D - y_C \\ &= \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} - \frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI} - \left[\frac{Pa(\ell - a)^2}{2EI}\right] \\ &= \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} - \frac{Pa(\ell - a)^2}{EI} = \frac{Pa^2(3\ell - 2a)}{3EI} \end{aligned} \quad (8.1.29)$$

【例題 8.3】 対称性の利用(3)

下図の場合の梁の先端および中央のたわみをそれぞれ求めなさい (【例題 6.13】)。

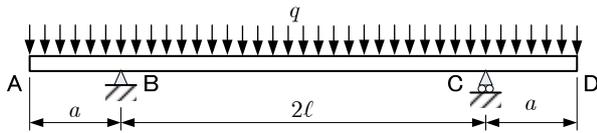


図 6.1.7 分布荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解 1】

この問題は図 8.1.8 の二つの問題の重ね合わせで解ける。

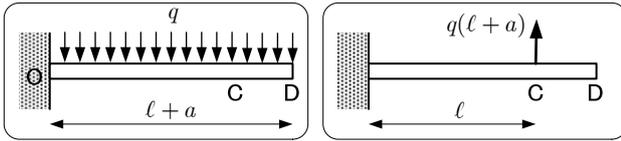


図 8.1.8 解の重ね合わせ【例題 8.3】

まず、問題 1 では、点 D のたわみは

$$y_D^1 = \frac{q(l+a)^4}{8EI} \quad (8.1.30)$$

であり、点 C でのせん断力 F と曲げモーメント M が

$$F = qa, \quad M = -\frac{qa^2}{2} \quad (8.1.31)$$

であるから、点 C のたわみ y_C^1 は次のようになる (図 8.1.9)

$$\begin{aligned} y_C^1 &= \frac{ql^4}{8EI} + \frac{qa \times l^3}{3EI} - \frac{qa^2}{2} \times \frac{l^2}{2EI} \\ &= \frac{ql^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^2l^2}{4EI} \end{aligned} \quad (8.1.32)$$

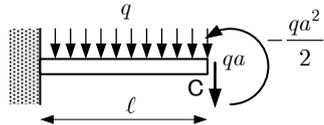


図 8.1.9 解の重ね合わせ【例題 8.3】の問題 1

次に、問題 2 における点 C のたわみ y_C^2 とたわみ角 θ_C^2 は

$$y_C^2 = -\frac{q(l+a)\ell^3}{3EI}, \quad \theta_C^2 = -\frac{q(l+a)\ell^2}{2EI} \quad (8.1.33)$$

であり、点 D のたわみは

$$y_D^2 = y_C^2 + \theta_C^2 \times a = -\frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} - \frac{q(l+a)\ell^2}{2EI} \times a \quad (8.1.34)$$

したがって、点 C および点 D のたわみは

$$y_C = y_C^1 + y_C^2 = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^2l^2}{4EI} - \frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} \quad (8.1.35)$$

$$\begin{aligned} y_D &= y_D^1 + y_D^2 \\ &= \frac{q(l+a)^4}{8EI} - \frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} - \frac{q(l+a)a\ell^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.36)$$

したがって、元の問題における中央点のたわみ δ_O は

$$\begin{aligned} \delta_O &= -y_C = -\left[\frac{ql^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^2l^2}{4EI} - \frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} \right] \\ &= \frac{5q\ell^4}{24EI} - \frac{qa^2\ell^2}{4EI} \end{aligned} \quad (8.1.37)$$

また、先端 D のたわみ δ_D は

$$\begin{aligned} \delta_D &= y_D - y_C \\ &= \frac{q(l+a)^4}{8EI} - \frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} - \frac{q(l+a)a\ell^2}{2EI} \\ &\quad - \left[\frac{ql^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^2l^2}{4EI} - \frac{q(l+a)\ell^3}{3EI} \right] \\ &= -\frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3\ell}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \end{aligned} \quad (8.1.38)$$

【略解 2】

積分法で解いてみよう。対称性により、この問題は図 8.1.10 と等価である。

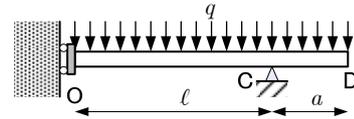


図 8.1.10 対称性の利用【例題 8.3】

点 C での反力は $q(l+a)$ であるから、曲げモーメントは

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \ell & : M = q(l+a)(\ell-x) - \frac{1}{2}q(\ell+a-x)^2 \\ \ell < x \leq \ell+a & : M = -\frac{1}{2}q(\ell+a-x)^2 \end{cases} \quad (8.1.39)$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq \ell$ のとき、たわみ方程式は

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{M}{EI} = -\frac{q(l+a)}{EI}(\ell-x) + \frac{q(\ell+a-x)^2}{2EI} \\ &= \frac{q(l+a)}{EI}(x-\ell) + \frac{q(x-\ell-a)^2}{2EI} \end{aligned} \quad (8.1.40)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{q(l+a)}{2EI}(x-\ell)^2 + \frac{q}{6EI}(x-\ell-a)^3 + C_1 \\ y = \frac{q(l+a)}{6EI}(x-\ell)^3 + \frac{q}{24EI}(x-\ell-a)^4 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (8.1.41)$$

境界条件は

$$y'(0) = 0, \quad y(\ell) = 0 \quad (8.1.42)$$

したがって、

$$\begin{cases} \frac{q(l+a)\ell^2}{2EI} - \frac{q(l+a)^3}{6EI} + C_1 = 0 \\ \frac{qa^4}{24EI} + C_1\ell + C_2 = 0 \end{cases} \quad (8.1.43)$$

これを解くと、

$$\begin{cases} C_1 = \frac{q(l+a)^3}{6EI} - \frac{q(l+a)\ell^2}{2EI} \\ C_2 = \frac{q(l+a)\ell^3}{2EI} - \frac{q(l+a)^3\ell}{6EI} - \frac{qa^4}{24EI} \end{cases} \quad (8.1.44)$$

よって、式(8.1.41)より、

$$\begin{aligned} \delta_O &= y(0) = -\frac{q(l+a)\ell^3}{6EI} + \frac{q(l+a)^4}{24EI} + C_2 \\ &= -\frac{q(l+a)\ell^3}{6EI} + \frac{q(l+a)^4}{24EI} \\ &\quad + \frac{q(l+a)\ell^3}{2EI} - \frac{q(l+a)^3\ell}{6EI} - \frac{qa^4}{24EI} \\ &= \frac{5q\ell^4}{24EI} - \frac{qa^2\ell^2}{4EI} \end{aligned} \quad (8.1.45)$$

また、点 C でのたわみ角は

$$\theta_C = -\frac{qa^3}{6EI} + C_1 = -\frac{qa^3}{6EI} + \frac{q(\ell+a)^3}{6EI} - \frac{q(\ell+a)\ell^2}{2EI} \quad (8.1.46)$$

次に、 $\ell < x \leq (\ell+a)$ では、原点を点 C にシフトすると、曲げモーメントは

$$M = -\frac{q(a-x)^2}{2} \quad (8.1.47)$$

となるので、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{q(a-x)^2}{2EI} = \frac{q}{2EI}(a^2 - 2ax + x^2) \quad (8.1.48)$$

積分すると、

$$\begin{cases} y' = \frac{q}{2EI}\left(a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + C_3 \\ y = \frac{q}{2EI}\left(\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right) + C_3x + C_4 \end{cases} \quad (8.1.49)$$

境界条件は、

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \theta_C \quad (8.1.50)$$

したがって、

$$\begin{cases} C_3 = \theta_C = -\frac{qa^3}{6EI} + \frac{q(\ell+a)^3}{6EI} - \frac{q(\ell+a)\ell^2}{2EI} \\ C_4 = 0 \end{cases} \quad (8.1.51)$$

よって、先端でのたわみ δ_D は

$$\begin{aligned} \delta_D &= \frac{q}{2EI}\left(\frac{a^2}{2} \times a^2 - \frac{a}{3} \times a^3 + \frac{1}{12}a^4\right) + C_3a + C_4 \\ &= \frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^4}{6EI} + \frac{q(\ell+a)^3a}{6EI} - \frac{q(\ell+a)a\ell^2}{2EI} \\ &= -\frac{qa\ell^3}{3EI} + \frac{qa^3\ell}{2EI} + \frac{qa^4}{8EI} \end{aligned} \quad (8.1.52)$$

8.2. その他の応用問題

国家公務員試験の過去問を解いてみよう。

【例題 8.4】途中で荷重が作用する梁のたわみ(9)

図 8.2.1 のような、同じ断面、同じ厚さの二つの梁が途中で合さったような梁において、点 C で下側の梁が上側の梁に与える力を求めなさい。

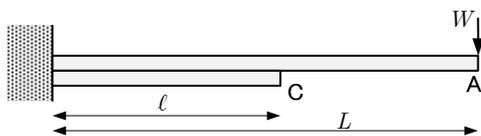


図 8.2.1 モーメントの釣り合い【例題 8.4】

【略解】

要するに、図 8.2.2 のように、求める力を P として、上側の梁と下側の梁の変形を別々に解いて、点 C で両者のたわみが等しくなるように P を決めればよい。

まず、上側の梁の点 C でのせん断力 F と曲げモーメント M は

$$F = W - P, \quad M = -W(L - \ell) \quad (8.2.1)$$

であるから、点 C のたわみは

$$\begin{aligned} y_C^{upper} &= \frac{(W-P)\ell^3}{3EI} - \frac{-W(L-\ell)\ell^2}{2EI} \\ &= \frac{W\ell^2(3L-\ell)}{6EI} - \frac{P\ell^3}{3EI} \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

次に、下側の梁の点 C のたわみは

$$y_C^{lower} = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (8.2.3)$$

したがって、

$$\frac{W\ell^2(3L-\ell)}{6EI} - \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (8.2.4)$$

これを P について解くと、

$$P = \frac{W}{4}\left(\frac{3L}{\ell} - 1\right) \quad (8.2.5)$$

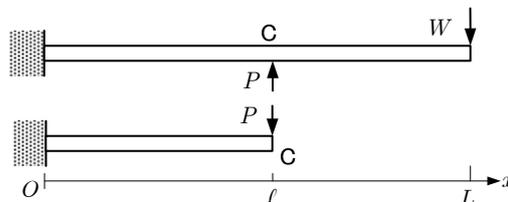


図 8.2.2 梁の分割【例題 8.4】

ちなみに、「下側の梁と上側の梁は点 C でしか接触しないのか？ 固定端から点 C までの間 ($0 \leq x < \ell$) でも下側の梁から上側の梁に力がかかるのではないか？」と思うかもしれない。しかし、実際に $0 \leq x < \ell$ でのたわみ曲線を計算してみると、上側および下側のたわみはそれぞれ

$$\begin{cases} y^{upper} = \frac{P-W}{6EI}x^3 + \frac{WL-P\ell}{2EI}x^2 \\ y^{lower} = \frac{P}{EI}\left(\frac{1}{2}\ell x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) \end{cases} \quad (8.2.6)$$

となるので、両者の差 Δ は

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{P}{EI}\left(\frac{1}{2}\ell x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) - \left(\frac{P-W}{6EI}x^3 + \frac{WL-P\ell}{2EI}x^2\right) \\ &= \frac{W-2P}{6EI}x^3 + \frac{2P\ell-WL}{2EI}x^2 \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

これに式(8.2.5)を代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{W}{6EI}\left(\frac{3L}{\ell}-1\right)x^3 + \frac{W}{2EI}\left(\frac{3L}{\ell}-1\right)\ell x^2 - WLx^2 \\ &= \frac{W(L-\ell)}{4EI\ell}(\ell-x)x^2 \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

となり、 $0 \leq x < \ell$ では常に $\Delta > 0$ 、つまり、図 8.2.3 のように、お互いの間に隙間があることがわかる。

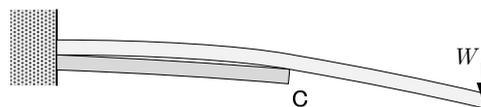


図 8.2.3 変形後の形状【例題 8.4】

【例題 8.5】断面が不連続に変化する梁のたわみ

【例題 5.7】を重ね合わせ法で解き、先端のたわみを求めなさい。



【略解】

まず、梁の連結点でのせん断力 F と曲げモーメント M は

$$F = P, \quad M = -Pa \quad (8.2.9)$$

であるから、連結点でのたわみ δ_c とたわみ角 θ_c は

$$\begin{cases} \delta_c = \frac{Pa^3}{3 \times 8EI} - \frac{-Pa \times a^2}{2 \times 8EI} = \frac{5Pa^3}{48EI} \\ \theta_c = \frac{Pa^2}{2 \times 8EI} - \frac{-Pa \times a}{8EI} = \frac{3Pa^2}{16EI} \end{cases} \quad (8.2.10)$$

ここで、右半分の細い梁には、先端にせん断荷重 P が作用するので、もし、連結点のたわみ角が 0 であったとしたら、右半分のたわみは、連結点でのたわみ δ_c に、 P によるたわみ $Pa^3/3EI$ を加えたものになるはずである。しかし、実際には、連結点ではたわみ角が 0 ではなく、 θ_c だけ傾いているので、その分のたわみ $\theta_c \times a$ をさらに加えないといけない。つまり、先端でのたわみ δ は、

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_c + \frac{Pa^3}{3EI} + \theta_c \times a \\ &= \frac{5Pa^3}{48EI} + \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{3Pa^2}{16EI} \times a = \frac{5Pa^3}{8EI} \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

となる。当然のことながら、これは式(5.3.20)と一致する。

【例題 8.6】連結問題

下図の梁の先端 C のたわみを求めなさい(【例題 6.14】)。

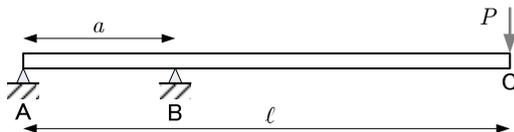


図 6.1.8 先端に荷重を受ける単純支持梁 (再掲)

【略解】

この問題は重ね合わせではないが、基本解を組み合わせで解くという意味でよい例題であるので解いてみよう。

点 B の左側断面に作用している曲げモーメント M_B は

$$M_B = -P(\ell - a) \quad (8.2.12)$$

であるので、この問題は図 8.2.4 の 2 つの問題を連結したものであることがわかる。

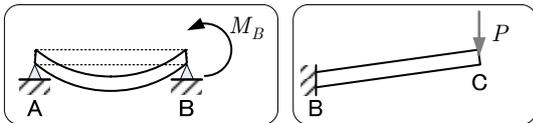


図 8.2.4 連結問題 【例題 8.6】

ここで重要なのは、点 B でのたわみ角が問題 1 と 2 で一致するという点である。連結問題では、連結点でたわみとたわみ角が等しくなるというのが条件に課せられるが、この問題ではたわみは問題 1 も 2 も 0 で一致しているのだから、あとはたわみ角が一致すればよいことになる。

さて、問題 1 では、点 B のたわみ角は

$$\theta_B = -\frac{M_B a}{3EI} = \frac{P(\ell - a)a}{3EI} \quad (8.2.13)$$

となる。表 7.1.2 と符合が異なっているが、これは、表 7.1.2 では反時計まわりを正としていたからである。

よって、問題 2 より、点 C のたわみは

$$\begin{aligned} y_C &= \theta_B \times (\ell - a) + \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} \\ &= \frac{P(\ell - a)a}{3EI} (\ell - a) + \frac{P(\ell - a)^3}{3EI} = \frac{P\ell(\ell - a)^2}{3EI} \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

8.3. まとめ

重ね合わせ法の使い方について確認した。

8.4. 宿題

- 1) 【例題 8.1】において、梁の曲げ応力の最大値を求めなさい。
- 2) 【例題 8.2】において、梁の曲げ応力の最大値を求めなさい。
- 3) 【例題 8.3】において、梁の曲げ応力の最大値を求めなさい。

第9章 梁の不静定問題(1)

これまででは、力およびモーメントの釣り合いから梁の任意の点での曲げモーメントとせん断力を求めることができる問題を解いてきた。しかし、釣り合い式だけでは曲げモーメントやせん断力が求まらない（式が足りない）問題もある。このような問題一般には不静定問題と呼ばれる。今回の講義では梁の不静定問題の解法を確認する

9.1. 不静定

次の例題を考えてみよう。

【例題 9.1】 不静定問題の例(1)

下図の場合の梁の先端 B のたわみを求めなさい。

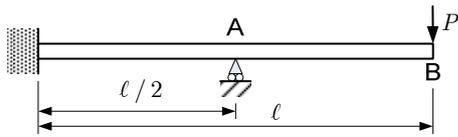


図 9.1.1 中央を単純支持され先端荷重を受ける片持ち梁

この問題では、壁の反力と反モーメントと点 A での支持反力の 3 つが未知数であるが、釣り合い式はモーメントの釣り合い式と縦方向の力の釣り合い式の 2 つだけであるので、式が 1 つ足りない。したがって、不静定問題である。では、どう解けばよいだろうか？

この例題は、図 9.1.2 のように先端と中央点にせん断荷重を作用させた梁（【例題 7.3】）において中央点でのたわみが 0 となる場合と力学的には全く等価な問題である。

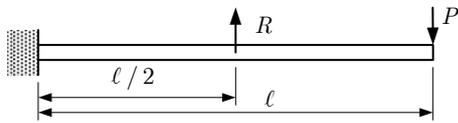


図 9.1.2 【例題 7.2】の梁

つまり、この例題は次のように解けばよい。まず、点 A での上向きの反力を R とすれば、この問題は図 9.1.3 の 2 つの問題の重ね合わせと考えることができる。そして、反力 R は、点 A でのたわみが 0 になるように決定すればよい。

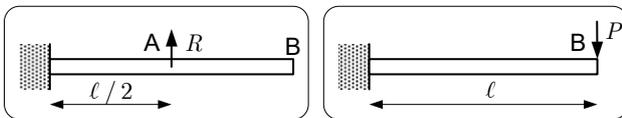


図 9.1.3 解の重ね合わせ (図 9.1.1)

問題 1 における点 A のたわみは、

$$y_A^1 = -\frac{R(\ell/2)^3}{3EI} = -\frac{R\ell^3}{24EI} \quad (9.1.1)$$

である。また、問題 2 において、点 A でのせん断力および曲げモーメントはそれぞれ、

$$F = P, \quad M = -\frac{P\ell}{2} \quad (9.1.2)$$

であるから、点 A のたわみは、

$$y_A^2 = \frac{P(\ell/2)^3}{3EI} - \frac{(-P\ell/2)(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad (9.1.3)$$

全体での点 A のたわみ y_A は y_A^1 と y_A^2 の和であり、それが 0

になるので、次式が成り立つ（これが重要！）。

$$y_A = y_A^1 + y_A^2 = -\frac{R\ell^3}{24EI} + \frac{5P\ell^3}{48EI} = 0 \quad (9.1.4)$$

したがって、

$$R = \frac{5}{2}P \quad (9.1.5)$$

また、問題 1 における先端 B のたわみは

$$\begin{aligned} y_B^1 &= y_A^1 + \frac{\ell}{2}\theta_A^1 = -\frac{R\ell^3}{24EI} + \frac{\ell}{2}\left[-\frac{R(\ell/2)^2}{2EI}\right] \\ &= -\frac{5R\ell^3}{48EI} = -\frac{25P\ell^3}{96EI} \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

であり、問題 2 における先端 B のたわみは

$$y_B^2 = \frac{P\ell^3}{3EI} \quad (9.1.7)$$

したがって、全体での先端 B のたわみは

$$y_B = y_B^1 + y_B^2 = -\frac{25P\ell^3}{96EI} + \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{7P\ell^3}{96EI} \quad (9.1.8)$$

なお、この問題では、力の釣り合いやモーメントの釣り合いだけでは反力 R は求まらず、たわみを求めて、「点 A でのたわみが 0」という条件を使って初めて R が求まる。このように、釣り合いだけでは反力が求まらない構造は「不静定構造」(statically indeterminate structure) と呼ばれる。

以下、不静定問題の例題をいくつかみてみよう。

【例題 9.2】 不静定問題の例(2)

下図の場合の梁の先端 B のたわみを求めなさい。

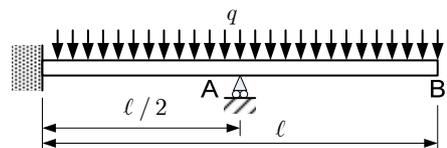


図 9.1.4 中央を単純支持され分布荷重を受ける片持ち梁

【略解】

点 A に上向きの反力 R_A が作用するとすると、この問題は次の 2 つの問題の重ね合わせと考えることができる。そして、点 A のたわみが 0 になるように R_A の値が決定される。

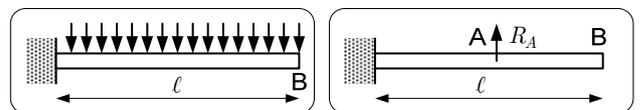


図 9.1.5 解の重ね合わせ【例題 9.2】

問題 1 では、点 A でのせん断力 F と曲げモーメント M は

$$F = \frac{q\ell}{2}, \quad M = -\frac{q\ell^2}{8} \quad (9.1.9)$$

点 A でのたわみ y_A^1 は図 9.1.6 の場合と同じはずであるので、

$$y_A^1 = \frac{q(\ell/2)^4}{8EI} + \frac{(q\ell/2)(\ell/2)^3}{3EI} - \frac{(-q\ell^2/8)(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{17q\ell^4}{384EI} \quad (9.1.10)$$

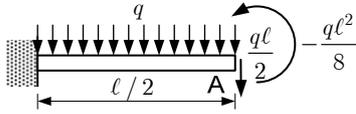


図 9.1.6 梁のたわみ【例題 9.2】(問題 1)

問題 2 における点 A のたわみは、

$$y_A^2 = -\frac{R_A(\ell/2)^3}{3EI} = -\frac{R_A\ell^3}{24EI} \quad (9.1.11)$$

全体での点 A のたわみ y_A は y_A^1 と y_A^2 の和であり、それが 0 になるので、

$$y_A = y_A^1 + y_A^2 = \frac{17q\ell^4}{384EI} - \frac{R_A\ell^3}{24EI} = 0 \quad (9.1.12)$$

したがって、

$$R_A = \frac{17}{16}q\ell \quad (9.1.13)$$

次に、問題 1 における先端 B のたわみは、

$$y_B^1 = \frac{q\ell^4}{8EI} \quad (9.1.14)$$

であり、問題 2 における先端 B のたわみは、

$$y_B^2 = y_A^2 + \frac{\ell}{2}\theta_A^2 = -\frac{R_A\ell^3}{24EI} + \frac{\ell}{2}\left[-\frac{R_A(\ell/2)^2}{2EI}\right] = -\frac{5R_A\ell^3}{48EI} = -\frac{5}{48} \times \frac{17q\ell}{16} \times \frac{\ell^3}{EI} = -\frac{85q\ell^4}{768EI} \quad (9.1.15)$$

したがって、先端 B のたわみは、

$$y_B = y_B^1 + y_B^2 = \frac{q\ell^4}{8EI} - \frac{85q\ell^4}{768EI} = \frac{11q\ell^4}{768EI} \quad (9.1.16)$$

【例題 9.3】 不静定問題の例(3)

下図の場合の梁の先端 B での反力を求めなさい。

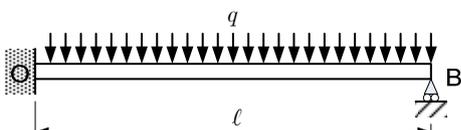


図 9.1.7 先端を単純支持され分布荷重を受ける片持ち梁

【ヒント】この例題も、2つの基本問題の重ね合わせで解けるので、その2つがわかれば、すぐに解けるだろう。実際、【例題 9.1】や【例題 9.2】に比べると簡単である。

【例題 9.4】 不静定問題の例(4)

下図において点 A, B, C での反力を求めなさい。

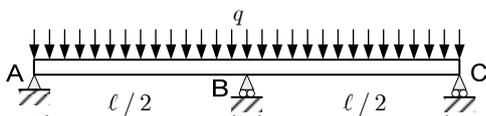


図 9.1.8 中央と両端を単純支持され分布荷重を受ける梁

【ヒント】この例題も、2つの基本問題の重ね合わせで解ける(実は、【例題 9.3】の解を利用すると、簡単に解ける)。

【例題 9.5】 不静定問題の例(5)

下図において、支持点 A, 固定端 O における反力・反モーメントを求めなさい。

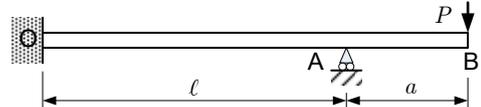


図 9.1.9 途中を単純支持され先端荷重を受ける片持ち梁

【ヒント】この例題は【例題 9.1】とほとんど同じ問題。

【例題 9.6】 不静定問題の例(6)

下図において、荷重点 C のたわみを求めなさい。

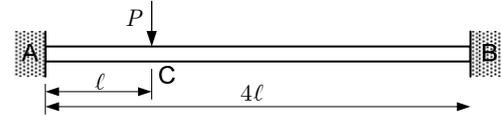


図 9.1.10 途中で荷重を受ける両端固定梁

【略解】

この問題は重ね合わせでは解けそうにないが、点 C の左側断面に生じるせん断力を F_C 、曲げモーメントを M_C とすれば、図 9.1.11 の 2 つの問題を「連結」することで解ける。

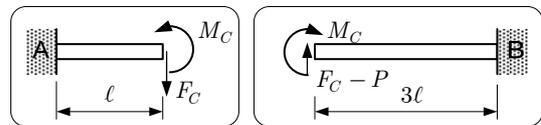


図 9.1.11 解の連結【例題 9.6】

実際、どうやって解くかという、次の通りである。

- 1) まず、両者における点 C でのたわみとたわみ角を求める。
- 2) 次に、両者のたわみおよびたわみ角が等しいという条件により方程式が 2 つたてる。
- 3) それらを連立して解くことにより、 F_C と M_C を求める。
- 4) 1) で求めた点 C のたわみの式に 3) の結果を代入することで、点 C のたわみを求める。

実際にこの手順で求めてみよう。まず、問題 1 での点 C のたわみ y_C^1 およびたわみ角 θ_C^1 は、

$$y_C^1 = \frac{F_C\ell^3}{3EI} - \frac{M_C\ell^2}{2EI}, \quad \theta_C^1 = \frac{F_C\ell^2}{2EI} - \frac{M_C\ell}{EI} \quad (9.1.17)$$

次に、問題 2 における点 C のたわみ y_C^2 およびたわみ角 θ_C^2 は、

$$y_C^2 = -\frac{(F_C - P)(3\ell)^3}{3EI} - \frac{M_C(3\ell)^2}{2EI} = -\frac{9(F_C - P)\ell^3}{EI} - \frac{9M_C\ell^2}{2EI} \quad (9.1.18)$$

$$\theta_C^2 = \frac{(F_C - P)(3\ell)^2}{2EI} + \frac{M_C(3\ell)}{EI} = \frac{9(F_C - P)\ell^2}{2EI} + \frac{3M_C\ell}{EI} \quad (9.1.19)$$

(右辺の符号がプラスであることに注意!)。したがって、

$$\begin{cases} \frac{F_C \ell^3}{3EI} - \frac{M_C \ell^2}{2EI} = -\frac{9(F_C - P)\ell^3}{EI} - \frac{9M_C \ell^2}{2EI} \\ \frac{F_C \ell^2}{2EI} - \frac{M_C \ell}{EI} = \frac{9(F_C - P)\ell^2}{2EI} + \frac{3M_C \ell}{EI} \end{cases} \quad (9.1.20)$$

この連立方程式を解くと、

$$F_C = \frac{27}{32}P, \quad M_C = \frac{9}{32}P\ell \quad (9.1.21)$$

これを式(9.1.17)に代入すると、点 C のたわみ y_C は

$$y_C = y_C^1 = \frac{\ell^3}{3EI} \times \frac{27}{32}P - \frac{\ell^2}{2EI} \times \frac{9}{32}P\ell = \frac{9P\ell^3}{64EI} \quad (9.1.22)$$

9.2. まとめ

不静定問題の解法について確認した。基本的には支持点反力を変数で与えて解き、そこでのたわみが 0 になるという条件から反力を求めればよい。

また、応用問題として、梁の途中に荷重が作用する場合の不静定問題の解法についても確認した。

9.3. 宿題

【例題 9.5】と【例題 9.6】を解きなさい（式だけでなく、図や説明が充実したものにしてください）。

第10章 梁の不静定問題(2)

前回に引き続き、不静定問題の解法について解説する。

10.1. 不静定問題

【例題 10.1】 不静定問題の例(7)

下図において、梁の中央点のたわみを求めなさい。

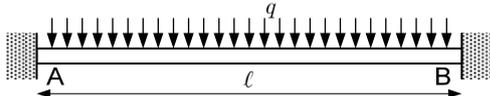


図 10.1.1 分布荷重を受ける両端固定梁

【略解】

まず、力の釣り合いより、壁からの反力は

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}q\ell \quad (10.1.1)$$

左半分で考えると、この問題は図 10.1.2 と同値であり、 P は力の釣り合いから、 M_C は中央点 C でのたわみ角 θ_C が 0 になるように決まることがわかる。実際、力の釣り合いより、

$$R_A - \frac{q\ell}{2} - P = 0 \quad (10.1.2)$$

つまり、当然といえば当然だが、

$$P = 0 \quad (10.1.3)$$

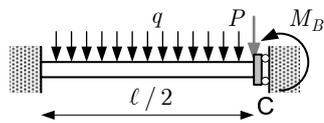


図 10.1.2 解の重ね合わせ【例題 10.1】

となる。よって、点 C のたわみ角 θ_C は、

$$\theta_C = -\frac{M_C \ell / 2}{EI} + \frac{q(\ell/2)^3}{6EI} = -\frac{\ell}{2EI} M_C + \frac{q\ell^3}{48EI} \quad (10.1.4)$$

これが 0 になればよいので、結局、

$$M_C = \frac{q\ell^2}{24} \quad (10.1.5)$$

点 C のたわみ δ_C は、

$$\delta_C = \frac{q(\ell/2)^4}{8EI} - \frac{M_C(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{q\ell^4}{128EI} - \frac{M_C \ell}{8EI} \quad (10.1.6)$$

であるから、式(10.1.5)を代入して整理すると、

$$\delta_C = \frac{q\ell^4}{128EI} - \frac{(q\ell^2/24)\ell}{8EI} = \frac{q\ell^4}{384EI} \quad (10.1.7)$$

【例題 10.2】 連続梁の例(1)

下図において、点 A , B , C の反力を求めなさい。

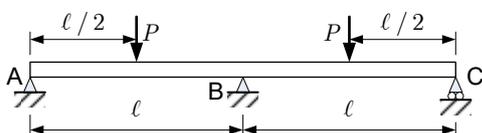


図 10.1.3 途中で荷重を受ける 3 点支持梁

【方針】

この問題は図 10.1.4 と等価である。そこで、この等価な問題をいくつかの方法で解いてみよう。

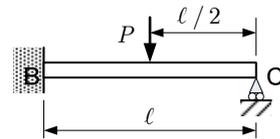


図 10.1.4 対称性の利用【例題 10.2】

【略解 1】

点 C での反力を R_C とすれば、この問題は図 10.1.5 の 2 つの問題と等価で、 R_C は、点 C でのたわみが 0 となるように加えられる力であると考えればよい。

まず、問題 1 において、荷重点でのたわみ δ_p およびたわみ角 θ_p は、

$$\delta_p = \frac{P(\ell/2)^3}{3EI} = \frac{P\ell^3}{24EI}, \quad \theta_p = \frac{P(\ell/2)^2}{2EI} = \frac{P\ell^2}{8EI} \quad (10.1.8)$$

よって、先端 C でのたわみ y_C^1 は

$$y_C^1 = \delta_p + \theta_p \times \frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{24EI} + \frac{P\ell^2}{8EI} \times \frac{\ell}{2} = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad (10.1.9)$$

問題 2 での先端 C でのたわみは

$$y_C^2 = -\frac{R_C \ell^3}{3EI} \quad (10.1.10)$$

これらを重ね合わせると、先端 C でのたわみ y_C は 0 になるはずであるから、

$$y_C = y_C^1 + y_C^2 = \frac{5P\ell^3}{48EI} - \frac{R_C \ell^3}{3EI} = 0 \quad (10.1.11)$$

したがって、

$$R_C = \frac{5}{16}P \quad (10.1.12)$$

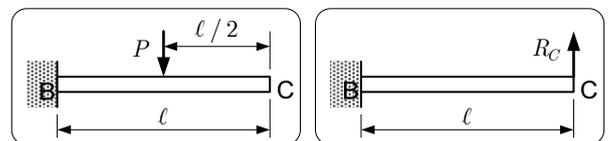


図 10.1.5 解の重ね合わせ 1【例題 10.2】

もともとの問題における点 B の反力は、図 10.1.5 のそれぞれの問題の和の 2 倍になるので、そうやって計算してもいいが、全体で力の釣り合いを考えれば、問題が左右対称であることより、

$$R_C + R_B + R_C = 2P \quad (10.1.13)$$

したがって、

$$R_B = 2P - 2R_C = \frac{11}{8}P \quad (10.1.14)$$

【略解 2】

この問題は図 10.1.6 の 2 つの問題の和と考えることもでき、点 B でたわみ角が 0 になるよう、 M_B を決めればよいことがわかるだろう。

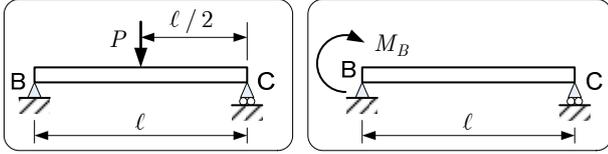


図 10.1.6 解の重ね合わせ 2【例題 10.2】

図 10.1.6 のそれぞれの問題において、点 B の傾斜角は、

$$\theta_B^1 = \frac{P\ell^2}{16EI}, \quad \theta_B^2 = \frac{M_B\ell}{3EI} \quad (10.1.15)$$

となるので、

$$\frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{M_B\ell}{3EI} = 0 \quad (10.1.16)$$

したがって、

$$M_B = -\frac{3}{16}P\ell \quad (10.1.17)$$

点 C の反力も、図 10.1.6 の 2 つの問題の和になるので、

$$R_C = \frac{P}{2} + \frac{M_C}{\ell} = \frac{5}{16}P \quad (10.1.18)$$

あとは、略解 1 と同様にして R_B を求めればよい。

略解 1 と略解 2 のどちらが解きやすいかは意見が分かれるだろうが、各自、自分の好きな方法で解けばいいだろう。

【略解 3】

念のため、積分法で解いてみよう。この問題は図 10.1.7 と等価であり、梁の任意の断面での曲げモーメントは

$$M = \begin{cases} R_A(\ell - x) - P\left(\frac{\ell}{2} - x\right) & (0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}) \\ R_A(\ell - x) & (\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (10.1.19)$$

であるから、まず、 $0 \leq x \leq \ell/2$ において、

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{R_A}{EI}(x - \ell) - \frac{P}{EI}\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \quad (10.1.20)$$

これを、境界条件

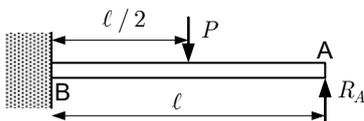
$$x = 0 : y = 0, y' = 0 \quad (10.1.21)$$

のもとで解くと、

$$\begin{cases} y' = \frac{R_A}{2EI}(x^2 - 2\ell x) - \frac{P}{2EI}(x^2 - \ell x) \\ y = \frac{R_A}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - \ell x^2\right) - \frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell}{2}x^2\right) \end{cases} \quad (10.1.22)$$

$x = \ell/2$ のときには、

$$y = -\frac{5R_A\ell^3}{48EI} + \frac{P\ell^3}{24EI}, \quad y' = -\frac{3R_A\ell^2}{8EI} + \frac{P\ell^2}{8EI} \quad (10.1.23)$$



次に、 $\ell/2 \leq x \leq \ell$ では、

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{R_A}{EI}(x - \ell) \quad (10.1.24)$$

であり、境界条件は $x = \ell/2$ で式(10.1.23)を満たすことであるから、これらを解くと

$$\begin{aligned} y' &= \frac{R_A}{2EI}(x - \ell)^2 + \frac{P\ell^2}{8EI} - \frac{R_A\ell^2}{2EI} \\ y &= \frac{R_A}{6EI}(x - \ell)^3 + \left(\frac{P\ell^2}{8EI} - \frac{R_A\ell^2}{2EI}\right)x + \frac{R_A\ell^3}{6EI} - \frac{P\ell^2}{48EI} \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

ここで、 $x = \ell$ で $y = 0$ であるから、この式の第二式より、

$$\left(\frac{P\ell^2}{8EI} - \frac{R_A\ell^2}{2EI}\right)\ell + \frac{R_A\ell^3}{6EI} - \frac{P\ell^2}{48EI} = 0 \quad (10.1.26)$$

よって、

$$R_A = \frac{5}{16}P \quad (10.1.27)$$

となって、確かに式(10.1.18)と一致する。

【例題 10.3】連続梁の例(2)

下図において、各支持点の反力を求めなさい。

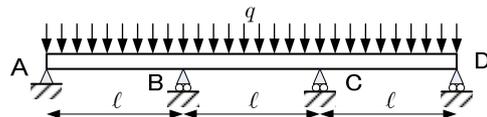


図 10.1.8 分布荷重を受ける 4 点支持梁

【略解】

問題の対称性を考慮すると、この問題は図 10.1.9 の二つの梁の連結問題と等価で、 M_B は点 B での両者のたわみ角が等しくなるように決めればよいことがわかる。また、それぞれの問題は、分布荷重を受ける梁と端部に曲げモーメントを受ける梁の重ね合わせで解ける。実際に解くと、それぞれの問題における点 B でのたわみ角は、

$$\theta_1 = -\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M_B\ell}{3EI}, \quad \theta_2 = \frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_B\ell}{6EI} + \frac{M_B\ell}{3EI} \quad (10.1.28)$$

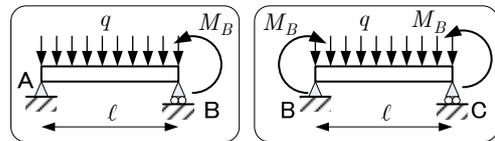


図 10.1.9 解の重ね合わせ【例題 10.3】

両者が等しいことより、

$$-\frac{q\ell^3}{24EI} - \frac{M_B\ell}{3EI} = \frac{q\ell^3}{24EI} + \frac{M_B\ell}{6EI} + \frac{M_B\ell}{3EI} \quad (10.1.29)$$

したがって、

$$M_B = -\frac{1}{10}q\ell^2 \quad (10.1.30)$$

残りの反力のうち、点 A 反力は、図 10.1.9 の問題 1 から求められる。すなわち、問題 1 における点 B まわりのモーメントの釣り合いより、

$$-R_A\ell + \frac{q\ell^2}{2} + M_B = 0 \quad (10.1.31)$$

よって,

$$R_A = \frac{1}{2}q\ell + \frac{M_B}{\ell} = \frac{2}{5}q\ell \quad (10.1.32)$$

R_B は, 図 10.1.9 の問題 1 と 2 との和でも求められるが, もともとの問題での力の釣り合いから簡単に求められる. すなわち,

$$2R_A + 2R_B - 3q\ell = 0 \quad (10.1.33)$$

よって,

$$R_B = \frac{3}{2}q\ell - R_A = \frac{11}{10}q\ell \quad (10.1.34)$$

10.2. まとめ

不静定梁の解法を確認した. 不静定梁では, 反力・反モーメントを仮定して, 変位境界条件を用いてその反力・反モーメントを決定する, というのがオーソドックスなやり方である.

10.3. 宿題

- 1) 【例題 10.1】において, 梁の曲げ応力の最大値を求めなさい.
- 2) 【例題 10.2】において, 梁の曲げ応力の最大値を求めなさい.
- 3) 【例題 10.3】において, 梁の曲げ応力の最大値を求めなさい.

第11章 面積モーメント法によるたわみの算出

これまで、積分法や重ね合わせ法による梁のたわみの算出法について学んできた。今回の講義では、補足として、面積モーメント法と呼ばれる方法について紹介する。また、せん断変形によるたわみを考慮した Timoshenko の梁理論についても紹介する。

11.1. 面積モーメント法

面積モーメント法は、ある特殊な場合において、梁のたわみを簡単に（短時間に）求めることのできる解法である。個人的には、積分法と重ね合わせ法、そして、特異関数法の3つを知っていれば、社会に出てからも問題なくやっていけると思うが、面積モーメント法では図形感覚で答えを得ることができるので、わかりやすいかもしれない。そこで、この節では面積モーメント法による解法を紹介する。

11.1.1. 面積モーメント

ある梁のBMDが図11.1.1のようであったとしよう。いま、 $x = x_A$ から $x = x_B$ までの部分（図のグレーの部分）の図心の x 座標を x_C とすると、 x_C は次式で求められる。

$$x_C = \frac{\int_{x_A}^{x_B} xMdx}{\int_{x_A}^{x_B} Mdx} \quad (11.1.1)$$

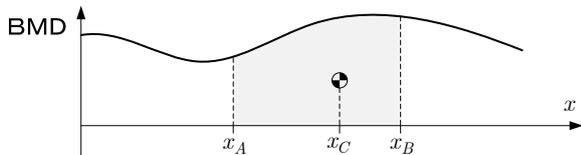


図 11.1.1 BMD の図心

ここで、式(11.1.1)の右辺の分子を少し変形すると、

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} xMdx &= \int_{x_A}^{x_B} (x_B + x - x_B)Mdx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} x_B Mdx + \int_{x_A}^{x_B} (x - x_B)Mdx \\ &= x_B \int_{x_A}^{x_B} Mdx - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)Mdx \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

したがって、

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_B \int_{x_A}^{x_B} Mdx - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)Mdx}{\int_{x_A}^{x_B} Mdx} \\ &= x_B - \frac{\int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)Mdx}{\int_{x_A}^{x_B} Mdx} \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

ここで、式(11.1.1)の右辺の分子は、原点からみた、曲げモーメントの「面積モーメント」であり、式(11.1.3)の右辺第二項の分子は、 x_B からみた「面積モーメント」である。そして、図心とは、面積モーメントを面積で割ったものである。

11.1.2. たわみ角の計算法

曲げモーメントと断面のたわみ角 θ との関係は

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \quad (11.1.4)$$

であった(式(3.1.1), (3.5.8))。これを、 $x = x_A$ から $x = x_B$ まで積分すると、

$$\theta_B = \theta_A - \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx \quad (11.1.5)$$

この式は次のことを意味している。

BMD が得られていて、ある点 x_A でのたわみ角 θ_A がわかっているならば、別の点 x_B でのたわみ角を求められる

$x = x_A$ から $x = x_B$ までの BMD の面積を S_{AB} とすれば、

$$S_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} Mdx \quad (11.1.6)$$

よって、 EI が一定であれば、

$$\theta_B = \theta_A - \frac{1}{EI} S_{AB} \quad (11.1.7)$$

では、例題を解いてみよう。

【例題 11.1】 特定の点のたわみ角

【例題 5.1】において、支持点のたわみ角を求めなさい。

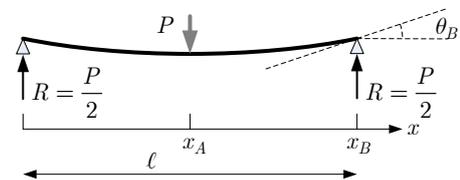


図 11.1.2 中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁

【略解】

中央点 x_A でのたわみ角は 0 であるとわかっており、かつ、梁の右半分での曲げモーメントは

$$M = \frac{P}{2}(\ell - x) \quad (11.1.8)$$

となるので、支持点 x_B でのたわみ角 θ_B （時計回りを正としているので、計算結果は負になるはず）は、式(11.1.5)を用いて、次のように求めることができる。

$$\theta_B = -\int_{\ell/2}^{\ell} \frac{P}{2EI}(\ell - x)dx = -\frac{P\ell^2}{16EI} \quad (11.1.9)$$

11.1.3. 面積モーメント法によるたわみの計算法

たわみ角 θ とたわみ y との関係は式(4.1.11)より、

$$\theta = y' \quad (11.1.10)$$

となるので、これを、 $x = x_A$ から $x = x_B$ まで積分すると、

$$y_B = y_A + \int_{x_A}^{x_B} \theta dx \quad (11.1.11)$$

ここで、面積モーメント法のポイントは、次の全微分関係を用いることにある。

$$d[(x_B - x)\theta] = -\theta dx + (x_B - x)d\theta \quad (11.1.12)$$

これに、式(11.1.4)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \theta dx &= -d[(x_B - x)\theta] + (x_B - x)d\theta \\ &= -d[(x_B - x)\theta] - (x_B - x)\frac{M}{EI} dx \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

したがって、式(11.1.11)は次のように書き直せる。

$$y_B = y_A - \int_{x_A}^{x_B} d[(x_B - x)\theta] - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)\frac{M}{EI} dx \quad (11.1.14)$$

この式の右辺第二項は積分できて、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)\frac{M}{EI} dx \quad (11.1.15)$$

この式に式(11.1.3)を代入すると、 EI が定数であれば、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M dx \quad (11.1.16)$$

$x = x_A$ から $x = x_B$ までの BMD の面積を S_{AB} とすれば、

$$S_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} M dx \quad (11.1.17)$$

このとき、式(11.1.16)より、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)S_{AB}}{EI} \quad (11.1.18)$$

この式は次のことを意味している。

- ある点 x_A でのたわみ y_A とたわみ角 θ_A がわかっている、 x_A から x_B までの BMD の面積 S_{AB} と、その図心 x_C がわかっているれば、 x_B でのたわみ y_B を求められる。
- ある点 x_A でのたわみ角 θ_A と、別の点 x_B でのたわみ y_B がわかっている、 x_A から x_B までの BMD の面積 S_{AB} と、その図心 x_C がわかっているれば、 x_A でのたわみ y_A を求められる。
- ある点 x_A と x_B の変位 y_A および y_B がわかっている、 x_A から x_B までの BMD の面積 S_{AB} と、その図心 x_C がわかっているれば、 x_A でのたわみ角 θ_A が求められる。

なお、 EI が場所によって変化する場合には、BMD ではなく、 M/EI のグラフを描いて、その図心を x_C 、面積を S_{AB} とすればよい。式(11.1.7)も同様である。すなわち、

$$\begin{cases} \theta_B = \theta_A - S_{AB} \\ y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - (x_B - x_C)S_{AB} \\ S_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx, x_C = x_B - \frac{\int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)M dx}{S_{AB}} \end{cases} \quad (11.1.19)$$

【例題 11.2】面積モーメント法(9)

【例題 5.1】（【例題 6.9】）において、梁の中央のたわみを求めなさい。

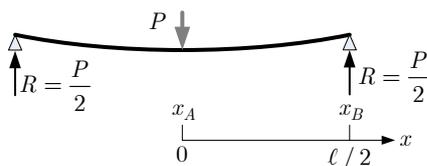


図 11.1.3 中央に集中荷重を受ける両端単純支持梁

【略解 1】

まずは面積モーメント法で解いてみよう。

図 11.1.3 のように、中央点を原点として、右半分で考えると、曲げモーメントは

$$M = \frac{P}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \quad (11.1.20)$$

となり、BMD は図 11.1.4 のようになる。したがって、面積 S_{AB} および図心は

$$S_{AB} = \frac{P\ell^2}{16}, \quad x_C = \frac{\ell}{6} \quad (11.1.21)$$

したがって、式(11.1.18)より、

$$0 = y_A + \frac{\ell}{2} \times 0 - \frac{2}{6} \frac{P\ell^2}{16} \quad (11.1.22)$$

よって、中央点のたわみは

$$y_A = \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (11.1.23)$$

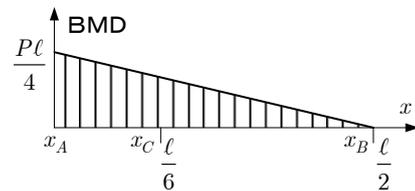


図 11.1.4 BMD 【例題 11.2】

【略解 2】

これに対し、従来の方法であれば、式(11.1.20)より、

$$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{2EI} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (11.1.24)$$

境界条件は

$$y'(0) = 0, \quad y(\ell/2) = 0 \quad (11.1.25)$$

式(11.1.24)を積分して境界条件(11.1.25)を用いると、

$$y' = \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell}{2}x \right) \quad (11.1.26)$$

もう一度積分して、境界条件(11.1.25)を用いると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell}{4}x^2 - \frac{\ell^3}{48} + \frac{\ell^3}{16} \right) \\ &= \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell}{4}x^2 + \frac{\ell^3}{24} \right) \end{aligned} \quad (11.1.27)$$

したがって、中央点 ($x = 0$) でのたわみは

$$y = \frac{P\ell^3}{48EI} \quad (11.1.28)$$

【例題 11.3】面積モーメント法(10)

下図において、支持点 A でのたわみ角、ならびに、中央点でのたわみを求めなさい（【例題 4.2】）。

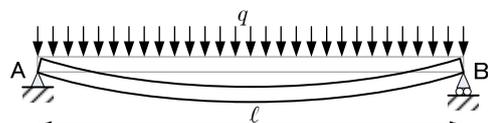


図 4.2.1 分布荷重を受ける両端単純支持梁（再掲）

【例題 11.4】面積モーメント法(11)

下図において、梁の先端のたわみを求めなさい（【例題 5.9】）。

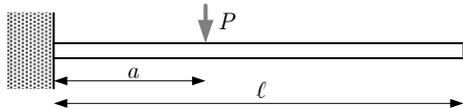


図 5.3.8 途中で荷重を受ける片持ち梁（再掲）

【略解】

曲げモーメントは

$$\begin{cases} M = -P(a-x) & (0 \leq x \leq a) \\ M = 0 & (a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (11.1.29)$$

であるから、BMD は図 11.1.5 のようになる。

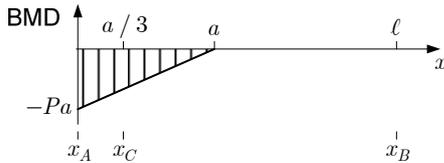


図 11.1.5 BMD 【例題 11.4】

面積モーメント法の公式より、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)}{EI} S_{AB} \quad (11.1.30)$$

であり、

$$\begin{cases} y_A = 0, x_B = \ell, x_A = 0, \theta_A = 0, x_C = \frac{a}{3}, \\ S_{AB} = -\frac{Pa^2}{2} \end{cases} \quad (11.1.31)$$

であるから、

$$\begin{aligned} y_B &= 0 + (\ell - 0) \times 0 - \frac{(\ell - a/3)}{EI} \left(-\frac{Pa^2}{2} \right) \\ &= \frac{Pa^2}{2EI} \left(\ell - \frac{a}{3} \right) \end{aligned} \quad (11.1.32)$$

【例題 11.5】面積モーメント法(12)

下図において、点 A, B でのたわみ角をそれぞれ求めなさい。また、先端 C でのたわみを求めなさい（【例題 6.14】、【例題 8.6】）。

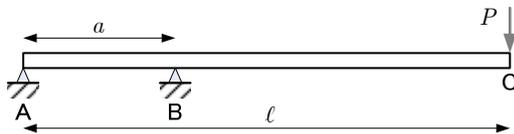


図 6.1.8 先端に荷重を受ける単純支持梁（再掲）

【略解】

曲げモーメントは

$$\begin{cases} M = -\frac{\ell-a}{a} Px & (0 \leq x \leq a) \\ M = -P(\ell-x) & (a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (11.1.33)$$

であるから、BMD は図 11.1.6 のようになる。そこで、まずは左端のたわみ角を求めよう。面積モーメント法の公式より、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)}{EI} S_{AB} \quad (11.1.34)$$

であり、

$$\begin{cases} y_B = 0, y_A = 0, x_B = a, x_A = 0, x_C = \frac{2a}{3}, \\ S_{AB} = -\frac{Pa(\ell-a)}{2} \end{cases} \quad (11.1.35)$$

であるから、

$$0 = 0 + (a-0) \times \theta_A - \frac{\left(a - \frac{2a}{3} \right)}{EI} \left[-\frac{Pa(\ell-a)}{2} \right] \quad (11.1.36)$$

したがって、

$$\theta_A = -\frac{Pa(\ell-a)}{6EI} \quad (11.1.37)$$

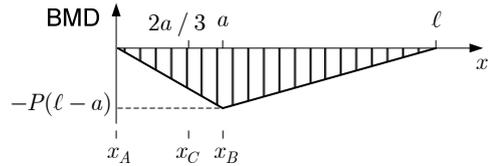


図 11.1.6 BMD と面積モーメント (1) 【例題 11.5】

次に、右の支持点でのたわみ角をもとめてみよう。この場合には、 x_A と x_B が入れ替わり、図 11.1.7 のようになる。

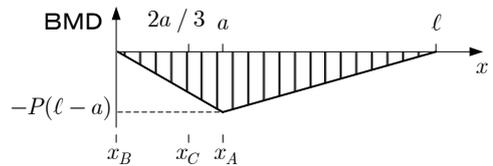


図 11.1.7 BMD と面積モーメント (2) 【例題 11.5】

したがって、

$$\begin{cases} y_B = 0, y_A = 0, x_B = 0, x_A = a, x_C = \frac{2a}{3}, \\ S_{AB} = \frac{Pa(\ell-a)}{2} \end{cases} \quad (11.1.38)$$

となり、面積モーメント法の公式より

$$0 = 0 + (0-a) \times \theta_A - \frac{(0-2a/3)}{EI} \left[\frac{Pa(\ell-a)}{2} \right] \quad (11.1.39)$$

したがって、

$$\theta_A = \frac{Pa(\ell-a)}{3EI} \quad (11.1.40)$$

最後に、先端でのたわみを計算するには、図 11.1.8 のように x_A, x_B を設定すればよい。

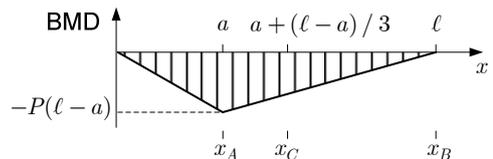


図 11.1.8 BMD と面積モーメント (3) 【例題 11.5】

この場合、

$$\begin{cases} y_A = 0, \theta_A = \frac{Pa(\ell-a)}{3EI}, x_B = \ell, x_A = a, \\ x_C = a + \frac{\ell-a}{3} = \frac{\ell+2a}{3}, S_{AB} = -\frac{P(\ell-a)^2}{2} \end{cases} \quad (11.1.41)$$

となり、面積モーメント法の公式より

$$y_B = 0 + (\ell - a) \times \frac{Pa(\ell - a)}{3EI} - \frac{\left(\ell - \frac{\ell + 2a}{3}\right) \left[-\frac{P(\ell - a)^2}{2}\right]}{EI} = \frac{P(\ell - a)^2 \ell}{3EI} \quad (11.1.42)$$

【例題 11.6】面積モーメント法(13)

下図において、梁の先端のたわみを求めなさい（【例題 6.10】，【例題 7.3】）。

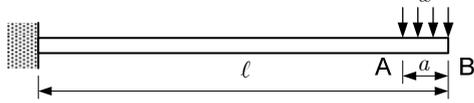


図 6.1.3 先端側に分布荷重を受ける片持ち梁（再掲）

【略解】

曲げモーメントは

$$\begin{cases} M = -wa \left(\ell - \frac{a}{2} - x \right) & (0 \leq x \leq \ell - a) \\ M = -\frac{w(\ell - x)^2}{2} & (\ell - a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (11.1.43)$$

であるから、BMDは図 11.1.9 のようになる。

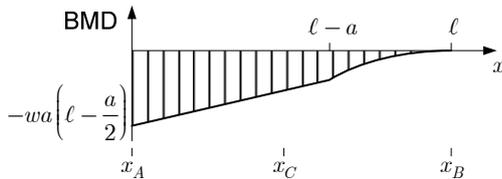


図 11.1.9 BMDと面積モーメント【例題 11.6】

そこで、図 11.1.9 のように x_A ， x_B をとると、

$$y_A = 0, \theta_A = 0, x_B = \ell, x_A = 0 \quad (11.1.44)$$

であり、

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \int_0^\ell M dx \\ &= \int_0^{\ell-a} \left[-wa \left(\ell - \frac{a}{2} - x \right) \right] dx + \int_{\ell-a}^\ell \left[-\frac{w(\ell-x)^2}{2} \right] dx \quad (11.1.45) \\ &= -\frac{wal(\ell-a)}{2} - \frac{wa^3}{6} = -\frac{wa}{6} (3\ell^2 - 3a\ell + a^2) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x M dx &= \int_0^{\ell-a} x \left[-wa \left(\ell - \frac{a}{2} - x \right) \right] dx \\ &\quad + \int_{\ell-a}^\ell x \left[-\frac{w(\ell-x)^2}{2} \right] dx \quad (11.1.46) \\ &= \frac{wa}{24} (-4\ell^3 + 6a\ell^2 - 4a^2\ell + a^3) \end{aligned}$$

より、

$$x_C = \frac{\int_0^\ell x M dx}{S_{AB}} = \frac{wa}{24S_{AB}} (-4\ell^3 + 6a\ell^2 - 4a^2\ell + a^3) \quad (11.1.47)$$

したがって、面積モーメントの公式

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)}{EI} S_{AB} \quad (11.1.48)$$

より、

$$\begin{aligned} y_B &= 0 + (\ell - 0) \times 0 - \left\{ \ell - \left[\frac{wa}{24S_{AB}} (-4\ell^3 + 6a\ell^2 - 4a^2\ell + a^3) \right] \right\} \frac{S_{AB}}{EI} \\ &= -\frac{\ell}{EI} S_{AB} + \frac{wa}{24EI} (-4\ell^3 + 6a\ell^2 - 4a^2\ell + a^3) \quad (11.1.49) \\ &= -\frac{\ell}{EI} \left[-\frac{wa}{6} (3\ell^2 - 3a\ell + a^2) \right] + \frac{wa}{24EI} (-4\ell^3 + 6a\ell^2 - 4a^2\ell + a^3) \\ &= \frac{wa}{24EI} [8\ell^3 - 6a^2\ell + a^3] \end{aligned}$$

【例題 11.7】面積モーメント法(14)

下図の場合の梁の中央のたわみを求めなさい（【例題 6.15】，【例題 8.1】）。

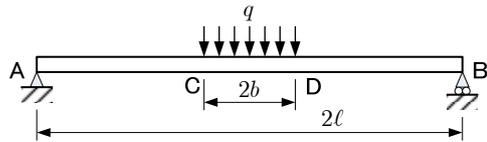


図 6.1.9 中央に分布荷重を受ける両端単純支持梁（再掲）

【略解 1】

右半分で考え、 x 軸の原点を梁の中央点としてみよう。曲げモーメントは

$$M = \begin{cases} -\frac{q}{2}x^2 + \frac{qb}{4}\left(\ell - \frac{b}{2}\right) & (0 \leq x \leq b/2) \\ \frac{qb}{2}\left(\frac{\ell}{2} - x\right) & (b/2 \leq x \leq \ell/2) \end{cases} \quad (11.1.50)$$

となるので、BMDは図 11.1.10 のようになる。

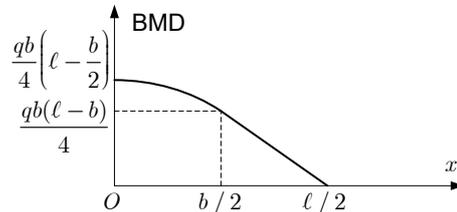


図 11.1.10 BMD【例題 11.7】

いま求めたいのは点 O でのたわみ y_O であるが、それには、点 O から点 B までの BMD の面積 S_{OB} と図心 x_C の値が必要となる。それらはそれぞれ、

$$\begin{aligned} S_{OB} &= \int_0^{b/2} \left[-\frac{q}{2}x^2 + \frac{qb}{4}\left(\ell - \frac{b}{2}\right) \right] dx \\ &\quad + \int_{b/2}^{\ell/2} \frac{qb}{2}\left(\frac{\ell}{2} - x\right) dx = \frac{qb}{48} (3\ell^2 - b^2) \quad (11.1.51) \\ x_C &= \frac{1}{S_{OB}} \left\{ \int_0^{b/2} x \left[-\frac{q}{2}x^2 + \frac{qb}{4}\left(\ell - \frac{b}{2}\right) \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{b/2}^{\ell/2} x \frac{qb}{2}\left(\frac{\ell}{2} - x\right) dx \right\} = \frac{4\ell^3 - b^3}{8(3\ell^2 - b^2)} \end{aligned}$$

面積モーメント法の公式より、

$$y_B = y_O + (x_B - x_O)\theta_O - \frac{(x_B - x_C)}{EI} S_{OB} \quad (11.1.52)$$

であるから、

$$0 = y_O + \frac{\ell}{2} \times 0 - \frac{\frac{\ell}{2} - \frac{4\ell^3 - b^3}{8(3\ell^2 - 2b^2)}}{EI} \frac{qb}{48} (3\ell^2 - b^2) \quad (11.1.53)$$

したがって、

$$y_0 = \frac{qb}{48EI} \left[\ell^3 - \frac{b^2\ell}{2} + \frac{b^3}{8} \right] = \frac{qb}{48EI} \ell^3 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{b}{2\ell} \right)^3 \right] \quad (11.1.54)$$

【略解 2】

積分法の場合、式(11.1.50)より、 $0 \leq x \leq b/2$ のときには、

$$y'' = -\frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{2}x^2 + \frac{qb}{4} \left(\ell - \frac{b}{2} \right) \right] \quad (11.1.55)$$

境界条件は

$$x = 0 : y' = 0 \quad (11.1.56)$$

これらを解くと、

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{6}x^3 + \frac{qb}{4} \left(\ell - \frac{b}{2} \right) x \right] \\ y = y_0 - \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{24}x^4 + \frac{qb}{8} \left(\ell - \frac{b}{2} \right) x^2 \right] \end{cases} \quad (11.1.57)$$

ただし、この段階では y_0 は未知数である。この式より、 $x = b/2$ では、

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{EI} \left(\frac{qb^3}{12} - \frac{qb^2\ell}{8} \right) \\ y = y_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{7qb^4}{384} - \frac{qb^3\ell}{32} \right) \end{cases} \quad (11.1.58)$$

$b/2 \leq x \leq \ell/2$ のときには

$$y'' = -\frac{1}{EI} \frac{qb}{2} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) = \frac{qb}{2EI} x - \frac{qb\ell}{4EI} \quad (11.1.59)$$

境界条件は

$$x = \frac{b}{2} : \begin{cases} y' = \frac{1}{EI} \left(\frac{qb^3}{12} - \frac{qb^2\ell}{8} \right) \\ y = y_0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{7qb^4}{384} - \frac{qb^3\ell}{32} \right) \end{cases} \quad (11.1.60)$$

これらを解くと、

$$\begin{cases} y' = \frac{qb}{4EI} x^2 - \frac{qb\ell}{4EI} x + \frac{qb^3}{48EI} \\ y = \frac{qb}{12EI} x^3 - \frac{qb\ell}{8EI} x^2 + \frac{qb^3}{48EI} x + y_0 - \frac{qb^4}{384EI} \end{cases} \quad (11.1.61)$$

ここで、 $x = \ell/2$ で $y = 0$ であるから、

$$0 = \frac{qb\ell^3}{96EI} - \frac{qb\ell^3}{32EI} + \frac{qb^3\ell}{96EI} + y_0 - \frac{qb^4}{384EI} \quad (11.1.62)$$

よって、

$$y_0 = \frac{qb}{48EI} \ell^3 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{\ell} \right)^3 \right] \quad (11.1.63)$$

【例題 11.8】面積モーメント法(15)

下図において、点 A、点 B のたわみ角を求めなさい。

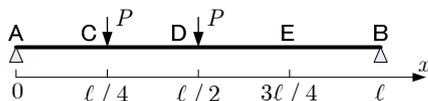


図 11.1.11 複数の集中荷重を受ける両端単純支持梁

【略解 1】

まずは面積モーメント法で解いてみよう。

点 A、B の反力はそれぞれ以下ようになる。

$$R_A = \frac{5P}{4}, \quad R_B = \frac{3P}{4} \quad (11.1.64)$$

よって、曲げモーメントは計算すると次のようになる。

$$M = \begin{cases} \frac{5P}{4}x & (0 \leq x \leq \frac{\ell}{4}) \\ \frac{P}{4}x + \frac{P}{4}\ell & (\frac{\ell}{4} \leq x \leq \frac{\ell}{2}) \\ \frac{3P}{4}(\ell - x) & (\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (11.1.65)$$

したがって、BMD は図 11.1.12 のようになる。

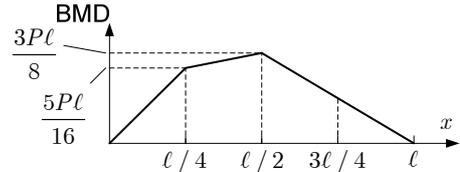


図 11.1.12 BMD 【例題 11.8】

点 A のたわみ角 θ_A を求めるには、式(11.1.18)において、点 A から点 B までの面積と図心を求める必要がある。それらはそれぞれ、

$$S_{AB} = \frac{7P\ell^2}{32} \quad (11.1.66)$$

$$x_C = \frac{1}{S_{AB}} \left[\int_0^{\ell/4} x \times \frac{5P}{4} x dx + \int_{\ell/4}^{\ell/2} x \times \left(\frac{P}{4}x + \frac{P}{4}\ell \right) dx + \int_{\ell/2}^{\ell} x \times \frac{3P}{4}(\ell - x) dx \right] = \frac{13}{28}\ell \quad (11.1.67)$$

式(11.1.18)より、

$$0 = 0 + \ell\theta_A - \frac{\left(\ell - \frac{13}{28}\ell \right) \frac{7}{32} P\ell^2}{EI} \quad (11.1.68)$$

よって、

$$\theta_A = \frac{15P\ell^2}{128EI} \quad (11.1.69)$$

次に、点 B のたわみ角 θ_B を求めたい場合には、式(11.1.18)で A と B を入れ替えればよい。つまり、

$$y_A = y_B + (x_A - x_B)\theta_B - \frac{(x_A - x_C)S_{BA}}{EI} \quad (11.1.70)$$

ここで、

$$S_{BA} = -S_{AB} \quad (11.1.71)$$

であることを考慮すると、

$$0 = 0 - \ell\theta_B - \frac{\left(0 - \frac{13}{28}\ell \right) \left(-\frac{7}{32} P\ell^2 \right)}{EI} \quad (11.1.72)$$

よって、

$$\theta_B = -\frac{13P\ell^2}{128EI} \quad (11.1.73)$$

【略解 2】

積分法の場合、まず、 $0 \leq x \leq \ell/4$ では、式(11.1.65)より、

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{5P}{4EI}x \quad (11.1.74)$$

境界条件は、

$$x = 0: y = 0, y' = \theta_A \quad (11.1.75)$$

(ただし、この段階では θ_A は未知数)。これらを解くと、

$$\begin{cases} y' = -\frac{5P}{8EI}x^2 + \theta_A \\ y = -\frac{5P}{24EI}x^3 + \theta_A x \end{cases} \quad (11.1.76)$$

点 C ($x = \ell/4$) でのたわみとたわみ角は

$$y_C = -\frac{5P\ell^3}{1536EI} + \frac{\theta_A \ell}{4}, \quad y'_C = -\frac{5P\ell^2}{128EI} + \theta_A \quad (11.1.77)$$

次に、 $\ell/4 \leq x \leq \ell/2$ では、式(11.1.65)より、

$$y'' = -\frac{P}{4EI}(x + \ell) \quad (11.1.78)$$

境界条件は

$$x = \frac{\ell}{4}: y = -\frac{5P\ell^3}{1536EI} + \frac{\theta_A \ell}{4}, y' = -\frac{5P\ell^2}{128EI} + \theta_A \quad (11.1.79)$$

これらを解くと、

$$\begin{cases} y' = -\frac{P}{8EI}(x + \ell)^2 + \frac{5P\ell^2}{32EI} + \theta_A \\ y = -\frac{P}{24EI}(x + \ell)^3 + \left(\frac{5P\ell^2}{32EI} + \theta_A\right)x + \frac{5P\ell^3}{128EI} + \frac{\theta_A \ell}{2} \end{cases} \quad (11.1.80)$$

点 D ($x = \ell/2$) でのたわみとたわみ角は

$$y_D = -\frac{3P\ell^3}{128EI} + \frac{\theta_A \ell}{2}, \quad y'_D = -\frac{P\ell^2}{8EI} + \theta_A \quad (11.1.81)$$

最後に、 $\ell/2 \leq x \leq \ell$ では、式(11.1.65)より、

$$y'' = -\frac{3P}{4EI}(\ell - x) = \frac{3P}{4EI}(x - \ell) \quad (11.1.82)$$

境界条件は

$$x = \frac{\ell}{2}: y = -\frac{3P\ell^3}{128EI} + \frac{\theta_A \ell}{2}, y' = -\frac{P\ell^2}{8EI} + \theta_A \quad (11.1.83)$$

これらを解くと、

$$\begin{cases} y' = \frac{3P}{8EI}(x - \ell)^2 - \frac{7P\ell^2}{32EI} + \theta_A \\ y = \frac{P}{8EI}(x - \ell)^3 + \left(-\frac{7P\ell^2}{32EI} + \theta_A\right)x + \frac{13P\ell^3}{128EI} \end{cases} \quad (11.1.84)$$

よって、

$$y_B = \left(-\frac{7P\ell^2}{32EI} + \theta_A\right)\ell + \frac{13P\ell^3}{128EI} = \theta_A \ell - \frac{15P\ell^3}{128EI} \quad (11.1.85)$$

ここで、 $y_B = 0$ であるから、

$$\theta_A = \frac{15P\ell^2}{128EI} \quad (11.1.86)$$

また、 θ_B は式(11.1.84)の y' に $x = \ell$ を代入すれば求められるので、

$$\begin{aligned} \theta_B &= -\frac{7P\ell^2}{32EI} + \theta_A = -\frac{7P\ell^2}{32EI} + \frac{15P\ell^2}{128EI} \\ &= -\frac{13P\ell^2}{128EI} \end{aligned} \quad (11.1.87)$$

ここまでみてきてわかる通り、結局のところ、面積や図心を解くのが好き(得意)か、微分方程式を解くのが好き(得意)かで、解法を選ぶことになるだろう。なお、問題文の「点 A」や「点 B」と、面積モーメント法の「点 A」や「点 B」を混同しないように注意すること。

【例題 11.9】途中で荷重が作用する梁のたわみ(3)

下図において、荷重点のたわみを求めなさい(【例題 5.8】、【例題 6.16】)。

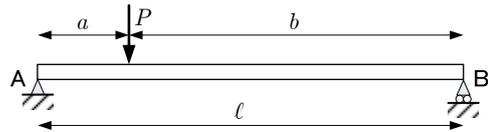


図 5.3.7 途中で荷重を受ける両端単純支持梁(再掲)

【略解】

曲げモーメントは

$$M = \begin{cases} (\ell - a)Px & (0 \leq x \leq a) \\ -\frac{aP}{\ell}(x - \ell) & (a \leq x \leq \ell) \end{cases} \quad (11.1.88)$$

であるから、BMD は図 11.1.13 のようになる。

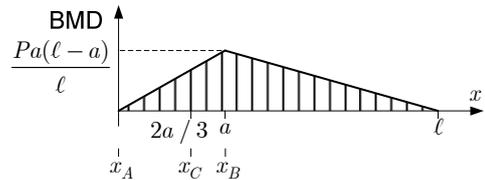


図 11.1.13 BMD【例題 11.9】

面積モーメント法の公式より、

$$y_B = y_A + (x_B - x_A)\theta_A - \frac{(x_B - x_C)S_{AB}}{EI} \quad (11.1.89)$$

であり、

$$\begin{cases} y_A = 0, x_B = a, x_A = 0, x_C = \frac{2a}{3}, \\ S_{AB} = \frac{Pa^2(\ell - a)}{2\ell} \end{cases} \quad (11.1.90)$$

であるから、

$$\begin{aligned} y_B &= 0 + (a - 0)\theta_A - \frac{(a - 2a/3)Pa^2(\ell - a)}{EI \cdot 2\ell} \\ &= a\theta_A - \frac{Pa^3}{6EI\ell}(\ell - a) \end{aligned} \quad (11.1.91)$$

ここで、点 A のたわみ角 θ_A は未知数なので、これを求めてみる。この場合には、右端を公式の点 B に設定すればよく、この場合には、

$$\begin{cases} y_B = 0, y_A = 0, x_B = \ell, x_A = 0, \\ x_C = \frac{\ell + a}{3}, S_{AB} = \frac{Pa(\ell - a)}{2} \end{cases} \quad (11.1.92)$$

となるので、

$$0 = 0 + (\ell - 0)\theta_A - \frac{[\ell - (\ell + a)/3] Pa(\ell - a)}{EI} \frac{1}{2} \quad (11.1.93)$$

よって,

$$\theta_A = \frac{Pa(\ell - a)(2\ell - a)}{6EI\ell} \quad (11.1.94)$$

したがって, 式(11.1.91)より,

$$y_B = a \times \frac{Pa(\ell - a)(2\ell - a)}{6EI\ell} - \frac{Pa^3}{6EI\ell} (\ell - a) \quad (11.1.95)$$

$$= \frac{Pa^2(\ell - a)^2}{3EI\ell}$$

11.2. Clapeyron の 3 モーメントの式

教科書の 115 ページや参考書の 93 ページには, 3 モーメントの式という公式が示されている. この式も, 覚えておけば便利かもしれないので, 興味のある者は勉強してみるといいであろう.

11.3. Bernoulli-Euler の仮説

実は, これまで, 梁のたわみを求める際に, 図 11.3.1 のように, 「変形後も断面は平面のまま, かつ, 断面は中心線と直交する」という前提で定式化してきた. これはあくまでも近似であり, Bernoulli-Euler (ベルヌーイ-オイラー) の仮説と呼ばれる.

実際の断面は変形後は平面にはならず, 図 11.3.2 のように曲面になる. また, 梁の表面に対しては直交するが, 中心線に対しては直交しない. 中心線と交わる場所では, 上下方向と中心線に直交する方向との間を通る.

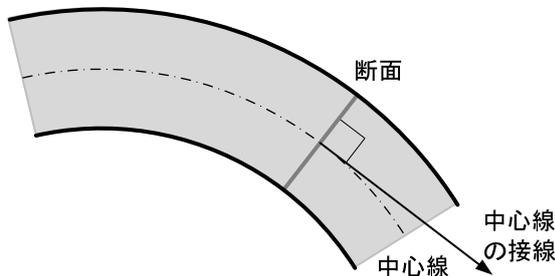


図 11.3.1 Bernoulli-Euler の仮説

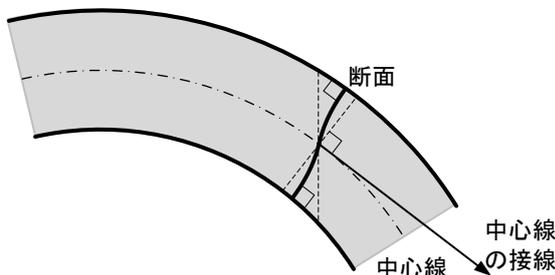


図 11.3.2 実際の断面形状

これはどういうことかということ, もし, 純曲げであれば図 11.3.1 のように断面は中心線に対して直交するし断面は平面であるが, もし, せん断力のみであれば図 11.3.3 のようになるが, 実際には曲げとせん断の両方が作用しているので, その中間である図 11.3.2 のようになる, というのである.

梁が細くなればなるほど (板厚が薄くなればなるほど), せん断の影響は小さくなり, Bernoulli-Euler の仮説に近い変形になることが理論的にわかっている. 材料力学ではもともと細長い梁を対象としていることもあり, Bernoulli-Euler

の仮説を用いて定式化している.

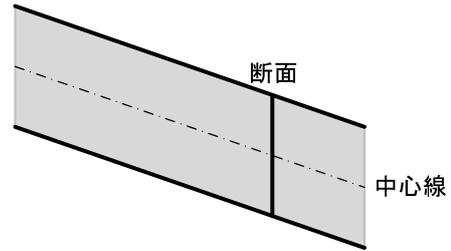
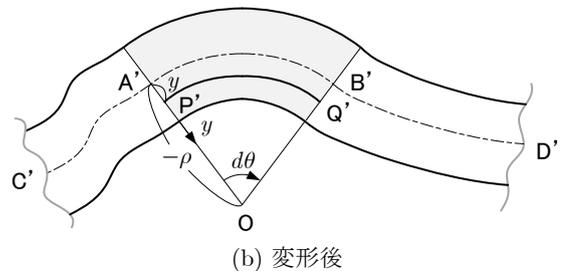


図 11.3.3 せん断変形のみの場合の断面形状

なお, Bernoulli-Euler の仮説はどこで用いられていたかという, 式(4.1.2), あるいは(4.1.11)

$$\theta = y' \quad (11.3.1)$$

である. 実は, 純曲げを考えた時の図 3.3.1(b)からもわかる通り, θ とは, 断面の傾斜角を表している. これに対し, y' は中心線, すなわち, たわみ曲線の傾斜角を表している. 言い換えれば, Bernoulli-Euler の仮説とは, 断面の傾斜角と中心線の傾斜角とが一致する, という仮説なのである.



(b) 変形後

図 3.3.1 純曲げによる歪 (再掲)

実は, 両者の差は, いわゆる「せん断歪」となっている. 簡単のため図 11.3.4 のように断面は平面のままと仮定すると, 角度 γ

$$\gamma \equiv y' - \theta \quad (11.3.2)$$

がせん断歪となっている. イメージとしては, まず, 角度 θ だけ微小部分が傾いて, そのあと, γ だけひしゃげた, という感じである.

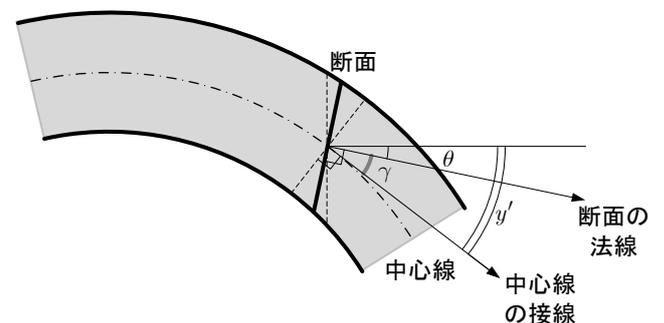


図 11.3.4 Timoshenko 梁

11.4. Timoshenko 梁

図 11.3.4 のように, せん断変形も考慮した梁理論は, 考案者の名をとって, Timoshenko (ティモシェンコ) 梁理論と呼ばれる. Timoshenko 梁では

$$\text{釣り合い式: } F = M' \quad (11.4.1)$$

$$\text{構成方程式: } M = -EI\theta' \quad (11.4.2)$$

という部分はこれまでの Bernoulli-Euler 梁と同じであるが、Bernoulli-Euler の仮説(11.3.1)の代わりに、次の構成方程式および変位-歪関係式を用いる。

$$\text{構成方程式: } F = kGA\gamma \quad (11.4.3)$$

$$\text{変位-歪関係式: } \gamma = y' - \theta \quad (11.4.4)$$

ただし、 G は横弾性係数 (せん断弾性係数, shear modulus) と呼ばれる。また、 k はせん断修正係数 (shear correction factor) と呼ばれる、断面形状によって決まる定数で、円断面であれば $k = 6/7$ 、矩形断面であれば $k = 5/6$ といった値が用いられる (様々な理論が提唱されており、円断面や矩形断面でもこれらとは違う値もいくつか提唱されている)。

式(11.4.1)~(11.4.4)を整理すると、SFD と BMD から次の連立微分方程式を解けば解が得られることがわかる。

$$\theta' = -\frac{M}{EI} \quad (11.4.5)$$

$$y' = \theta + \frac{F}{kGA} \quad (11.4.6)$$

ただし、境界条件かが問題となる。例えば、固定端の場合、 θ を 0 とするのか、 y' を 0 とするのかで解が異なったものになる。実際、 θ を 0 とすると、式(11.4.6)より、 y' は 0 にはならない ($F = 0$ でない限りは)。この点については様々な議論があり、実際の設計・解析では、実物の状況に応じて $y' = 0$ にするか $\theta = 0$ にするかを判断することになる。

しかし、材料力学の範囲では、固定端では $\theta = 0$ と仮定する場合が多いようである。

【例題 11.10】先端にせん断荷重を受ける Timoshenko 梁

先端にせん断荷重 P を受ける片持ち梁のたわみ曲線を求めなさい。

【略解】

この場合、曲げモーメント M およびせん断力 F は

$$\begin{aligned} M &= -P(\ell - x) \\ F &= P \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

となる。したがって、たわみ方程式(11.4.5)、(11.4.6)は

$$\theta' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(\ell - x) \quad (11.4.8)$$

$$y' = \theta + \frac{P}{kGA} \quad (11.4.9)$$

となる。まず、式(11.4.8)を

$$x = 0: \theta = \theta_0 \quad (11.4.10)$$

という境界条件のもとで解くと、

$$\theta = \theta_0 + \frac{P}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \ell x \right) \quad (11.4.11)$$

これを式(11.4.9)に代入すると、

$$y' = \theta_0 + \frac{P}{EI} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \ell x \right) + \frac{P}{kGA} \quad (11.4.12)$$

これを

$$x = 0: y = 0 \quad (11.4.13)$$

という境界条件のもとで解くと、

$$y = \theta_0 x + \frac{P}{EI} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\ell x^2 \right) + \frac{P}{kGA} x \quad (11.4.14)$$

いま、固定端での角度の境界条件を

$$x = 0: \theta = 0 \quad (11.4.15)$$

としたとすれば、式(11.4.14)より、たわみ曲線は

$$y = \frac{P}{EI} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\ell x^2 \right) + \frac{P}{kGA} x \quad (11.4.16)$$

つまり、Bernoulli-Euler 梁に比べて右辺の第三項が加わることになる。

これに対して、

$$x = 0: y' = 0 \quad (11.4.17)$$

としたとすれば、式(11.4.12)より、

$$\theta_0 = -\frac{P}{kGA} \quad (11.4.18)$$

となるので、式(11.4.14)に代入すれば、たわみ曲線は

$$y = \frac{P}{EI} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\ell x^2 \right) \quad (11.4.19)$$

となって、Bernoulli-Euler 梁と一致する。

【例題 11.11】分布荷重を受ける Timoshenko 梁

片持ちの Timoshenko 梁が単位長さあたり w の分布せん断荷重を受ける際のたわみ曲線を求めなさい。

【略解】

この場合、曲げモーメント M およびせん断力 F は

$$\begin{aligned} M &= -\frac{w}{2}(\ell - x)^2 \\ F &= w(\ell - x) \end{aligned} \quad (11.4.20)$$

となる。したがって、たわみ方程式(11.4.5)、(11.4.6)は

$$\theta' = \frac{w}{2EI}(\ell - x)^2 \quad (11.4.21)$$

$$y' = \theta + \frac{w(\ell - x)}{kGA} \quad (11.4.22)$$

となる。まず、式(11.4.21)を

$$x = 0: \theta = \theta_0 \quad (11.4.23)$$

という境界条件のもとで解くと、

$$\theta = \theta_0 + \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{3}x^3 - \ell x^2 + \ell^2 x \right) \quad (11.4.24)$$

これを式(11.4.22)に代入すると、

$$y' = \theta_0 + \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{3}x^3 - \ell x^2 + \ell^2 x \right) + \frac{w(\ell - x)}{kGA} \quad (11.4.25)$$

これを

$$x = 0: y = 0 \quad (11.4.26)$$

という境界条件のもとで解くと、

$$\begin{aligned} y &= \theta_0 x + \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{\ell}{3}x^3 + \frac{\ell^2}{2}x^2 \right) \\ &\quad + \frac{w}{kGA} \left(\ell x - \frac{1}{2}x^2 \right) \end{aligned} \quad (11.4.27)$$

いま、固定端での角度の境界条件を

$$x = 0 : \theta = 0 \quad (11.4.28)$$

としたとしたら、式(11.4.27)より、たわみ曲線は

$$y = \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{12} x^4 - \frac{\ell}{3} x^3 + \frac{\ell^2}{2} x^2 \right) + \frac{w}{kGA} \left(\ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) \quad (11.4.29)$$

となる。これに対して、

$$x = 0 : y' = 0 \quad (11.4.30)$$

としたとしたら、式(11.4.25)より、

$$\theta_0 = -\frac{w\ell}{kGA} \quad (11.4.31)$$

となるので、式(11.4.14)に代入すれば、たわみ曲線は

$$y = \frac{w}{2EI} \left(\frac{1}{12} x^4 - \frac{\ell}{3} x^3 + \frac{\ell^2}{2} x^2 \right) + \frac{w}{2kGA} x^2 \quad (11.4.32)$$

となる。どちらの境界条件の場合にも、Bernoulli-Euler 梁とは一致しない。実際、式(11.4.5)、(11.4.6)より、

$$y'' = -\frac{M}{EI} + \frac{F'}{kGA} \quad (11.4.33)$$

となるので、分布荷重の場合のように、 F' が 0 にならない場合には、境界条件のいかんにかかわらず、Bernoulli-Euler 梁とは一致しない。

11.5. まとめ

面積モーメント法を紹介し、これまでに学んだ積分法と比較し、その特徴を確認した。また、Timoshenko 梁理論について紹介した。積分法（特異関数法）、重ね合わせ法、面積モーメント法のどの方法を使って解くかは解く人の自由であるが、短時間で解こうとする場合には、適宜、使い分けることが肝要である。個人的には、重ね合わせ法をメインにして、重ね合わせ法では解きにくい問題は特異関数法で解くのがいいのではないかと考えている。

11.6. 宿題

教科書の 6.1 節の最初から 6.1.1 節の終わりまでを手書きでまとめなさい（ただ丸写しするのは×）。

第12章 座屈現象とその解法(1)

今回の講義から、「材料力学Ⅱ」のもう一つの分野、すなわち、座屈 (buckling) について学ぶ。座屈は軽構造設計において大変重要かつクリティカルな現象であり、その特徴 (怖さ) はしっかりと理解しておく必要がある。そこで、今回は航空宇宙工学における座屈現象の例をいくつか示し、座屈の特徴について議論する。

12.1. 圧縮は不安定を招く

座屈理論について学ぶ前に、「安定」、「不安定」について簡単に解説しよう。

- ① 図 12.1.1 は、床の上に置いた箱を移動する様子を上から眺めた図である。(a)は箱を押す場合、(b)は箱にひもをつけて、ひもを引っ張る場合を表している。さて、どちらが箱を移動しやすいであろうか？

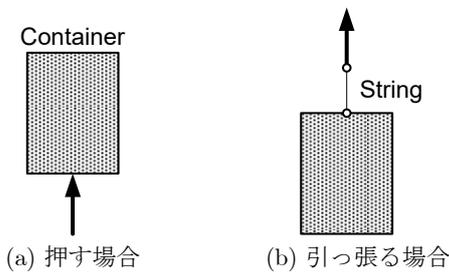


図 12.1.1 床の上での箱の移動

- ② リアカーは荷物を引くようになっているが、なぜ、押すようになっていないのだろうか？
- ③ 棒の先端におもりをつけて床の上に立てる場合と、棒を天井から吊るす場合とでは、どちらが危ないか？



図 12.1.2 おもりを取り付けた棒

- ④ 図 12.1.3 のように、梁を曲げて両端を床に固定し、中央部におもりを少しずつ積んでゆくと、何が起こるか？

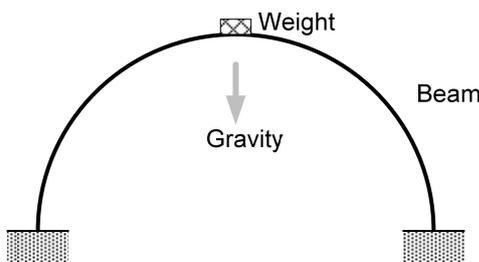


図 12.1.3 おもりを取り付けて曲げた棒

一般に、物体に圧縮力をかけると、構造は不安定になりやすい。実際、圧縮力をかけると、その弾性により反発力が生じ、あるところで押し止まるはずであるが、不安定になると、「押せば押すほど前に進む」という、不思議な状況になる。

12.2. 座屈

座屈とは、簡単に行ってしまうと、物体に圧縮荷重をかけた際、ある荷重を超えると、物体がつぶれたり倒れたりする現象のことである。例えば、図 12.1.2(a)の場合、おもりが小さければ、棒 (column) は真っ直ぐなまま縮むが、おもりを積んでゆくと、あるところで耐えきれなくなって、図 12.2.1 のように横に倒れることは容易に想像できるだろう。

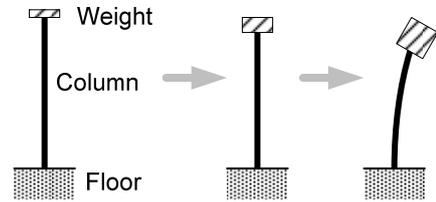


図 12.2.1 長柱座屈

座屈の定義をもう少し数学的に表現すると、以下のようになる。すなわち、いま、梁の各点の荷重ベクトル (図 12.1.2 では先端以外は 0) をある値 P からわずかに ΔP だけ増加させた際に、物体の各点の変位ベクトルが u からわずかに Δu だけ増加したとしよう。このとき、 ΔP が微小であれば、次式が成り立つ。

$$\Delta P = K \Delta u \quad (12.2.1)$$

ここで、 K は接線剛性マトリクス (Tangent Stiffness Matrix) と呼ばれる。例えば、バネであれば、 K はスカラーで、いわゆるバネ定数を表している。バネの場合は、 K は定数であるが、一般には、 K は定数マトリクスとはならず、そのときの荷重 P (あるいは、変位 u) の関数になっている。

通常、 K は正値対称、すなわち、 K の固有値は全て正であるが、荷重 P が大きくなると、正値でなくなる、すなわち、 K の固有値のうち、 0 となるものが出てくる。このとき、固有値 0 に対応する固有ベクトルを u_0 とすれば、物体は荷重を追加しなくても、 u_0 方向に微小変位が可能ということになる。つまり、荷重は P のままなのに、物体はずるずると u_0 方向に変形してしまう。

このように、固有値が 0 になる瞬間を座屈点と呼び、多くの場合、この座屈点を超えると解が複数存在する (解が分岐する)。図 12.2.1 の例でいえば、おもりが大きくなっても、真っ直ぐなまま縮む解自体は存在する。しかし、その他に、横に倒れる解が存在するのである。

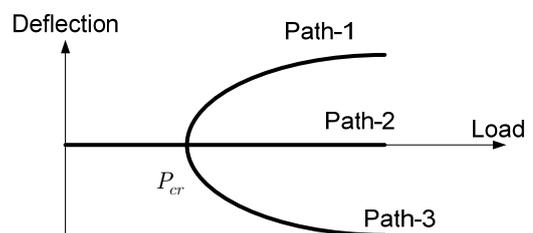


図 12.2.2 座屈経路

図 12.2.2 は横軸に荷重，すなわち，おもりの重力を，縦軸に棒の先端のたわみをとってグラフにしたものである。ただし，図 12.2.1 の右側の図のように，たわみの符号は右側を正とする。荷重がある値 P_{cr} よりも小さい場合には，つねにたわみは 0，すなわち，棒は真っ直ぐに縮む。しかし， P_{cr} を超えると，右に倒れる解 (Path-1)，左に倒れる解 (Path-3)，そして，真っ直ぐ縮む解 (Path-2) の 3 つの解が存在する。

また，それら複数の解のうち，実際に物理的に起こり得るのは，固有値が正となる形状である。図 12.2.1 の例でいえば，座屈点以降，真っ直ぐなまま縮む解では， K の固有値は負となり，横に倒れる解では正となる。したがって，実際に起こり得るのは横に倒れる解であることがわかる。

つまり，座屈点以前は，真っ直ぐに縮んでいたのが，座屈点以降は横に倒れてしまう。このように，座屈点以降はそれまでの変形のパターンから変形が変化する。この変化を座屈と呼び，変形のパターンが変化する点を座屈点と呼ぶ。

また，別の観点からは，「歪エネルギー (strain energy) 小さい解ほど起こりやすい」ということが知られている。歪エネルギーについては「材料力学Ⅲ」で学ぶことになるが，バネの場合のバネのエネルギー (バネ定数 k で伸びが x の際，エネルギーは $kx^2/2$) のようなものである。棒が真っ直ぐに縮む場合の歪エネルギーと，横に倒れた場合の歪エネルギーとでは，後者の方が小さいので，後者が起こるのである。

なお，左に倒れるか右に倒れるかは判断できない。これは，どちらの解も歪エネルギーが同じだからである。

12.3. 座屈現象

実際の座屈 (分岐座屈) には表 12.3.1 に示すものなど，様々なものがある。

表 12.3.1 分岐座屈の分類

座屈様式	対象部材
軸力部材	
Euler 座屈	長く真っ直ぐな部材
ねじれ座屈	長い真っ直ぐな棒で，曲げ剛性に比べてねじり剛性が小さい部材
クリップリング座屈	薄い板で構成された断面の部材 (短い場合)
短柱の座屈 (厚い断面)	厚くて安定な断面の部材
短柱の座屈 (クリップリング座屈する断面)	薄い板で構成された断面の部材
ビームカラム	長い真っ直ぐな棒で，初期不整合がある場合や，圧縮に加えて横荷重が入る場合
曲げ部材	
横倒れ座屈	断面の高い梁
平板	
圧縮座屈	圧縮を受ける薄板
せん断座屈	せん断荷重を受ける薄板
曲げ座屈	面内曲げを受ける薄板
補強平板	
(組み合わせ)	ウェブ・フランジ・スティッフナから成る張力場梁やスティッフナを有する補強パネル等
曲面版	
圧縮座屈	圧縮を受ける曲面パネル
せん断座屈	せん断を受ける曲面パネル
円筒座屈	圧縮を受ける円筒

※この分類に際しては，滝敏美，「航空機構造解析の基本」，表 6.5-1 を参考にさせていただいた。この文献の pdf は以下のサイトからダウンロードできる。

http://www.geocities.jp/toshimi_taki/aircraft/aircraft_struct_ip.htm

表 12.3.1 にはいわゆる分岐座屈に分類されるものを示したが，この他，図 12.1.3 のような飛び移り座屈 (snap-through buckling) と呼ばれる座屈様式もある。

ここではそのいくつかを紹介しよう。

12.3.1. オイラー座屈 (Euler Buckling)

オイラー座屈 (Euler buckling) は長柱座屈 (long column buckling) とも呼ばれ，細長い棒の両端を軸方向に圧縮した際，圧縮力がある値 (座屈荷重，buckling load と呼ばれる) を超えると棒が軸と垂直方向にたわむ現象をいう。一言でいえば，軸圧縮から曲げに“変形が逃げる”現象である。図 12.3.1 は Euler 座屈の実験の写真であり，詳しくは 12.5 以降に述べるが，両端の境界条件 (単純支持か固定か，など) によって座屈荷重は異なる。また，棒に初期不整合があると (棒が少したわんでいると)，座屈荷重はかなり下がることも知られている。

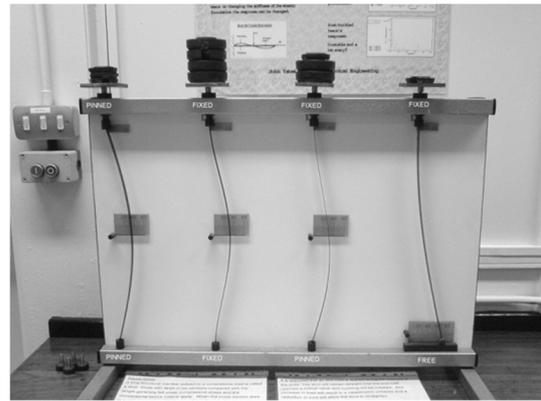


図 12.3.1 Euler 座屈 (Wikipedia より)

12.3.2. ねじれ座屈 (Torsional Buckling)

図 12.3.2 のように，薄肉断面梁に軸圧縮荷重をかけると，Euler 座屈する前に断面がねじれる場合がある。これがねじれ座屈である。例えば航空機構造においてアングル材など薄肉でねじり剛性の弱い梁に圧縮をかけざるを得ない部分がある場合には注意を要する。実際，そういった梁の場合，梁が十分に細長い場合には Euler 座屈を起こすが，短くなるとねじれ座屈を起こす。図 12.3.3 は等辺アングル材の細長比 ($l/\sqrt{I_{zz}/A}$) と座屈荷重との関係を表したもので，細長比が小さくなると， z 軸 (図心を通る 135° 方向の軸) まわりの Euler 座屈 (曲げ座屈) を起こす荷重よりもねじれ座屈荷重の方が小さくなる。

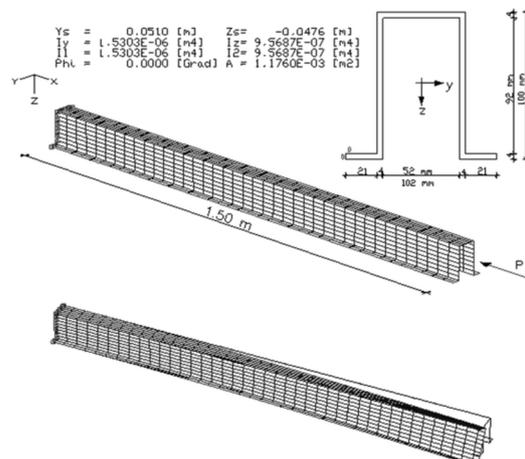


図 12.3.2 ねじれ座屈

(<http://www.infograph.eu/beispiel/pki.htm>)

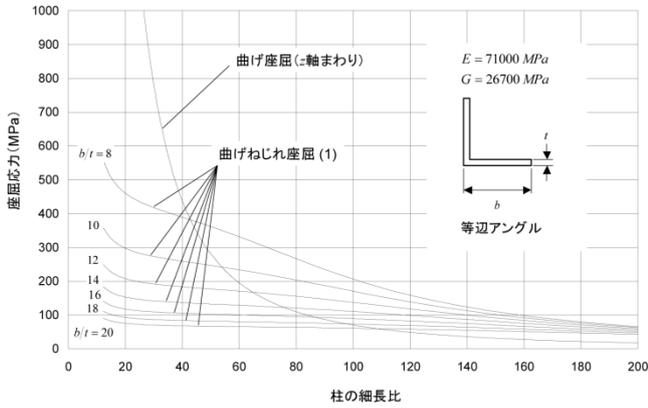


図 12.3.3 アングル材のねじれ座屈 (滝)

12.3.3. クリップリング (Crippling)

クリッピング座屈 (crippling) とは、局部座屈 (local buckling) の一種で、Euler 座屈のように棒全体がたわむのではなく、断面の一部が変形する座屈現象である (図 12.3.4)。薄肉断面の場合に起こる可能性があり、航空機構造のように軽量性を求められる構造では特に注意する必要がある。実際、薄肉パネルを補強材として C 型断面材やアングル材などがよく用いられるが、その際には補強材に作用する荷重がクリッピング座屈荷重を超えないよう、細心の注意をもって設計する必要がある。

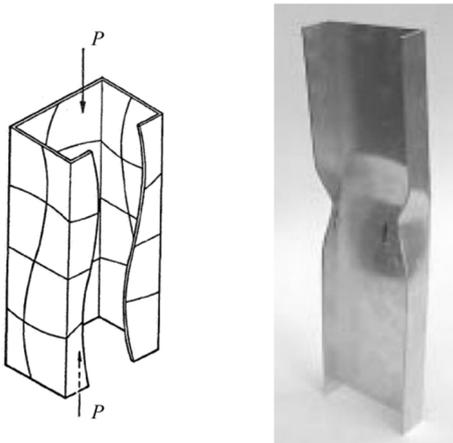


図 12.3.4 クリップリング (滝)

12.3.4. 横倒れ座屈 (Lateral Buckling)

I 型断面材など、背の高い (厚さ方向が長い) 部材にせん断、あるいは曲げ荷重が作用する場合、Euler 座屈、すなわち、曲げ変形ではなく、部材が横に倒れ、曲げとねじりが連成した座屈を起こすことがある。これを横倒れ座屈 (lateral buckling) と呼ぶ。

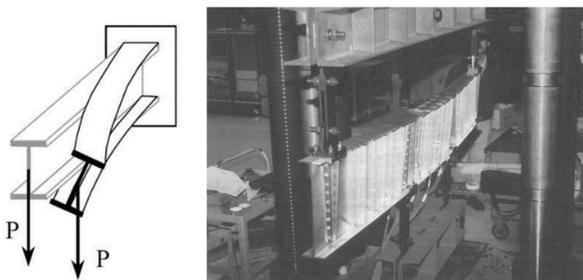


図 12.3.5 横倒れ座屈 (滝)

12.3.5. 薄板の圧縮座屈

薄板に面内圧縮荷重をかけると、二軸方向にたわむ (図 12.3.6)。航空機構造は薄板構造が多いので、当然ながら、これが起こらないよう、荷重が座屈荷重を超えないようにし設計しなければならない。

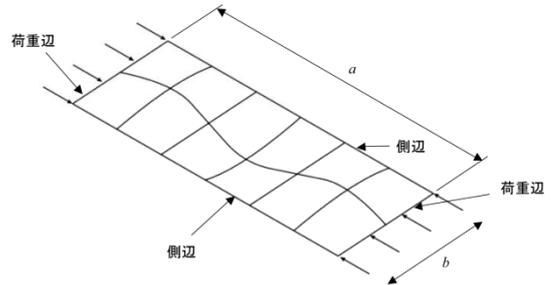


図 12.3.6 薄板の圧縮座屈 (滝)

12.3.6. 薄板のせん断座屈と張力場

補強材を有する薄板パネル構造に面内せん断荷重をかけると、パネル部分 (ウェブと呼ばれる) がせん断座屈を起こし、斜め方向にしわがはいる (図 12.3.7)。これが起こると、ウェブはしわ方向の張力しか負担できなくなる。このような状態は「張力場 (tension field)」と呼ばれる。せん断座屈は航空機の外皮などで起こる可能性があり、注意を要する。場合によっては、張力場を許容して設計する場合もある。詳しくは「航空機構造力学」で勉強してほしい。

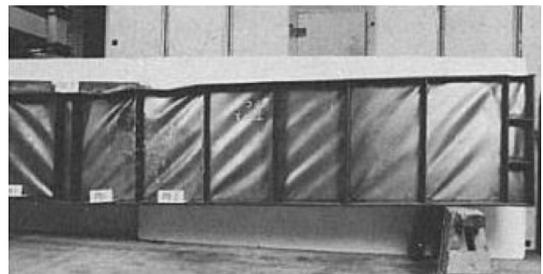
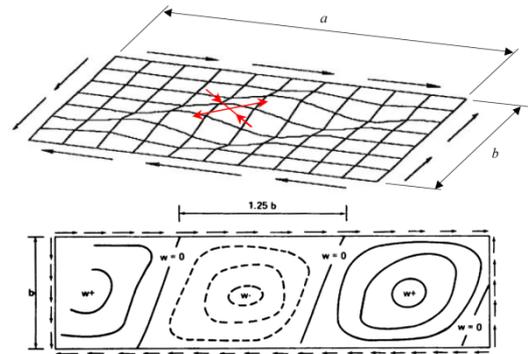


図 12.3.7 せん断座屈 (滝)

12.3.7. 円筒座屈

ロケットのタンクなど、円筒の座屈モードとしては図 12.3.8(b) のようなダイヤモンドパターン (diamond buckling) の他、(a) のような自重による座屈 (elephant foot buckling), (c) のような、ねじれながら座屈するものなど、荷重条件や円筒の剛性等に応じていくつかのモードがある。

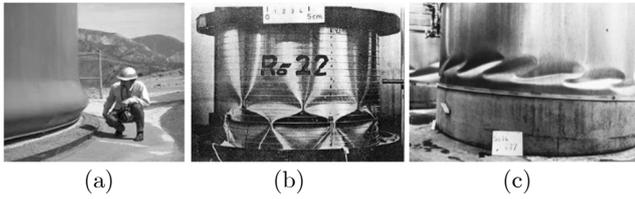


図 12.3.8 円筒殻の座屈

ちなみに、図 12.3.9 のようなダイヤモンドパターンの形をした缶コーヒーがあるが、あのパターンは吉村パターンとも呼ばれ、1950 年代に、当時の吉村慶丸東大教授が世界で初めて明らかにした円筒殻の座屈パターンである。当時、円筒殻の座屈荷重の実験値が理論値よりも小さく、理論に問題があるのではと言われていたが、吉村教授が円筒殻の座屈は非常に特殊で、ほぼ不伸長な有限変形を起こして座屈することを明らかにした。その後、東大・宇宙航空研究所 (現在の宇宙科学研究所) の三浦公亮教授 (地図の「ミウラ折り」の発案者) が研究を進め、退職後、飲料メーカとタイアップしてダイヤモンドパターンの缶を発売した。



図 12.3.9 吉村パターン

12.3.8. 補強パネルの座屈

以上の他、航空宇宙関係で考慮される座屈としては、例えば図 12.3.10 のような、補強パネルの座屈などが挙げられる。

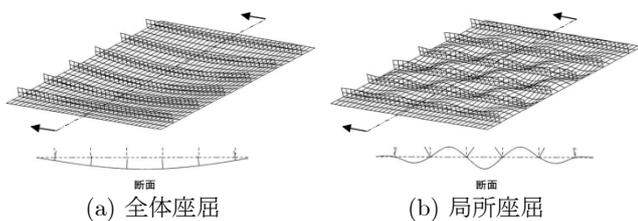


図 12.3.10 補強パネルの座屈 (滝)

12.4. Euler 座屈

詳細は 12.5 節以降で述べるが、長さ L 、曲げ剛性 EI の両端単純支持梁の Euler 座屈荷重 P_{cr} は

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (12.4.1)$$

となることが知られている (添え字の cr は critical の略)。そして、座屈後の変形を計算してゆくと、梁の中央部のたわみ δ と荷重 P との関係は図 12.4.1 のようになる。このグラフからわかる通り、座屈荷重を超えると、わずかな荷重の増加に対してたわみが一気に大きくなる。そして、通常は破壊

に至る (非常に柔軟な梁であれば、破壊せず、荷重を 0 にすればもとに戻る)。

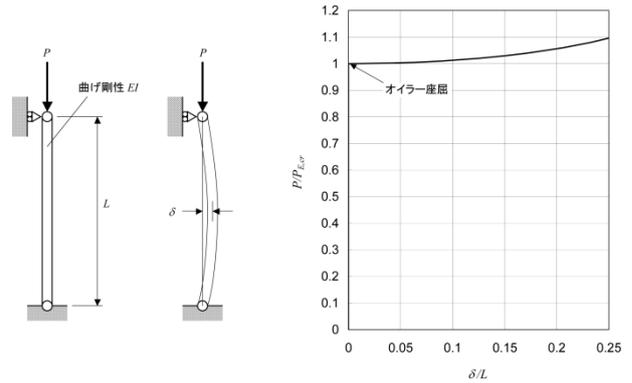


図 12.4.1 両端単純支持梁の Euler 座屈荷重 (滝)

では、この座屈荷重がどれくらい小さな値かという、例えば、板厚 h 、幅 (奥行) b の矩形断面梁の場合、 $I = bh^3 / 12$ 、断面積は $A = bh$ であるから、

$$P_{cr} = EA \frac{\pi^2 h^2}{12L^2} \quad (12.4.2)$$

となる。したがって、座屈時の圧縮歪は

$$\epsilon_{cr} = \frac{\pi^2 h^2}{12L^2} \quad (12.4.3)$$

であり、例えば、 $h/L = 0.01$ の場合であれば、

$$\epsilon_{cr} \approx 82.2 \times 10^{-6} \quad (12.4.4)$$

厚さ 1mm、長さ 10cm の定規であれば、縮み量 u_{cr} は

$$u_{cr} = \epsilon_{cr} L = 8.22 \times 10^{-6} \text{ m} = 8.22 \mu\text{m} \quad (12.4.5)$$

となる。つまり、わずか $8.22 \mu\text{m}$ 縮む程度の圧縮力で座屈してしまうのである。

なお、これは、梁が理想的に真っ直ぐな場合であって、実際に梁を製作すると、少したわんだもの (初期不整を有するもの) になることもある。その場合、図 12.4.2 のように、初期不整がわずかにあるだけで、より低い荷重でたわみが大きくなる。つまり、破壊に至りやすい。したがって、設計する際には、座屈荷重よりも低い値を許容値として設定する (安全余裕を大きくする) ことが必要となる。

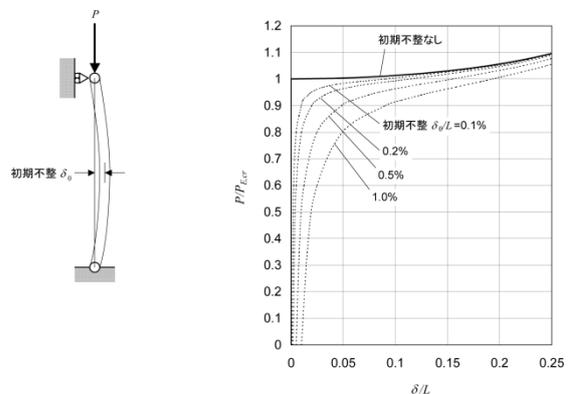


図 12.4.2 初期不整を有する両端単純支持梁の座屈 (滝)

※ちなみに、図 12.4.1 のグラフを得るには、次の連立微分方程式を解けばよい ($\theta(0)$ を未知数として、 $\theta(l/2) = 0$ となるように Newton 法で収束計算をし、 $\theta(0)$ を決定する)。

$$\begin{cases} EI\theta'' = P \sin \theta, & y' = \sin \theta \\ y(0) = 0, & \theta'(0) = 0, & \theta(\ell/2) = 0 \end{cases} \quad (12.4.6)$$

12.5. 片持ち梁の座屈荷重

この節では、まずは 12.5 節で座屈荷重を求める理論を理解し、次に、12.5.2 節で座屈を固有値問題ととらえる考え方について述べる。

12.5.1. 座屈の力学

これまで、力やモーメントの釣り合いは変形前の形状で考えてきた (図 1.10.2)。しかし、座屈を考える際には、座屈後の状態が座屈前とは大きく異なるため、変形の影響を無視できない。そのため、変形後の状態で力やモーメントの釣り合いを考える。

まず、この節では片持ち梁の座屈を考えよう。いま、図 12.5.1 のように圧縮荷重 P によって梁が座屈し、先端が δ だけたわんだとしよう。このとき、固定反力 R_x および反モーメント M_A は、それぞれ力の釣り合いと固定点 A まわりのモーメントの釣り合いから

$$R_x - P = 0, \quad M_A - P\delta = 0 \quad (12.5.1)$$

つまり、

$$R_x = P, \quad M_A = P\delta \quad (12.5.2)$$

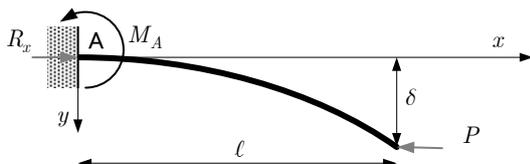


図 12.5.1 座屈した片持ち梁

このとき、 x 断面で梁を切ると図 12.5.2 のようになり、力の釣り合いおよび点 A まわりのモーメントの釣り合いは

$$R_x + N_x = 0, \quad M_A + M + N_x y = 0 \quad (12.5.3)$$

したがって、

$$\begin{cases} N_x = -R_x = -P \\ M = -M_A - N_x y = P(y - \delta) \end{cases} \quad (12.5.4)$$

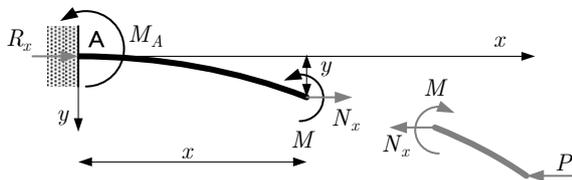


図 12.5.2 座屈した片持ち梁の釣り合い

よって、たわみ方程式は、

$$y'' = -\frac{P}{EI}(y - \delta) \quad (12.5.5)$$

この方程式は $y = \delta = 0$ 、つまり、真っ直ぐな梁 (真っ直ぐで圧縮だけされる梁) という自明な解をもつことは明らかであろう。しかし、境界条件さえ満たせば、それ以外にも解は存在する。実際、式(12.5.5)は一般解

$$y = \delta + A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x \quad (12.5.6)$$

をもつ。いま、固定点での境界条件は

$$x = 0 : y = 0, \quad y' = 0 \quad (12.5.7)$$

であるから、

$$\delta + A = 0, \quad B \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0 \quad (12.5.8)$$

したがって、

$$A = -\delta, \quad B = 0 \quad (12.5.9)$$

であり、たわみ曲線は

$$y = \delta \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x \right) \quad (12.5.10)$$

そして、自由端での境界条件は

$$x = \ell : y = \delta \quad (12.5.11)$$

であるから、式(12.5.10)より、

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 0 \quad (12.5.12)$$

つまり、 n を自然数として、

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (12.5.13)$$

でなければならないことがわかる。逆に言えば、式(12.5.13)が満たされれば、自明な解 ($y = \delta = 0$) 以外にも解が存在するのである！そして、これが座屈解なのである！

このとき、式(12.5.13)より、

$$P = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (12.5.14)$$

つまり、 P がこの値のときに座屈が起こる。この式から、座屈が起こる P の最小値を P_{cr} とすれば、それは $n = 1$ のときで、

$$P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (12.5.15)$$

したがって、梁に圧縮荷重をかけてゆき、その値を徐々に大きくしてゆくと、荷重が式(12.5.15)の値になったときに座屈を生じる。つまり、これが座屈荷重なのである。そして、このとき、式(12.5.10)は

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2\ell}x \right) \quad (12.5.16)$$

となる (図 12.5.3)。このたわみ曲線は「座屈モード形状」、「座屈モード」と呼ばれる。正確には、式(12.5.14)において $n = 1$ としたものが式(12.5.16)であるので、式(12.5.16)は「一次の座屈モード」と呼ばれ、 $n = 2$ のときは、「二次の座屈モード」と呼ばれる。また、座屈荷重も「 n 次の座屈荷重」と呼ばれる。実際、式(12.5.14)は n 次の座屈荷重を表しており、このとき、座屈モードは

$$y = \delta \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x \right] \quad (12.5.17)$$

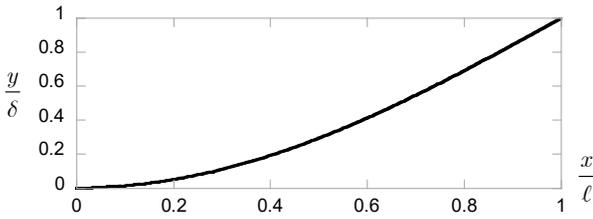
図 12.5.3 に片持ち梁の一次から三次までの座屈モードを示す。なお、式(12.5.5)は (片持ち梁の) 「座屈方程式」と呼ばれる。

上述の定式化では、境界条件として、固定点のみならず、先端でのたわみも $y = \delta$ を与えた。通常、境界条件は次のように与える。

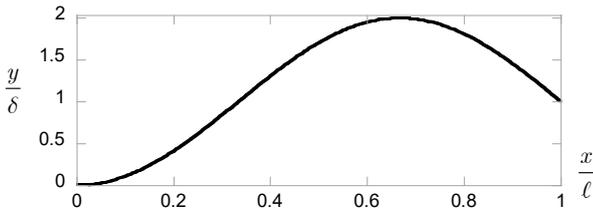
- 1) 変位を与えるか, 力を与える
- 2) 角度を与えるか, モーメントを与える

つまり, 変位と力を同時に境界条件として与えてはいけなく, 角度とモーメントを同時に境界条件として与えてもいけないのである. これはどういうことかという, 例えば変位と力の両方を境界条件として与えると, それらの両方を満たす解が一般には存在しない, ということである. 上述の座屈の場合であれば, 力 P がある値でない境界条件を満たす解が存在しない, ということである. ちなみに, 変位と力のペア, 角度とモーメントのペアは, どちらか一方を与えるともう一方が求まるという関係になっているわけだが, そのようなペアは conjugate pair と呼ばれる.

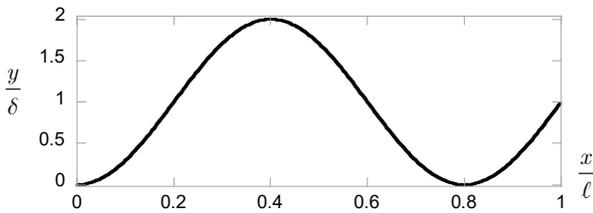
なお, $P = P_{cr}$ で座屈した後, さらに荷重を加えた場合の解を求めるには, もはや式(12.5.5)ではダメで, 非線形解析を行わないと解を出すことはできない.



(a) 一次モード



(b) 二次モード



(c) 三次モード

図 12.5.3 片持ち梁の座屈モード形状

※ 結局, ポイントは, 図 12.5.2 のように, たわんだ後の y を考慮し, N_x によるモーメント $N_x y$ を考えることにある. y は小さいはずだが, これを無視するかしないかで状況が変わるのである. 別の言い方をすれば, 今までは $P < P_{cr}$ の場合しか考えていなかったもので, $N_x y$ を考慮しても, 結局は真っ直ぐな梁の解しか存在せず, $N_x y$ を考慮しようがしまいが同じであったが, 今回のように $P \geq P_{cr}$ となるまで荷重を加える場合には考慮するのとは全く違う解が得られるのである.

12.5.2. 座屈の固有値問題

12.5.1 節では, 軸力 N_x によるモーメントを考慮した釣り合い式から, 軸圧縮力を受ける片持ち梁の変形形状の一般解(12.5.6)

$$y = \delta + A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (12.5.6)$$

を導いた. そして, 境界条件(12.5.7)

$$x = 0 : y = 0, y' = 0 \quad (12.5.7)$$

から式(12.5.6)の積分定数 A, B を δ の式で表し, もう一つの境界条件(12.5.11)

$$x = \ell : y = \delta \quad (12.5.11)$$

から, 荷重 P が満たすべき条件(12.5.12)

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0 \quad (12.5.12)$$

を導いた. この工程を, いっぺんにやってみよう. つまり, 式(12.5.6)に 3 つの境界条件(12.5.7), (12.5.11)を適用し, A, B, δ に関する 3 つの条件式を導いてみると,

$$\begin{cases} \delta + A = 0 \\ B = 0 \\ A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0 \end{cases} \quad (12.5.18)$$

となる. これを行列形式で書くと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.5.19)$$

この式は, 右辺が 0 ベクトルであることから, $A = B = \delta = 0$ という自明な解をもつ. これは, 梁が真っ直ぐなまま軸圧縮される解に相当している. これにくわえて, もし, 左辺の行列の絶対値が 0 であれば, 自明でない解も持つ. そこで, 実際に行列の絶対値を計算してみると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & 0 \end{vmatrix} = \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell \quad (12.5.20)$$

を得る. したがって,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (12.5.21)$$

より,

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0 \quad (12.5.22)$$

を得る. これは P が満たすべき条件式(12.5.12)に一致する. また, このときの A, B, δ は, α を任意の定数として,

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ \delta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12.5.23)$$

ここで, 一般に, 絶対値が 0 になる行列は, 固有値が 0 になる (固有値 0 をもつ). また, そのときの解は固有値 0 に対応した固有ベクトルになっている. つまり, 座屈とは, 境界条件から導かれる係数行列が固有値 0 になる問題に対応しており, その意味で, 座屈問題は固有値問題とみることができる. なお, 式(12.5.21)は固有方程式とも呼ばれる.

なお, 式(12.5.23)から, 座屈をすると, たわみ δ は任意の値 α をとれることになる. 極端な話, たわみが無限大に大きくなる解がある, というのが式(12.5.23)の意味である. 実

際には、たわみが大きくなると、材料力学の近似理論自体が成り立たなくなる(座屈方程式(12.5.5)が成り立たなくなる)ので、無限大になることはないが、大きくなり得ることは確かだ、理論が成り立たなくなる以前に、梁が破壊する可能性がある。これが座屈の一番恐ろしいところである。

12.6. 両端単純支持梁の座屈荷重

座屈荷重の計算についてイメージがつかめてきたところで、次は両端単純支持梁の座屈(図 12.6.1)を考えてみよう(この問題は本質的には片持ち梁の問題と同じであり、12.5節の結果を用いれば、座屈荷重は容易に求められるが、ここでは通常の手順に則って求めてみる)。

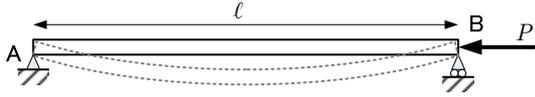


図 12.6.1 両端単純支持梁の座屈

点 A での反力は P となることは明らかなので、梁に作用する力やモーメントは図 12.6.2 のようになる。したがって、切断点まわりのモーメントの釣り合いは、

$$M - Py = 0 \quad (12.6.1)$$

したがって、たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad (12.6.2)$$

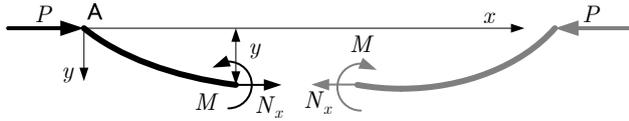


図 12.6.2 両端単純支持梁の釣り合い

このたわみ方程式の一般解は

$$y = A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x \quad (12.6.3)$$

であり、点 A, B での境界条件は、それぞれ

$$x = 0 : y = 0, \quad x = l : y = 0 \quad (12.6.4)$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.6.5)$$

を得る。したがって、固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 0 \quad (12.6.6)$$

したがって、 n を自然数として、

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = n\pi \quad (12.6.7)$$

これより、

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (12.6.8)$$

一次の座屈荷重は $n = 1$ のときで、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (12.6.9)$$

となって、片持ち梁の場合(式(12.5.15))の4倍になっていることがわかる。実は、この解は、式(12.5.15)で ℓ を $\ell/2$ にすればすぐに求められる。

なお、固有ベクトルは、式(12.6.5)より、

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12.6.10)$$

となるので、たわみ曲線(座屈曲線)は

$$y = \alpha \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x = \alpha \sin n\pi x \quad (12.6.11)$$

12.7. 端末条件係数と座屈応力

式(12.5.15)、(12.6.9)からわかる通り、座屈荷重を

$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (12.7.1)$$

と書けば、片持ち梁の場合は $C = 0.25$ 、両端単純支持梁の場合は $C = 1$ となる。この C は端末条件係数と呼ばれる。また、座屈する瞬間(直前)の垂直応力(座屈応力, buckling stress と呼ばれる)は

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\ell \sqrt{\frac{A}{CI}}\right)^2} \quad (12.7.2)$$

と書ける。ここで、一般に、

$$\rho \equiv \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (12.7.3)$$

は回転半径(radius of gyration)と呼ばれ、

$$\lambda \equiv \frac{\ell}{\rho} \quad (12.7.4)$$

は細長比(slenderness ratio)と呼ばれる(つまり、 λ が大きい梁ほど、細長い梁ということになる)。式(12.7.3)、(12.7.4)を(12.7.2)に代入すると、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{C}}\right)^2} \quad (12.7.5)$$

となる。そして、

$$\lambda_0 \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{C}} \quad (12.7.6)$$

は、梁の形状のみならず、境界条件(端末条件)によっても変化する値で、相当細長比(effective slenderness ratio)と呼ばれる。 λ_0 を用いると、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} \quad (12.7.7)$$

つまり、座屈応力は相当細長比が長いほど小さくなる。実際、細長い梁ほど座屈応力が大きくなることは容易に想像がくだらう。

12.8. 細長い物体の呼び名

細長い物体の呼び名として、「棒(bar)」、「梁(beam)」,

「柱 (column)」といったものをこれまで、目にしてきたことと思う。同じ物体なのに、なぜ呼び名が違うのだろうと思った者もいるだろう。実は、同じものでも、物体に作用する外力が違えば呼び名が変わる。

- 1) 外力が軸方向荷重、またはねじりモーメントだけの場合、「棒」と呼ぶ
- 2) 外力がせん断荷重、または曲げモーメントだけの場合、「梁」と呼ぶ
- 3) 外力が軸圧縮荷重で座屈が問題になるような場合、「柱」と呼ぶ

なぜこのように呼び名が変わるかという、それぞれの場合における物体の構造部材としての“役割”が違うからである。つまり、外力が違うということは、その物体が支える荷重の種類が違うということであり、構造解析では「与えられた荷重をどう支えて、要求される形状を保つか」が問題となるので、支える荷重の違いで物体を分類するのである。その際、例えば、建物の柱は圧縮荷重を支え、座屈が起らないように作られるので、柱と同じ機能・役割を果たすものは全て「柱」と呼ぼう、という発想から、「柱」という呼び名が付けられてきたと思われる。

ただし、このプリントでは、外力がどんなものであろうと、結果として物体に曲げモーメントが作用してたわむ場合には「梁」と呼び、軸力しかかからず、たわまない場合には「棒」と呼んでいる。

12.9. まとめ

軽量／薄肉構造の設計で問題となる座屈現象について簡単に紹介した。

梁の座屈理論について学んだ。座屈理論のポイントは、変形後の軸力によるモーメントを考慮したモーメントの釣り合いを解くことにある。

12.10. 宿題

教科書の 7.1 節, 7.1.1 節, 7.1.2 節を手書きでまとめなさい (ただ丸写しするのは×)。

第13章 座屈現象とその解法(2)

第12章では座屈方程式の導き方、ならびに座屈荷重の求め方を解説した。今回の講義では、練習として、様々な端末条件における座屈荷重を求める。

13.1. 種々の端末条件と座屈荷重

第12章では一端固定他端自由（片持ち梁）の場合と両端単純支持の場合の座屈荷重を求めたが、この節ではその他のいくつかの端末条件における梁の座屈荷重を求めてみよう。

【例題 13.1】 座屈荷重の計算(1)

端末条件が次の場合の座屈荷重を求めなさい。

- 1) 一端固定他端単純支持
- 2) 両端固定（一端は完全固定，他端はたわみとたわみ角が0のまま圧縮）
- 3) 一端は壁で上下にスライド可能，他端は単純支持

【略解】

ここでは1)の場合のみ略解を示すこととする。

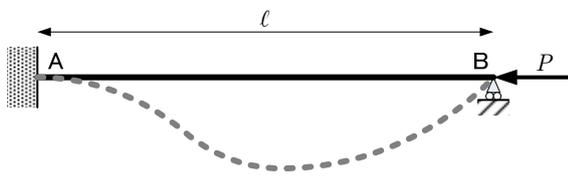
座屈の状態は図 13.1.1 のようであり，反力は，釣り合い式より

$$R_x - P = 0, \quad R_A + R_B = 0, \quad M_A + \ell R_B = 0 \quad (13.1.1)$$

よって，

$$R_x = P, \quad M_A = \ell R_A, \quad R_B = -R_A \quad (13.1.2)$$

このように，この端末条件は不静定であり， R_A は座屈後の変形形状を求めることで決まるはずである。



(a) 座屈状態



(b) 反力

図 13.1.1 一端固定他端単純支持梁の座屈

そこで，図 13.1.2 のように梁を切断して釣り合いを考えると，

$$\begin{aligned} P + N_x &= 0, & N - R_A &= 0, \\ M + M_A - Py - R_A x &= 0 \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

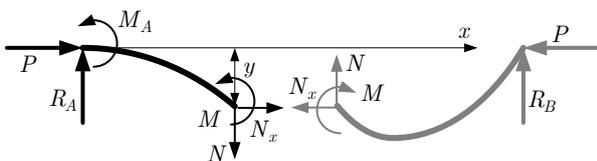


図 13.1.2 一端固定他端単純支持梁の釣り合い

式(13.1.2)を代入して整理すると，

$$M = R_A(x - \ell) + Py \quad (13.1.4)$$

よって，たわみ方程式は

$$y'' = -\frac{R_A}{EI}(x - \ell) - \frac{P}{EI}y \quad (13.1.5)$$

つまり，

$$y'' = -\frac{P}{EI} \left[y + \frac{R_A}{P}(x - \ell) \right] \quad (13.1.6)$$

この微分方程式の一般解は

$$y = -\frac{R_A}{P}(x - \ell) + A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x \quad (13.1.7)$$

境界条件は

$$x = 0: y = 0, y' = 0, \quad x = \ell: y = 0 \quad (13.1.8)$$

式(13.1.7)を代入すると，

$$\begin{bmatrix} \frac{\ell}{P} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{P} & 0 & \sqrt{\frac{P}{EI}} \\ 0 & \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.1.9)$$

よって，固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \frac{\ell}{P} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{P} & 0 & \sqrt{\frac{P}{EI}} \\ 0 & \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell \end{vmatrix} = 0 \quad (13.1.10)$$

すなわち，

$$-\frac{\ell}{P} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell + \frac{1}{P} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 0 \quad (13.1.11)$$

整理すると，

$$\beta \equiv \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell \quad (13.1.12)$$

として，次式を得る。

$$\tan \beta = \beta \quad (13.1.13)$$

この方程式の解は， $y = \tan \beta$ のグラフと $y = \beta$ のグラフの交点で与えられるので，図 13.1.3 のように無限個の解がある。

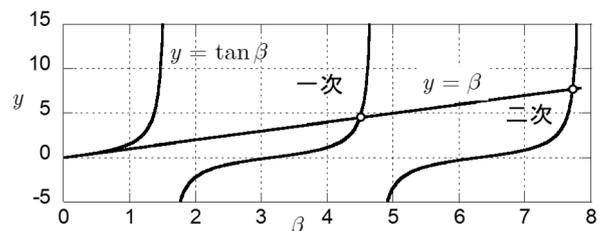


図 13.1.3 固有方程式の解（一端固定他端単純支持）

無限個の解のうち，一次の解を Newton 法より求めてみよう

う. この場合,

$$f(\beta) \equiv \tan \beta - \beta \quad (13.1.14)$$

と定義すると,

$$f'(\beta) = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \tan^2 \beta \quad (13.1.15)$$

であるから, 初期値を $\beta_i = 2$ とし, $f(\beta_i) = \beta_i + \tan \beta_i$ がほぼ 0 になるまで次の数列計算を繰り返す (i は繰り返し回数).

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{\beta_i + \tan \beta_i}{\tan^2 \beta_i} \quad (13.1.16)$$

実際に計算すると表 13.1.1 のようになり, 一次の解は

$$\beta \approx 4.49340945790906 \quad (13.1.17)$$

表 13.1.1 固有方程式の解 (一端固定他端単純支持)

i	β	$\beta + \tan \beta$
1	4.5	0.137332054551
2	4.49361390274320	0.004131873789
3	4.49340965501325	0.000003979681
4	4.49340945790925	0.000000000004
5	4.49340945790906	0.000000000000

このとき, 座屈荷重は, 式(13.1.12)より求めることができ,

$$P = \beta^2 \frac{EI}{\ell^2} = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \approx 2.046 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (13.1.18)$$

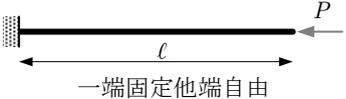
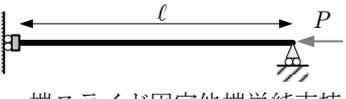
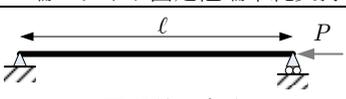
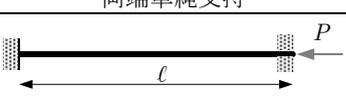
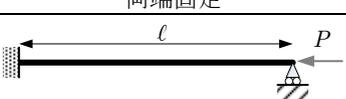
つまり, 端末条件係数は

$$C \approx 2.046 \quad (13.1.19)$$

13.2. 種々の端末条件と端末条件係数

結果だけ記すと, 端末条件係数 C は表 13.2.1 のようになる. これを覚える必要はないが, C が小さいほど低い荷重で座屈するので, 設計の際には注意を要する.

表 13.2.1 端末条件係数

端末条件	端末条件係数 C
 一端固定他端自由	$\frac{1}{4}$
 一端スライド固定他端単純支持	$\frac{1}{4}$
 両端単純支持	1
 両端固定	4
 一端固定他端単純支持	2.046

13.3. 断面形状と座屈荷重

この節では両端単純支持梁の座屈荷重

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (13.3.1)$$

が断面形状によってどう変化するか, 考えてみよう.

直径 d の円断面の場合, 断面二次モーメントは

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (13.3.2)$$

であるので,

$$P_{cr} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 \ell^2} \quad (13.3.3)$$

となる. したがって, 例えば直径を 90% に減らしただけで, 座屈荷重は 65.6% 程度まで大幅に減少してしまう. つまり, より小さな荷重で座屈してしまうのである.

次に, 同じ質量のまま断面形状を変えたらどうなるか, 考えてみよう. 【例題 3.4】でも同様のことをやったので, 思い出してほしい.

ここでは, 質量が同じで, 棒の長さも同じだとしよう. その場合には, 断面積も同じということになる. いま, 例えば, 直径 d の円断面棒と, 内径が d , 外径が d_o の円管があつとしよう. 両者の断面積が同じ場合には, 次式が成り立つ.

$$\pi d^2 = \pi(d_o^2 - d^2) \quad (13.3.4)$$

つまり,

$$d_o = \sqrt{2}d \quad (13.3.5)$$

でなければならない. このとき, 両者の座屈荷重は

$$P_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 \ell^2}, \quad P_{cr}^{(2)} = \frac{\pi^3 E (d_o^4 - d^4)}{64 \ell^2} \quad (13.3.6)$$

であるから, 式(13.3.5)を代入すると,

$$P_{cr}^{(2)} = \frac{\pi^3 E (4d^4 - d^4)}{64 \ell^2} = 3 \times \frac{\pi^3 E d^4}{64 \ell^2} = 3P_{cr}^{(1)} \quad (13.3.7)$$

つまり, 円管にすると, 質量は同じでも座屈荷重は 3 倍になってくれる.

13.4. まとめ

いくつかの境界条件における Euler 座屈荷重の求め方を解説した. 「材料力学 II」では座屈については基礎の基礎の部分にしか触れないが, 座屈現象自体は航空機構造など軽量化が求められる構造には常について回る問題であるので, 是非, 頭に入れておいてほしい.

13.5. 宿題

- 【例題 13.1】の 2), 3) を解きなさい.
- 式(13.1.13)の二次の解を求めなさい (エクセルで計算できる)

第14章 座屈現象とその解法(3)

今回の講義では、梁や梁の支持条件が理想的でない場合に圧縮荷重とたわみとの関係を求める方法について解説し、実問題における座屈の評価法について述べる。

また、第13章まででは、理想的な細長い弾性梁の座屈荷重の計算法を学んだが、短い梁の場合には Euler 座屈の座屈応力に至る前に塑性変形・破壊を起こす場合もあり、そのような座屈応力を求めるための様々な理論式・経験式が提案されている。そこで、今回の講義では短柱に対する座屈応力の経験式についても紹介する。なお、詳細は滝の web ページ http://www.geocities.jp/toshimi_taki/aircraft/aircraft_struct_ip.htm に書かれている。航空機のような薄肉構造の設計では座屈は特にクリティカルな問題となるので、経験式も重要な役割を果たすこととなる。

14.1. 偏心荷重を受ける梁

図 14.1.1 のように断面の一部に荷重を受ける場合、荷重の作用中心と断面の図心が一致しないため、梁には軸圧縮荷重の他に曲げモーメントも生じる。このように、作用中心が断面の図心が一致しない荷重を偏心荷重と呼ぶが、図 14.1.1 の問題であれば、図 14.1.2 のようにモデル化できる。

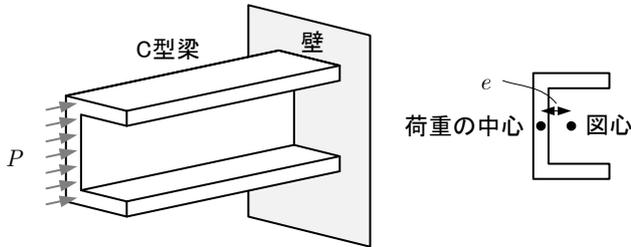


図 14.1.1 偏心荷重を受ける片持ち梁

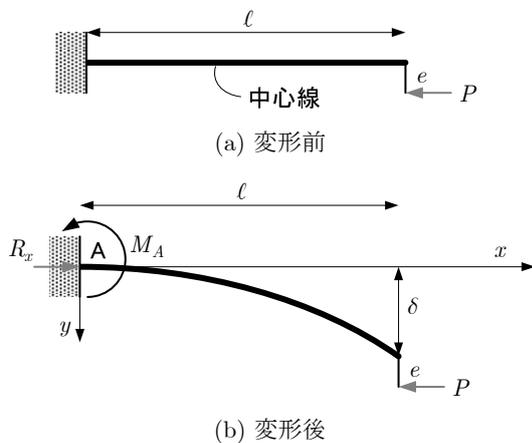


図 14.1.2 偏心荷重を受ける片持ち梁のモデル化

図 14.1.2 より、反力の釣り合いは

$$R_x - P = 0, \quad M_A - P(\delta + e) = 0 \quad (14.1.1)$$

したがって、

$$R_x = P, \quad M_A = P(\delta + e) \quad (14.1.2)$$

そして、梁を図 14.1.3 のように切断すると、釣り合い式は

$$R_x + N_x = 0, \quad M_A + M + N_x y = 0 \quad (14.1.3)$$

したがって、

$$\begin{aligned} N_x &= -R_x = -P \\ M &= -M_A - N_x y = -P(\delta + e - y) \end{aligned} \quad (14.1.4)$$

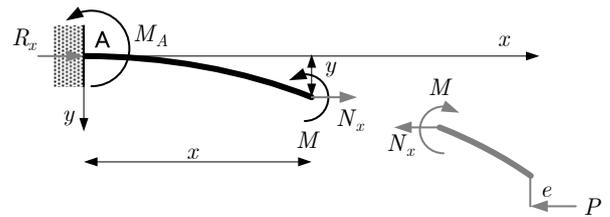


図 14.1.3 偏心荷重を受ける片持ち梁の釣り合い

よって、たわみ方程式は

$$y'' = \frac{P}{EI}(\delta + e - y) \quad (14.1.5)$$

となり、一般解は

$$y = \delta + e + A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x \quad (14.1.6)$$

これは、(12.5.6)と同じで、 δ が $\delta + e$ に変わっただけである。このあとの解の導出も全く同様で、境界条件は

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = \delta \quad (14.1.7)$$

の3つであるから、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}l & \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ -e \end{bmatrix} \quad (14.1.8)$$

しかし、ここで 12.5.2 節 (式(12.5.19)) と異なるのは、右辺が 0 ベクトルではないということである。ということは、荷重が小さくてもたわみ解は必ず存在する。逆に、左辺のマトリクスの行列式が 0 になると、解が存在しなくなる。これは、これまでの座屈問題とは全く逆の現象である。

では、解の様子は座屈問題と全く異なるかということ、そうでもない。実際、式(14.1.8)を解くと、

$$A = -\frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI}}l} e, \quad B = 0 \quad (14.1.9)$$

$$\delta = \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}l}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI}}l} e \quad (14.1.10)$$

となり、この式からわかる通り、 $\cos \sqrt{P/EI}l = 0$ の時、すなわち、 P が Euler 座屈荷重 $P_{cr} = \pi^2 EI / 4l^2$ に達した時、先端のたわみ δ は無限大に発散する。

図 14.1.4 は式(14.1.10)をグラフにしたものである。このグ

ラフからわかる通り、荷重 P が Euler 屈荷重に近づくとき一気にたわみが大きくなる。この現象自体は座屈のような分岐現象とは異なるが、実問題においては、荷重はわずかながら偏心するのが普通で、このグラフのように、荷重がある程度大きくなった途端に、一気にたわみが大きくなり、梁が破壊する。例えば、何かの実験で、徐々に荷重をかけていって、たわみがちょっと大きくなってきたから、そろそろ荷重をかけるのをやめようかなと思っていたら、いきなりたわみが大きくなって破壊に至り、万事休す、ということになる。これは最悪なので、梁のような細長い部材が圧縮を受けるような構造試験を行う場合には、事前に座屈荷重を計算で確認しておき、十分に注意する必要がある。

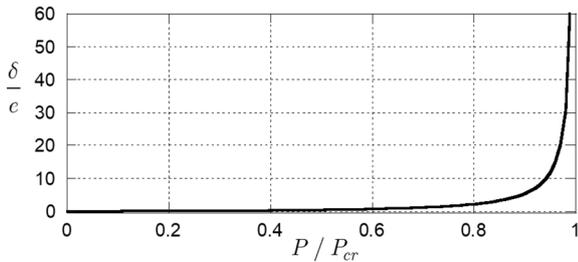


図 14.1.4 偏心荷重を受ける片持ち梁の先端たわみ

【例題 14.1】 偏心圧縮荷重を受ける梁の計算

e だけ偏心した圧縮荷重 P を受ける長さ l の次の梁の最大たわみ y_{\max} と P との関係のグラフを示しなさい。

- 1) 両端単純支持
- 2) 両端固定

14.2. 初期たわみを有する梁

座屈設計の際に問題となるものとして、偏心の他に初期たわみがある。これまで、梁は真っ直ぐである仮定してきたが、実際の梁は、わずかながらたわんでいるだろう。そこでこの節ではそのようなたわみ(初期たわみ)の影響をみてみよう。

初期たわみの影響を考えるには、そもそも、初期たわみかどのような形状なのかはわからないといけませんが、ここでは最も簡単な例として、一次の座屈モードと同じ形にたわんでいる梁について考える。なお、実際には、一次、二次、三次、…と、無限個ある座屈モードの式の線形和(足し合わせ)で任意の形状の初期たわみを表すことで、初期たわみの影響を詳しく調べることができる。

それでは、図 14.2.1 のように、初期たわみ

$$y_o = \delta \sin \frac{\pi}{l} x \quad (14.2.1)$$

を有する梁の一端 B に軸圧縮荷重 P が作用する場合について考えてみよう。

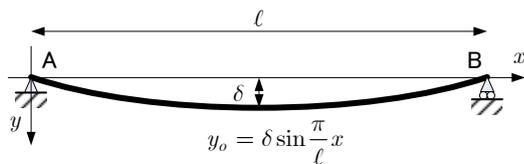


図 14.2.1 初期たわみを有する両端単純支持梁

この場合、図 14.2.2 のように、初期たわみからさらにたわんだ量を w と定義することにする。つまり、

$$y = w + y_o \quad (14.2.2)$$

このとき、点 A での反力は P となるので、釣り合い関係は

図 14.1.3 のようになる。

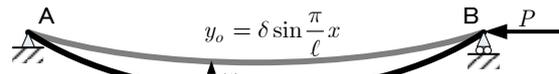


図 14.2.2 たわみの定義

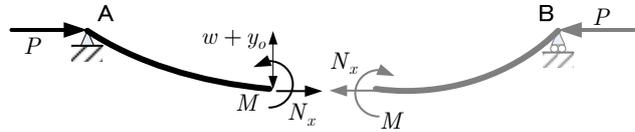


図 14.2.3 初期たわみを有する両端単純支持梁の釣り合い

この図より、釣り合い式は

$$P + N_x = 0, \quad M - P(w + y_o) = 0 \quad (14.2.3)$$

となり、たわみ方程式は次のようになる。

$$y'' = w'' = -\frac{P}{EI}(w + y_o) = -\frac{P}{EI}\left(w + \delta \sin \frac{\pi}{l} x\right) \quad (14.2.4)$$

この式の一般解は

$$w = \frac{P}{P_{cr} - P} \delta \sin \frac{\pi}{l} x + A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (14.2.5)$$

ただし、 $P_{cr} = \pi^2 EI / l^2$ は両端単純支持梁の座屈荷重である。また、境界条件は

$$x = 0: w = 0, \quad x = l: w = 0 \quad (14.2.6)$$

であるから、

$$A = 0, \quad A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} l + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0 \quad (14.2.7)$$

となり、 $P < P_{cr}$ のときには $A = B = 0$ となる。つまり、

$$w = \frac{P}{P_{cr} - P} \delta \sin \frac{\pi}{l} x \quad (14.2.8)$$

このとき、例えば梁の最大たわみ(中央部のたわみ) y_{\max} は

$$y_{\max} = w(l/2) + \delta = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} \delta \quad (14.2.9)$$

となって、荷重 P と最大たわみ y_{\max} との関係は図 14.2.4 となる。この場合も、偏心荷重を受ける梁と同様、座屈荷重に近づくとき急激にたわみが大きくなり、梁の破壊を招くことがあるので、十分に気を付けて設計する必要がある。

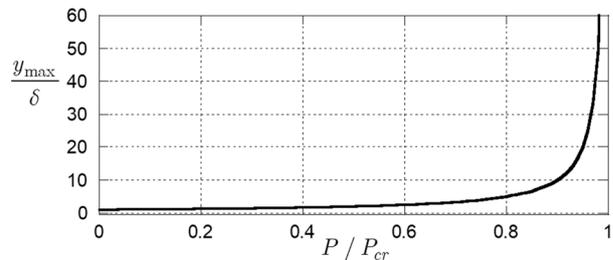


図 14.2.4 初期たわみを有する両端単純支持梁の中央たわみ

なお、図 12.4.1 や図 14.2.2 では P が座屈荷重を超えているが、これは、有限変形理論に基づく非線形解析により座屈後解析をした結果である。材料力学では微小変形を前提としているので、座屈後にたわみが大きくなったときの解析をすることはできない。

【例題 14.2】初期たわみを有する梁の計算

一次の座屈モードと同じ形状の初期たわみを有する長さ l 次の梁が圧縮荷重 P を受けるとき、梁の最大たわみ y_{\max} と P との関係のグラフを示しなさい。

- 3) 一端固定他端自由
- 4) 両端固定

14.3. Euler 座屈の限界

12.7 節で述べた通り、Euler 座屈応力は、相当細長比 λ_0

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{C}} l \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (14.3.1)$$

を用いて次式で表される。

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda_0^2 \quad (14.3.2)$$

しかし、材料は降伏応力 σ_Y を上回ると降伏するし、アルミ合金のように明確に降伏を示さない材料も圧縮強さ σ_c を超えれば破壊する。また、それらの応力を超える前にも、薄肉断面の場合にはクリップリングなどの局所座屈を起こす応力を超えることがある。そこで、一般には、そのような応力 (σ_c とする) が Euler 座屈応力よりも大きい梁を長柱、小さい梁を短柱と呼ぶ。つまり、Euler 座屈荷重の適用限界は

$$\pi^2 E / \lambda_0^2 < \sigma_c \quad (14.3.3)$$

すなわち、

$$\lambda_0 > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_c}} \quad (14.3.4)$$

14.4. ランキン (Rankine) の式

実験公式の一つで、次式で与えられる。

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_o}{1 + a_o \lambda_0^2} \quad (14.4.1)$$

ただし、 a_o と σ_o は実験的に求められている値であり、両端単純支持の場合には表 14.4.1 で与えられる。

表 14.4.1 Rankine の式の定数 (両端単純支持)

材料	σ_o (MPa)	a_o	λ_o
軟鋼	333	1/7500	< 90
硬鋼	481	1/5000	< 85
鋳鉄	549	1/1600	< 80
木材	49	1/750	< 60

例えば、軟鋼の場合で $E \approx 210\text{GPa}$ とすれば、Euler 座屈応力と Rankine の式とを比較すると、図 14.4.1 のようになり、Rankine の式の適用範囲 ($\lambda_0 < 90$) よりも λ_0 が大きいところで既に Euler 座屈荷重の方が Rankine の式を上回る。

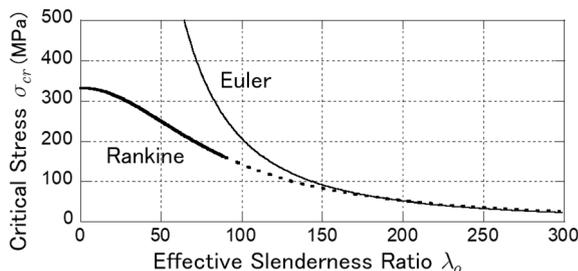


図 14.4.1 Rankine の式 (軟鋼)

14.5. ジョンソン (Johnson) の式

Johnson は、座屈応力の限界値 ($\lambda_0 = 0$) での値を降伏応力 σ_Y として、座屈応力を次のように λ_0 の二次関数で近似する近似式を提案した。

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y - A \lambda_0^2 \quad (14.5.1)$$

ただし、 A は定数で、Euler 座屈応力曲線(14.3.2)と式(14.5.1)とが接するように決める。実際に計算してみると、接点は

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}}, \quad \sigma_{cr} = \frac{\sigma_Y}{2} \quad (14.5.2)$$

であり、

$$A = \frac{\sigma_Y^2}{4\pi^2 E} \quad (14.5.3)$$

よって、

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y - \frac{\sigma_Y^2}{4\pi^2 E} \lambda_0^2 = \sigma_Y \left[1 - \frac{\sigma_Y}{4\pi^2 E} \lambda_0^2 \right] \quad (14.5.4)$$

たとえば、軟鋼の場合で、 $E \approx 210\text{GPa}$ 、 $\sigma_Y = 250\text{MPa}$ とすれば、図 14.5.1 のようになる。

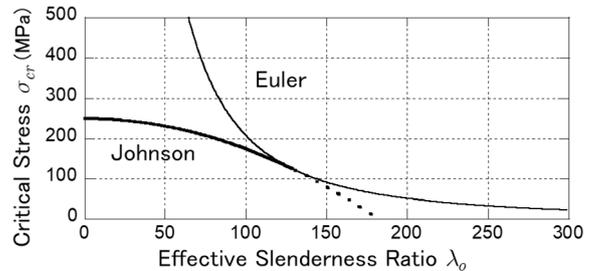


図 14.5.1 Johnson の式 (軟鋼)

ただし、Johnson の式は航空機構造では降伏応力 σ_Y の代わりにクリップリング応力 σ_{cc} を用いることが多い。そして、設計の際、応力が σ_{cc} の半分までは Euler 座屈応力を用い、それ以上になる場合には Johnson の式による応力を用いる。

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cc} - \frac{\sigma_{cc}^2}{4\pi^2 E} \lambda_0^2 \quad (14.5.5)$$

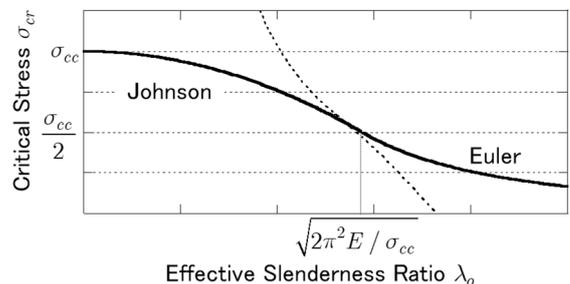


図 14.5.2 Johnson の式 (薄肉構造)

14.6. テトマイヤー (Tetomajer) の式

Johnson は λ_0 の二次式で近似する方法を提案したが、Tetmajer は一次式で近似する方法を提案した。この場合、Euler 座屈応力曲線とは

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{3\pi^2 E}{\sigma_Y}}, \quad \sigma_{cr} = \frac{\sigma_Y}{3} \quad (14.6.1)$$

で接し、座屈応力曲線は次式のようにになる。

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y \left[1 - \frac{2}{3\sqrt{3}\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y \lambda_0}{E}} \right] \quad (14.6.2)$$

たとえば、軟鋼の場合で、 $E \approx 210\text{GPa}$ 、 $\sigma_Y = 250\text{MPa}$ とすれば、のようになる。

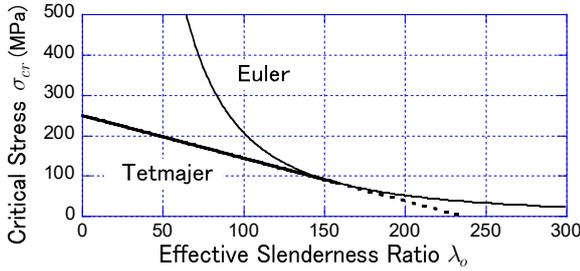


図 14.6.1 Tetmajer の式 (軟鋼)

ただし、教科書には

$$\sigma_{cr} = \sigma_o (1 - a_o \lambda_0) \quad (14.6.3)$$

として、 a_o と σ_o を実験的に求めることが書かれており、両端単純支持の場合には表 14.6.1 で与えている。

表 14.6.1 Tetmajer の式の定数 (両端単純支持)

材料	σ_o (MPa)	a_o	λ_0
軟鋼	304	0.00368	< 105
硬鋼	428	0.00185	< 90
鋳鉄	28.7	0.00628	< 108

例えば、軟鋼の場合で $E \approx 210\text{GPa}$ として、Euler 座屈応力と Tetmajer の式とを比較してみると、図 14.6.2 のようになり、確かに $\lambda_0 < 105$ あたりで Euler 座屈応力よりも Tetmajer の応力の方が小さくなるが、接してはいない。

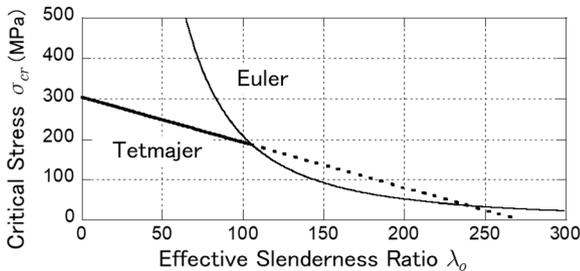


図 14.6.2 Tetmajer の式 (鋼材)

14.7. 塑性座屈

厚肉断面の柱は細長比が小さくなると、弾性座屈ではなくいきなり塑性座屈を起こす。塑性座屈では、Euler 座屈の式のヤング率 E を接線剛性 (tangent modulus) E_t に置き換える。図 14.7.1 は航空機構造材に用いられる A7075-T7451 板材の応力-歪関係を表している。グラフは曲線であり、場所によって傾きが異なる。この傾きが接線剛性である。つまり、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda_0^2} \quad (14.7.1)$$

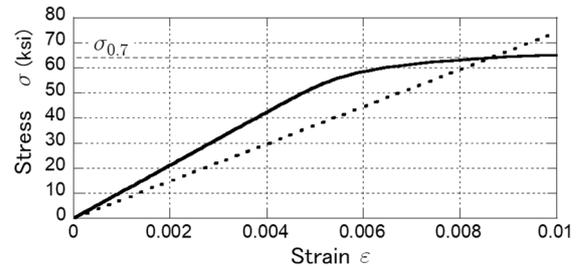


図 14.7.1 A7075-T7451 板材の応力-歪関係 (1ksi=6.894757 MPa)

Ramberg-Osgood はこのような非線形の応力-歪関係を次の式で近似することを提案している。

$$E\epsilon = \sigma \left[1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1} \right] \quad (14.7.2)$$

このとき、接線剛性は

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{3}{7} n \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1}} \quad (14.7.3)$$

したがって、座屈応力は

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2 \left[1 + \frac{3}{7} n \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{0.7}} \right)^{n-1} \right]} \quad (14.7.4)$$

この式は σ_{cr} に関する非線形方程式であるので、Newton 法で解を求めるか、例えば EXCEL のソルバー機能を用いて計算する。A7075-T7451 板材の場合、

$$E = 10600\text{ksi}, \quad \sigma_{0.7} = 64\text{ksi}, \quad n = 19 \quad (14.7.5)$$

であるので、実際に計算すると図 14.7.2 のようになる。

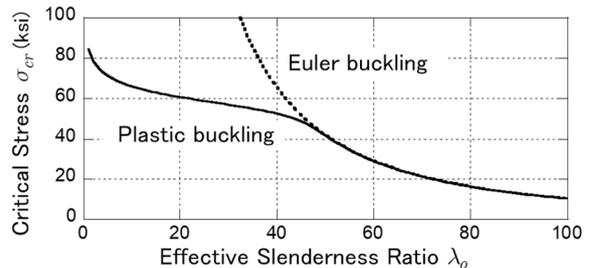


図 14.7.2 塑性座屈応力 (A7075-T7451 板材)

また、

$$\sigma_Y \approx 65\text{ksi} \quad (14.7.6)$$

であるので、Johnson の式を重ねると図 14.7.3 のようになり、塑性座屈を比較的よく表現できていることがわかる。

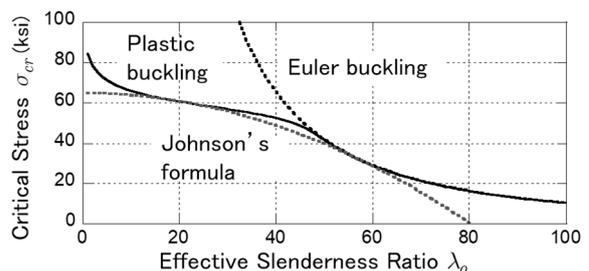


図 14.7.3 座屈応力 (A7075-T7451 板材)

14.8. まとめ

座屈荷重の実験式を紹介した.

14.9. 宿題

- 1) 長さ 1.5m, 直径 70mm の鉄柱の座屈応力および臨界荷重を, Rankine の式により求めなさい (参考書の問題 10.11) .
- 2) 長さ 1.8m, 直径 16cm の丸太の臨界荷重を, Tetomajer の式により求めなさい (参考書の問題 10.12) .
- 3) 教科書の練習問題【7.5】を解きなさい.
- 4) 教科書の練習問題【7.1】 , 【7.3】 , 【7.4】を解きなさい.

14.10. まとめ

端末条件係数を整理するとともに, 偏心荷重をうける場合や初期たわみを有する場合の荷重-たわみ曲線の計算法を確認した.

14.11. 宿題

- 1) 教科書の 7.3 節を手書きでまとめなさい (ただ丸写しするのは×) .

第15章 補遺：梁の曲げによるせん断応力

梁の軸に沿って曲げモーメントが変化すると、すなわち、曲げ応力が変化すると、梁の断面にはせん断応力が生じる。今回の講義では、このせん断応力の断面内での分布について解説し、合応力としてのせん断力と曲げモーメントとの関係を復習する。

15.1. 梁の側面の境界条件

梁理論では、原則として、梁の側面には一切、外力は生じないと仮定する。このとき、梁の側面には応力は生じない。すなわち、

$$\sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 \quad (15.1.1)$$

ただし、 τ_{yx} は「 y 軸に垂直な断面上のせん断応力で、方向が x 軸に平行なもの」という意味である。また、 σ_y は「 y 軸に垂直な断面上の垂直応力」という意味である。もともと、二次元の梁理論では σ_y と τ_{yz} は 0 としているが、 τ_{yx} は一般には 0 ではない。

なお、実は、梁の内部には τ_{xy} だけでなく τ_{yx} が生じており、しかも、

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (15.1.2)$$

であることが理論的に証明されている。ただし、式(15.1.1)にある通り、梁の表面では $\tau_{yx} = 0$ であるので、通常、図を描く際には τ_{yx} は省略されることが多い。実際、梁の変形に直接的に寄与するのは τ_{xy} であって、 τ_{yx} ではないので、省略しても差し支えない。

なお、この講義では、これまで通り、 σ_x は σ 、 τ_{xy} や τ_{yx} は τ と簡略化した表記を用いることにする。

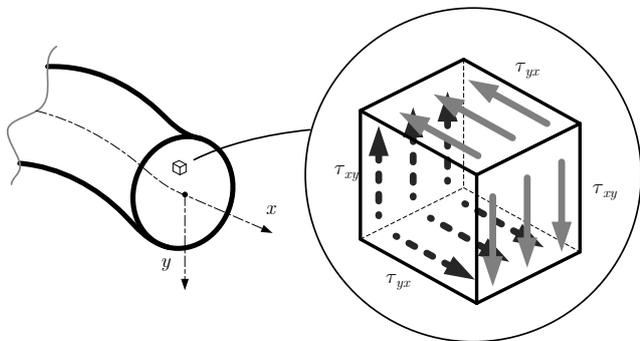
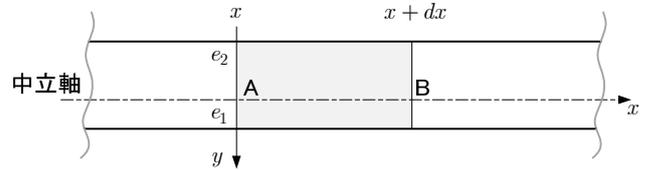


図 15.1.1 微小部分に生じるせん断応力

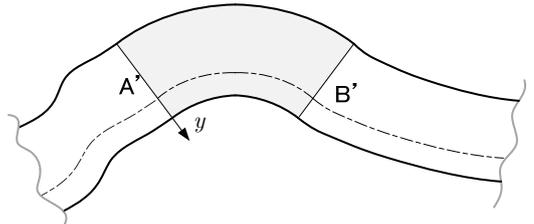
15.2. 梁の微小部分の力の釣り合い

梁の軸に沿って、長さ x のところの断面と $x + dx$ のところの断面で切った部分について考えてみる。いま、図 15.2.1(a) のような梁の微小部分が変形後、(b) のようになったとする。ここで、微小部分において y 座標が y 以上である部分、すなわち、図 15.2.1(c) の四角形 PGHQ の部分での力の釣り合いを考えてみよう。

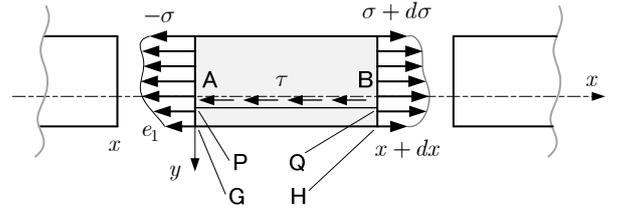
まず、応力は図 15.2.1(c) のように分布している。15.1 節で述べた通り、底面 GH には応力は生じていない。この四角形部分を拡大して立体的に描いたのが図 15.2.2 である。これらの図から、この微小部分の力の釣り合い式は次のようになることがわかる。



(a) 変形前



(b) 変形後



(c) 変形後の近似形状

図 15.2.1 梁内部の応力状態

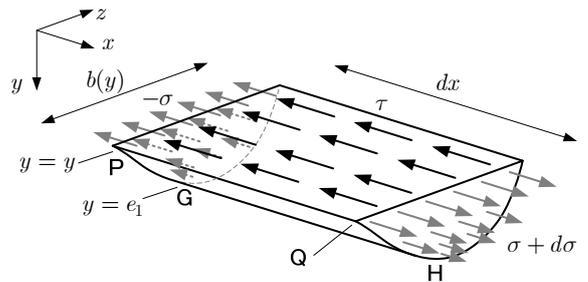


図 15.2.2 梁内部の微小部分の力の釣り合い

$$-\int_y^{e_1} \sigma dA - \tau(y)b(y)dx + \int_y^{e_1} [\sigma + d\sigma]dA = 0 \quad (15.2.1)$$

15.3. せん断応力分布

式(15.2.1)をせん断応力について解くと、

$$\tau(y) = \frac{1}{b(y)} \int_y^{e_1} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (15.3.1)$$

ここで、曲げ応力は式(3.5.9)、すなわち、積分したい点での y 座標を η として、

$$\sigma = \frac{M}{I} \eta \quad (15.3.2)$$

与えられるので、式(15.3.1)に代入すると、

$$\tau(y) = \frac{1}{b(y)I} \frac{dM}{dx} \int_y^{e_1} \eta dA \quad (15.3.3)$$

この式により、軸方向の曲げモーメント分布、つまり、BMD がわかっているならば、せん断応力を求めることができる。また

$$\frac{dM}{dx} = F \quad (15.3.4)$$

であるから、せん断力 F の分布、すなわち、SFD が求められていれば、

$$\tau(y) = \frac{F}{b(y)I} \int_y^{e_1} \eta dA \quad (15.3.5)$$

によりせん断応力をもとめることができる。

なお、中実断面であれば、力の釣り合い式は

$$-\int_y^{e_1} \sigma(\eta)b(\eta)d\eta - \tau(y)b(y)dx + \int_y^{e_1} [\sigma(\eta) + d\sigma]b(\eta)d\eta = 0 \quad (15.3.6)$$

となり、せん断応力は

$$\tau(y) = \frac{1}{b(y)} \int_y^{e_1} \frac{d\sigma}{dx} b(\eta)d\eta = \frac{1}{b(y)I} \frac{dM}{dx} \int_y^{e_1} \eta b(\eta)d\eta \quad (15.3.7)$$

となる。あるいは、式(15.3.4)を代入して、次式でせん断応力を求めることができる。

$$\tau(y) = \frac{F}{b(y)I} \int_y^{e_1} \eta b(\eta)d\eta \quad (15.3.8)$$

例えば、厚さ h 、奥行き b の矩形断面の場合、 b は一定であり、 $e_1 = h/2$ 、 $I = bh^3/12$ であるので、

$$\tau(y) = \frac{F}{bI} \int_y^{h/2} \eta b d\eta = \frac{6F}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (15.3.9)$$

したがって、せん断応力は $y = 0$ の時に最大となり、

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{2bh} \quad (15.3.10)$$

これは、平均値 $\tau_{\text{mean}} = F/bh$ の 1.5 倍である。

以下、式(15.3.8)を用いて、いくつか例題を解いてみよう。

【例題 15.1】せん断応力分布

長さ 50cm のアルミ合金でできた片持ち梁の先端に 1kg のおもりを吊り下げた。断面積が 50mm^2 で、断面形状が厚さ 5mm、奥行き 10mm の矩形の場合について、固定点から 10cm のところでのせん断応力分布およびせん断応力の最大値を求めなさい。ただし、アルミ合金のヤング率を 70GPa、密度を 2.7g/cm^3 、重力加速度を 9.8m/s^2 とする。

【略解】

まず、図 15.3.1 のように記号を定義する。いま、図 15.3.2 において、梁の先端の長さ $L-x$ の部分で力の釣り合いは、

$$F - \rho Ag(L-x) - mg = 0 \quad (15.3.11)$$

よって、

$$F = \rho Ag(L-x) + mg \quad (15.3.12)$$

固定点から 10cm の断面 A では

$$\begin{aligned} F &= \rho Ag(L-L_1) + mg \\ &= 2700 \times 50 \times 10^{-6} \times 9.8 \times (0.5 - 0.1) + 1.0 \times 9.8 \\ &= 10.3292 \end{aligned} \quad (15.3.13)$$

この例題では、式(15.3.8)において、

$$\begin{cases} e_1 = \frac{h}{2} = 2.5 \times 10^{-3} \text{m}, & b(y) = 10 \times 10^{-3} \text{m}, \\ I = \frac{1250}{12} \times 10^{-12} \text{m}^4 \end{cases} \quad (15.3.14)$$

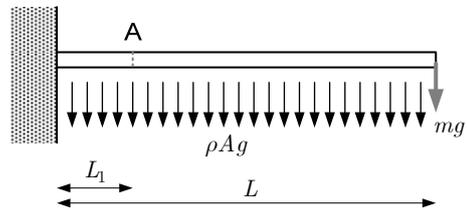
であるから、

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{F}{bI} \int_y^{e_1} \eta b d\eta = \frac{F}{I} \left[\frac{1}{2} \eta^2 \right]_y^{h/2} = \frac{F}{2I} [e_1^2 - y^2] \\ &= \frac{10.3292}{2 \times \frac{1250}{12} \times 10^{-12}} [(2.5 \times 10^{-3})^2 - y^2] \\ &= 0.309876 \times 10^6 - 49.58016 \times 10^9 \times y^2 \text{ [Pa]} \\ &\approx 0.310 - 49.6 \times 10^3 \times y^2 \text{ [MPa]} \end{aligned} \quad (15.3.15)$$

ただし、 y の単位は [m] である。もし、単位を [mm] にしたら、

$$\tau(y) \approx 0.310 - 0.0496 \times y^2 \text{ [MPa]} \quad (15.3.16)$$

いずれにしても、せん断応力の最大値は 0.310MPa である。また、分布図は図 15.3.3 のようになる。



$$\begin{cases} h = 5\text{mm} = 5 \times 10^{-3} \text{m} \\ b = 10\text{mm} = 10 \times 10^{-3} \text{m} \\ m = 1\text{kg}, \quad g = 9.8\text{m/s}^2 \\ \rho = 2.7\text{g/cm}^3 = 2700\text{kg/m}^3 \\ A = bh = 50 \times 10^{-6} \text{m}^2 \\ I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1250}{12} \times 10^{-12} \text{m}^4 \\ E = 70\text{GPa} = 70 \times 10^9 \text{N/m}^2 \\ L = 50\text{cm} = 0.5\text{m}, \quad L_1 = 10\text{cm} = 0.1\text{m} \end{cases}$$

図 15.3.1 片持ち梁に生じるせん断応力

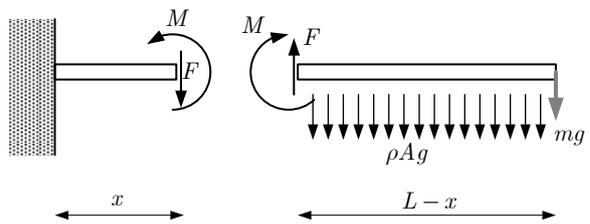


図 15.3.2 片持ち梁の先端部分のモーメントの釣り合い

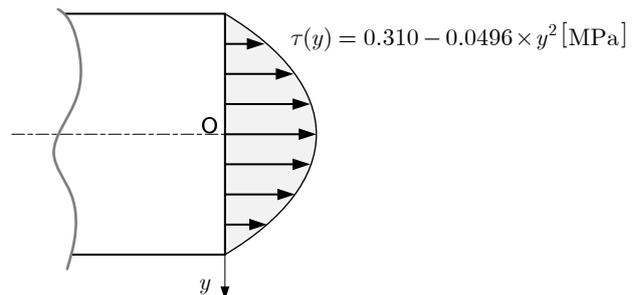


図 15.3.3 せん断応力分布

【例題 15.2】せん断応力分布(2)

【例題 15.1】と同じ条件で断面形状が以下の場合について、せん断応力分布とせん断応力の最大値を求めなさい。

- (1) 円
- (2) 底辺と高さが同じ二等辺三角形（底辺は下側）

15.3.1. 薄肉断面のせん断応力分布

薄肉断面の場合は「航空機構造力学」で学ぶことになるが、先取りして、少し考えてみよう。

梁内部の微小部分の力の釣り合い（図 15.2.2）より、式 (15.3.5)

$$\tau(y) = \frac{F}{b(y)I} \int_y^{e_1} \eta dA \quad (15.3.5)$$

が成り立つことを 15.3 節で述べた。これを変形すると

$$\tau(y)b(y)dx = dx \frac{F}{I} \int_y^{e_1} \eta dA \quad (15.3.17)$$

となるが、この式の左辺は図 15.2.2 の微小部分の上面に作用するせん断力を意味する。

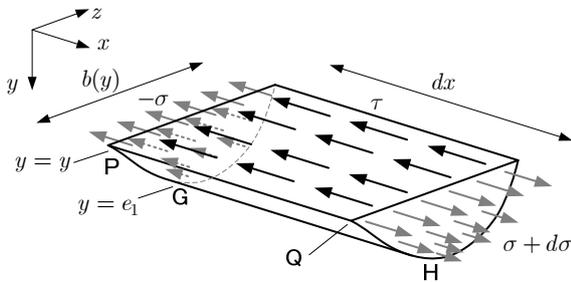


図 15.2.2 梁内部の微小部分の力の釣り合い（再掲）

これに対し、例えば薄肉円筒断面の場合、下から角度 θ のところまでの微小部分での力の釣り合いを考えると、式 (15.3.17)に対応するものは次式であることがわかる。

$$\tau(\theta)tdx = dx \frac{F}{I} \int_0^\theta r \cos \theta t r d\theta \quad (15.3.18)$$

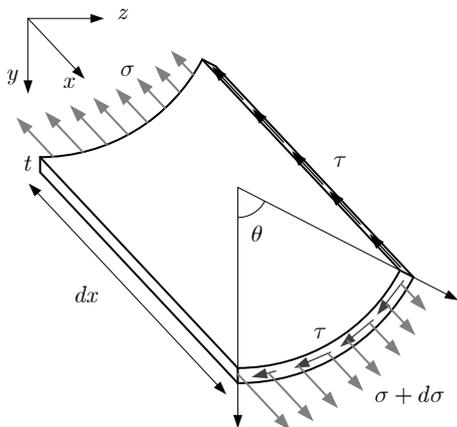


図 15.3.4 薄肉円筒の微小部分の力の釣り合い

式(15.3.18)を整理すると、

$$\tau(\theta) = \frac{Fr^2}{I} \sin \theta \quad (15.3.19)$$

ここで、薄肉円筒の断面二次モーメントは

$$I = 2 \int_0^\pi (r \cos \theta)^2 t r d\theta = \pi r^3 t \quad (15.3.20)$$

であるから、結局、

$$\tau(\theta) = \frac{Fr^2}{\pi r^3 t} \sin \theta = \frac{F}{\pi r t} \sin \theta \quad (15.3.21)$$

これを断面側から図示すると図 15.3.5 のようになる。

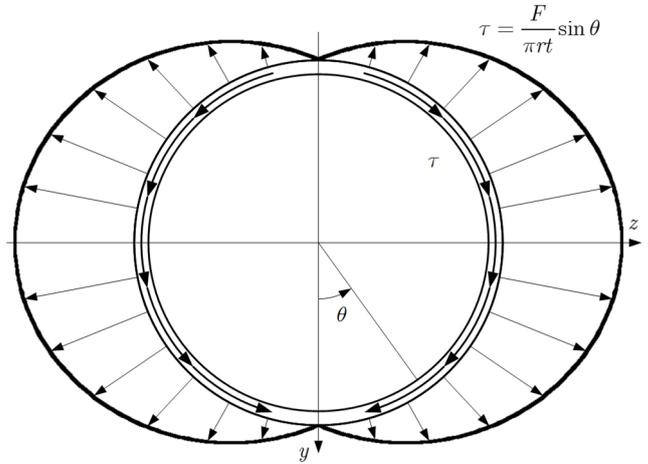


図 15.3.5 薄肉円筒のせん断応力分布

このように、薄肉閉断面で全ての荷重（曲げ、引張・圧縮、せん断、そしてねじり）を支える構造はモノコック構造 (monocoque structure) と呼ばれる。しかし、モノコック構造では大きな荷重を負担させるのは難しく、特に、航空機のように、中に人や荷物が入る空間を確保しつつ、軽量につくるのはかなり厳しい。そこで、ストリンガ (stringer) をつけて、ストリンガが軸力や曲げモーメントによる垂直応力を負担し、薄肉パネルはせん断応力のみを負担するという、セミモノコック構造 (semi-monocoque structure) が多く用いられる。さらに、ロケットや航空機のように胴体が長い場合には、ストリンガだけでは曲げ応力を負担しきれず、せん断応力も薄肉パネルだけでは負担しきれないので、フレーム (frame) と呼ばれるリング状の部材を軸方向のところどころに配置し、フレームが荷重を負担することで、ストリンガや薄肉パネル（外皮, skin）の負担を軽減する方法がとられる。図 15.3.6、図 15.3.7 は、それぞれ、ロケットの胴体と航空機の胴体の例である。

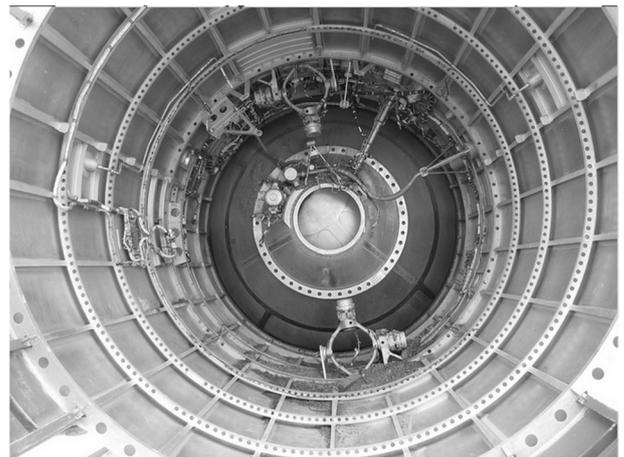


図 15.3.6 ロケットの胴体構造の例

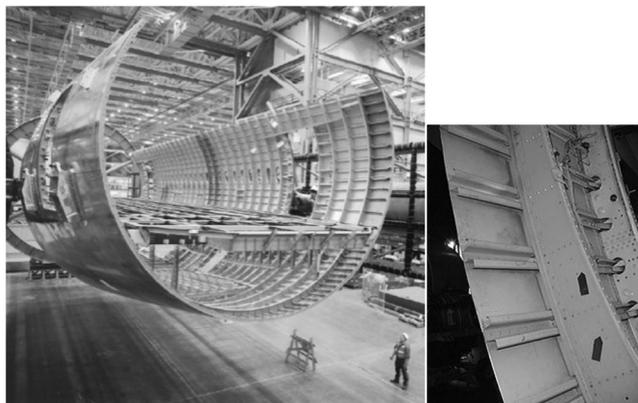


図 15.3.7 航空機の胴体構造の例

ちなみに、ストリングが垂直応力を負担し、薄肉パネルにはせん断応力のみが作用すると近似する理論はせん断場理論 (shear field theory) と呼ばれ、航空構造解析/設計の基本中の基本となる。せん断場理論では、薄肉断面に作用するせん断応力 τ に板厚 t を掛けたものをせん断流 (shear flow) と呼んでいる。せん断流は航空機構造などの薄肉構造ではとても重要なものとなる。詳しくは「航空機構造力学」で学ぶことになるので、覚えておくとよいだろう。実際、航空機メーカーの技術者からは、「とにかく、材料力学と、せん断流/せん断場理論だけは勉強しておくように学生さんたちには行っておいてくれ。それだけ勉強しておけば、他はなんとかなる」とよく言われる (構造解析系のソフトウェアさんからは、材料力学の他、ボルトやリベットなど、締結部での荷重負担などの部分も勉強しておいてくれると助かる、と言われる。それらは、既に設計関連の授業で勉強しているだろうし、「航空機構造力学」でも勉強することになる)。

15.4. まとめ

梁の断面に生じるせん断応力分布の求め方を確認した。

15.5. 宿題

なし。

編集・著作：宮崎 康行
日本大学工学部航空宇宙工学科
〒274-8501 千葉県船橋市習志野台 7-24-1
2015年4月1日